دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

انتگرال گیری عددی با استفاده از موجک های هار و توابع هیبرید

استاد راهنما

دکتر مهرداد لکستانی

استاد مشاور

دکتر قدرت عبادی

پژوهشگر

نجمه میثمی

تابستان ۱۳۹۱

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

تقدیم به همه آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر لکستانی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکترعبادی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

نجمه میثمی

تابستان ۱۳۹۱

نام خانوادگی: میثمی نام: نجمه

عنوان پایان‌نامه: انتگرال گیری عددی با استفاده از موجک های هار و توابع هیبرید

استاد راهنما: دکتر مهرداد لکستانی

استاد مشاور: دکتر قدرت عبادی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: تبریز دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: تابستان ۱۳۹۱ تعداد صفحه: ۹۶

کلیدواژه‌ها: موجک های هار، توابع هیبرید، انتگرال گیری عددی

چکیده

در این پایان‌نامه، که بر مبنای مرجع [۱۲، ۱۴] تدوین می‌شود، روش موجک هار و توابع هیبرید را برای بدست آوردن جواب عددی انتگرال های یگانه، دوگانه و سه گانه با حدود ثابت و متغیر به کار می بریم. سپس کاربرد موجک های هار در حل عددی معادلات انتگرال فردهلم غیر خطی بیان می شود. در ادامه پس از بررسی برخی از خواص مفید توابع هیبرید، ماتریس های عملیاتی انتگرال و حاصل ضرب برای این توابع ساخته می شود و با استفاده از آنها معادلات انتگرال ولترا و فردهلم خطی را حل می کنیم. حل معادلات ذکر شده با استفاده از توابع هیبرید منجر به یک سیستم خطی می شود. بعلاوه تخمین خطای جواب تقریبی نیز برای روش‌ها بررسی می شود و اعمال این روش‌ها برای محاسبه جواب‌های عددی چنین توابعی، نتایجی قابل قبول ارائه می‌دهد.

فهرست مطالب

پیشگفتار

سالیان متمادی، نظریه سری و آنالیز فوریه به عنوان ابزاری توانمند در پردازش های سیگنال و تصویر مورد توجه بوده است. سهولت به کارگیری و اطلاعات ارزشمند حاصل از اعمال این نظریه باعث فراگیر شدن آن شده است. با وجود این باید توجه داشت که نظریه فوریه بر فرض ایستا بودن سیگنال یا تصویر استوار است. در صورت برآورده نشدن این فرض، ابزار فوریه کارایی خود را از دست خواهد داد. از طرفی در بسیاری از کاربردهای جدید هدف تعیین ناایستایی سیگنال و تصویر است.

در سال ۱۹۸۷، نظریه موجک به عنوان یک ایده تکمیلی جهت رفع مشکل نظریه فوریه توسط دابشیز مطرح شد. با توجه به کارایی بالا، این نظریه قلمرو وسیعی از علوم و مهندسی را به خود اختصاص داده و همگام با افزایش روزافزون کاربردهای موجک، کتاب ها و مقاله های متنوعی در مورد اصول نظری و کاربردهای نظریه موجک ارائه شده است.

ترجمه‌ی واژگان انگلیسی استفاده شده در متن این پایان‌نامه، از مرجع [۱] انتخاب شده است. ترتیب موضوعات در این پایان‌نامه به این‌صورت است که، در فصل اول به بیان خواص و ساختار موجک‌ها همچنین آنالیز چند تجزیه‌ای می‌پردازیم. در فصل دوم که بر اساس مقاله [۱۴] تنظیم شده است، ابتدا به معرفی موجک‌های هار و قضایایی در مورد آنها پرداخته و در ادامه با استفاده از این موجک ها، به حل عددی انتگرال های یگانه، دوگانه و سه گانه می پردازیم. در فصل سوم که بر اساس مقاله [۱۲] تنظیم شده است، توابع هیبرید را معرفی می‌کنیم و از این توابع نیز، در انتگرال گیری عددی استفاده می کنیم. در فصل چهارم که بر اساس مقاله های [۱۳، ۱۱] تنظیم شده است به حل عددی معادلات انتگرال ولترا و فردهلم با استفاده ازموجک‌های هار و توابع هیبرید می پردازیم. و در فصل پنجم به نتیجه‌گیری می‌پردازیم.

فصل ۱

پیشینه پژوهش و تعاریف مقدماتی

۱.۱ آنالیز موجک

۱.۱.۱ تاریخچه

فکر نمایش یک تابع برحسب مجموعه‌ی کاملی از توابع اولین بار توسط ژوزف فوریه، ریاضیدان و فیزیکدان بین سال‌های ۱۸۰۲-۱۸۰۶ طی رساله‌ای در آکادمی علوم راجع به انتشار حرارت، برای نمایش توابع بکار گرفته شد. در واقع برای آنکه یک تابع $f(x)$ به شیوه‌ای ساده و فشرده نمایش داده شود فوریه اساسا ثابت کرد که می‌توان از ابزارهایی استفاده کرد که به کمک مجموعه‌ای نامتناهی از توابع سینوس‌وار ساخته می‌شوند. به‌عبارت دیگر فوریه نشان داد که یک تابع $f(x)$ را می‌توان به وسیله‌ی حاصل جمع بی‌نهایت تابع سینوسی و کسینوسی به شکل $sin(ax)$ و $cos(ax)$ نمایش داد. پایه‌های فوریه بصورت ابزارهایی اساسی، با کاربردهای فوق العاده متواتر در علوم در آمده‌اند، زیرا برای نمایش انواع متعددی از توابع به کار می‌روند. با گذشت زمان ضعف پایه‌های فوریه نمایان شد، مثلا دانشمندان پی بردند پایه‌های فوریه و نمایش توابع سینوس‌وار در مورد سیگنال‌های پیچیده، نظیر تصاویر، نه‌تنها مطلوب نیستند بلکه از شرایط مطلوب دورند، به عنوان مثال به شکل کارآمدی قادر به نمایش ساختارهای گذرا نظیر مرزهای موجود در تصاویر نیستند. همچنین آن‌ها متوجه شدند تبدیل فوریه فقط برای توابع پایه‌ی یک فضا مؤثر عمل می‌کند و برای توابع غیر پایه کارآمد نیست (البته در سال ۱۹۴۶ با استفاده از توابع پنجره‌ای، که منجر به تبدیل فوریه‌ی پنجره‌ای شد این مشکل حل شد).

در سال ۱۹۰۹ هار [۱] اولین کسی بود که به موجک‌ها اشاره کرد. در سال ۱۹۳۰ ریاضیدانان به قصد تحلیل ساختارهای تکین به فکر اصلاح پایه‌های فوریه افتادند. بعد از آن در سال ۱۹۷۰ یک ژئوفیزیکدان فرانسوی به نام ژان مورلت [۲] متوجه شد که پایه‌های فوریه بهترین ابزار ممکن در اکتشافات زیر زمین نیستند و این موضوع در آزمایشگاهی متعلق به الف آکیلن [۳] منجر به یکی از اکتشافات، تبدیل به موجک‌ها گردید.

در سال ۱۹۸۰ ایومیر [۴] ریاضیدان فرانسوی، نخستین پایه‌های موجکی متعامد را کشف کرد (تعامد نوعی از ویژگی‌ها را بیان می کند که موجب تسهیلات فراوانی در استدلال و محاسبه می‌شود، پایه‌های فوریه نیز متعامدند). در همین سال‌ها مورلت مفهوم موجک و تبدیل موجک را به‌عنوان یک ابزار برای آنالیز سیگنال زمین لرزه وارد کرد و گراسمن [۵] فیزیکدان نظری فرانسه نیز فرمول وارونی را برای تبدیل موجک بدست آورد. در سال ۱۹۷۶ میر و مالت [۶] از پایه‌های موجک متعامد توانستند آنالیز چند تجزیه‌ای را بسازند و مالت تجزیه موجک‌ها و الگوریتم‌های بازسازی را با به‌کار بردن آنالیز چند تجزیه‌ای به وجود آورد. در سال ۱۹۹۰ مورنزی [۷] همراه با آنتوان [۸] موجک‌ها را به دو بعد و سپس به فضاهایی با ابعاد دیگر تعمیم دادند و بدین ترتیب بود که آنالیز موجکی پایه‌گذاری گردید.

۲.۱.۱ کاربردها

آنالیز موجک یکی از دستاوردهای نسبتا جدید و هیجان‌انگیز ریاضیات است که مبتنی بر چندین دهه پژوهش در آنالیز همساز است. امروزه آنالیز موجک کاربردهای مهمی در بسیاری از رشته‌های علوم و مهندسی یافته و امکانات جدیدی برای درک جنبه‌های ریاضی آن و نیز افزایش کاربردهایش فراهم شده است. در آنالیز موجک هم مانند آنالیز فوریه با بسط تابع‌ها سروکار داریم ولی این بسط برحسب «موجک‌ها» انجام می‌شود. موجک تابع مشخص مفروضی با میانگین صفر است و

---

[۱] Haar
[۲] Jean Morlet
[۳] elf acklin
[۴] Eumir
[۵] Grrosman
[۶] Malt
[۷] Petra Morenzi
[۸] Antoine

بسط بر حسب انتقال‌ها و اتساع‌های این تابع انجام می‌گیرد. بر خلاف چند جمله‌ای‌های مثلثاتی، موجک‌ها در فضا به صورت موضعی بررسی می‌شوند و به این ترتیب ارتباط نزدیکتری بین بعضی توابع و ضرایب آنها امکان‌پذیر می‌شود و پایداری عددی بیشتری در بازسازی و محاسبات فراهم می‌گردد. هر کاربردی را که مبتنی بر تبدیل سریع فوریه است می‌توان با استفاده از موجک‌ها فورمول بندی کرد و اطلاعات فضایی (یا زمانی) موضعی بیشتری بدست آورد. بطور کلی، این موضوع بر پردازش سیگنال و تصویر و الگوریتم‌های عددی سریع برای محاسبه‌ی عملگرهای انتگرالی اثر می‌گذارد. آنالیز موجک حاصل ۵۰ سال کار ریاضی (نظریه ی لیتلوود[۹] — پیلی و کالدرون[۱۰] — زیگموند[۱۱]) است که طی آن، با توجه به مشکلاتی که در پاسخ به ساده ترین پرسش‌های مربوط به تبدیل فوریه وجود داشت، جانشین‌های انعطاف‌پذیر ساده‌تری از طریق آنالیز همساز ارائه شدند. در طی دهه‌ی گذشته صورت‌های مختلفی از این رهیافت چند مقیاسی [۱۲] را در پردازش تصویر، صوت، کدگذاری (به شکل فیلترهای آیینه‌ای متعامد و الگوریتمهای هرمی) و استخراج نفت دیده‌ایم.

آنالیز موجک همراه با تبدیل سریع فوریه در تحلیل سیگنال‌های گذرایی که سریعا تغییر می‌کنند، صدا و سیگنال‌های صوتی، جریان‌های الکتریکی در مغز، صداهای زیر آبی ضربه‌ای و داده‌های طیف نمایی (NMR) و در کنترل نیروگاه‌های برق از طریق صفحه‌ی نمایش کامپیوتر به‌کار رفته است، و نیز به عنوان یک ابزار علمی برای روشن ساختن ساختار جریان‌های جوی و در بررسی ساختارهای ستاره‌ای از آن استفاده شده است. این آنالیز به عنوان یک ابزار عددی می‌تواند مانند تبدیل سریع فوریه تا حد زیادی از پیچیدگی محاسبات با مقیاس بزرگ بکاهد. بدین ترتیب که با تغییر هموار ضریب، ماتریس‌های متراکم را به شکل تنکی درآورد که به سرعت قابل محاسبه باشد. راحتی و سادگی این آنالیز باعث ساختن تراشه‌هایی شده است که قادر به کدگذاری به نحوی بسیار کارا و فشرده‌سازی سیگنال‌ها و تصاویرند. آنالیز موجک امروزه کاربردهای فراوانی پیدا کرده است که از آن جمله می‌توان به کاربرد آن در تصویر برداری پزشکی (MRI) و سی تی اسکن، جداسازی بافت های مغزی از تصاویر تشدید مغناطیس، تشخیص خودکار خوشه‌های ریز دسته‌بندی کردن،

---

[۹] lit loud

[۱۰] Calderon

[۱۱] Zigmond

[۱۲] Multi Scale

تحلیل تصاویر طیفی تشدید مغناطیسی [۱۳] و عملکردهای تشدید مغناطیسی اشاره نمود.

۲.۱ فضای ضرب داخلی

تعریف ۱.۲.۱. برای بردارهای $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ و $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ در $\mathbb{R}^n$، ضرب داخلی اقلیدسی برابر است با:
$$\langle X, Y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

تعریف ۲.۲.۱. (فضای ضرب داخلی). یک ضرب داخلی روی یک فضای برداری مختلط V یک تابع $\langle .,. \rangle : V \times V \longrightarrow C$ می‌باشد که در خواص زیر صدق می‌کند:

۱- مثبت بودن: برای هر بردار ناصفر $v \in V$، $\langle v, v\rangle > 0$

۲- تقارن مزدوج: $\overline{\langle v, w\rangle} = \langle w, v\rangle$ ، $v, w \in V$

۳- همگنی: $\langle cv, w\rangle = c\langle w, v\rangle$ برای هر بردار v و w در Vو هر اسکالر $c \in C$

۴- جمع‌پذیری: $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ برای هر بردار $u, v, w \in V$

یک فضای برداری با یک ضرب داخلی، یک فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد،

۱- بردارهای X و Y متعامد گفته می‌شوند، اگر $\langle X, Y\rangle = 0$.

۲- گردایه بردارهای e_i، $i = 1, \cdots, N$، متعامدیکه [۱۴] گفته می‌شوند، اگر هر e_i طول واحد داشته باشد، $\|e_i\| = \sqrt{\langle e_i, e_i\rangle} = 1$ و برای $i \neq j$، e_i و e_j بر هم عمود باشند.

۳- دو زیر فضای V_1 و V_2 از V متعامد گفته می‌شوند، اگر هر بردار در V_1 بر هر یک از بردارهای V_2 عمود باشد.

۴- یک پایه متعامدیکه یا دستگاه متعامدیکه برای V، یک پایه از بردارهای V که متعامدیکه هستند، می‌باشد.

تعریف ۴.۲.۱. جمع مستقیم: اگر U یک فضای برداری و V زیر فضایی از U باشد، آنگاه زیر فضای W از U وجود دارد به طوری که

[۱۳] MR Spectrorscopy
[۱۴] Orthonormal

۱) هر عضو U را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از یک عضو V و یک عضو از W نوشت.

۲) $W \cap V = \{0\}$، که معادل با این است که ترکیب خطی فوق منحصر به فرد است.

جمع مستقیم فضاهای V و W را به صورت $U = V + W$ نمایش می‌دهند و اگر فضای W طوری انتخاب شود که $W \perp V$ آن را به صورت $U = V \oplus W$ نمایش می‌دهند.

۱.۳ آنالیز چند شفافی

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید V_j ، $j \in \mathbb{Z}$ دنباله‌ای از زیر فضاهای توابع در $L^2(\mathbb{R})$ باشد. گردایه فضاهای $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ یک آنالیز چند شفافی [۱۵] (MRA) با تابع مقیاس ϕ نامیده می‌شود، اگر شرایط زیر برقرار باشد:

۱-(تودرتو بودن) $V_j \subset V_{j+1}$

۲-(چگال بودن) $\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j} = L^2(\mathbb{R})$

۳-(تفکیک‌پذیری) $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$

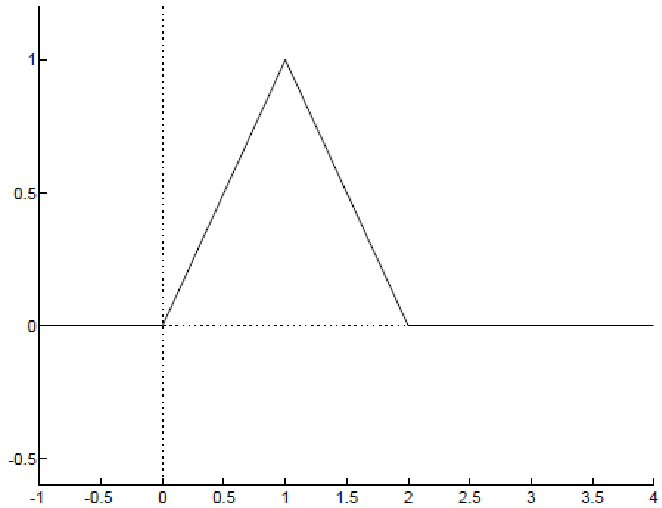
۴-(مقیاس) تابع $f(.)$ متعلق به فضای V_j است، اگر و فقط اگر تابع $f(2^{-j}.)$ عضو V_0 باشد.

۵-(پایه متعامد یکه) تابع ϕ به V_0 تعلق دارد و مجموعه‌ی $\{\phi(.-k), k \in \mathbb{Z}\}$ یک پایه متعامد یکه برای V_0 است.

V_jها را فضاهای تقریب می‌نامند. متناظر با یک دستگاه از فضاهای تقریب ممکن است چندین انتخاب از ϕ وجود داشته باشد. انتخاب‌های متفاوت برای ϕ ممکن است به آنالیز چند شفافی متفاوتی منجر شوند. گرچه همه‌ی انتقال‌های ϕ باید متعامد یکه باشند، اما کافی نیست بلکه باید ϕ چنان باشد که $\{\phi(.-k), k \in \mathbb{Z}\}$ یک پایه باشد. در این صورت می‌توان برای به‌دست آوردن یک تابع مقیاس جدید $\tilde{\phi}$ از ϕ استفاده کرد، به‌طوری که $\{\tilde{\phi}(.-k), k \in \mathbb{Z}\}$ یک پایه متعامد یکه باشد.

مثال ۲.۳.۱. (آنالیز چند شفافی هار). اسپلاین‌های خطی توابع پیوسته تکه‌ای هستند و تابع ناهموار شکل ۶.۱ نمونه‌ای از این توابع است. می‌توان برای اسپلاین‌های خطی آنالیز چند شفافی

[۱۵] Multiresolution Analysis



شکل ۱.۱: یک اسپلاین خطی

ساخت. فرض کنید V_j فضای تمام سیگنال‌های با انرژی متناهی f باشد که تکه‌ای خطی و پیوسته هستند و گوشه‌های احتمالی آن‌ها در نقاط دودویی $k/۲^j$، $k \in \mathbb{Z}$ ظاهر می‌شوند.

این فضاهای تقریب در شرایط ۴-۱ از تعریف آنالیز چند شفافی صدق می‌کنند. تابع مقیاس در این جا "تابع خمینه"

$$\varphi(x) = \begin{cases} x + ۱\ , & -۱ \leq x \leq ۰, \\ ۱ - x\ , & ۰ \leq x \leq ۱, \\ ۰\ , & |x| > ۱, \end{cases}$$

می‌باشد و مجموعه‌ی $\{\varphi(. - k); k \in \mathbb{Z}\}$ یک مجموعه‌ی نامتعامد است. روش‌هایی وجود دارند که با استفاده از آن‌ها می‌توان تابع مقیاس جدید ϕ را ساخت که یک پایه متعامد یکه را برای $V_۰$ تولید کند، بسازیم.

در ادامه چند قضیه مهم را از مرجع [۱۵] نقل می‌کنیم.

قضیه ۳.۳.۱. *فرض کنید $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ یک آنالیز چند تجزیه‌ای با تابع مقیاس ϕ باشد. در این صورت برای هر $j \in \mathbb{Z}$، مجموعه توابع $\{\phi_{j,k}(.) = ۲^{j/۲}\phi(۲^j. - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ یک پایه متعامد برای V_j است.*

قضیه ۴.۳.۱. *اگر $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ یک آنالیز چند شفافی با تابع مقیاس ϕ باشد، آن‌گاه رابطه‌ی مقیاس زیر برقرار است:*

$$\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k \phi(۲x - k), \quad \text{که} \quad p_k = ۲\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\overline{\phi(۲x-k)}dx.$$

به علاوه داریم:

$$\phi(۲^{j-۱}x - l) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{k-۲l}\phi(۲^j x - k) \tag{۱.۱}$$

یا به‌طور معادل

$$\phi_{j-۱,l} = ۲^{-۱/۲}\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{k-۲l}\phi_{j,k} \tag{۲.۱}$$

که $\phi_{j,k}(x) = ۲^{j/۲}\phi(۲^j x - k)$.

تذکر. رابطه‌ای که $\phi(x)$ و انتقال‌های $\phi(۲x)$ را به‌هم مرتبط می‌سازد به رابطه‌ی مقیاس یا دو مقیاسی معروف است. معمولا ϕ در حالتی‌که p_kها حقیقی باشند، حقیقی خواهد بود.

مثال ۵.۳.۱. مقادیر p_k برای دستگاه هار عبارت است از $p_۰ = p_۱ = ۱$، و $p_k = ۰$ ، $k \neq ۰$ و $k \neq ۱$.

قضیه زیر، اتحادهایی برای p_k را در بردارد که بسیار مهم هستند.

قضیه ۶.۳.۱. *اگر $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ یک آنالیز چند شفافی با تابع مقیاس ϕ باشد، آن‌گاه اتحادهای زیر برقرارند [۱۵]:*

۱) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{k-۲l}\bar{p}_k = ۲\delta_{l,۰}$

۲) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |p_k|^۲ = ۲$

۳) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k = ۲$

۴) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{۲k+۱} = ۱$ و $\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{۲k} = ۱$

۴.۱ موجک‌های متناظر و فضای موجکی

به خاطر بیاورید که V_j زیر مجموعه‌ی V_{j+1} است. برای به‌دست آوردن الگوریتم تفکیک در حالت کلی به تفکیک V_{j+1} به یک مجموع مستقیم متعامد V_j و متمم آن‌که با W_j نمایش می‌دهیم، نیاز داریم (همان‌گونه که در مورد دستگاه هار انجام دادیم). به‌علاوه نیاز به ساختن یک تابع ψ داریم که انتقال‌هایش فضای W_j را تولید کند(همان‌گونه که در مورد دستگاه هار انجام دادیم). زمانی‌که ϕ مشخص باشد برای ساختن تابع ψ مربوطه می‌توان از رابطه‌ی مقیاس استفاده کرد که W_j را تولید می‌کند. این کار را اکنون انجام می‌دهیم.

قضیه ۱.۴.۱. *فرض کنید $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ یک آنالیز چند شفافی با تابع مقیاس $\phi(x)$ باشد، (p_kها ضرایب در قضیه‌ی ۱.۳.۴ هستند). فرض کنید W_j توسط $\{\psi(۲^j. - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ تولید شده باشد، که*

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(-۱)^k p_{۱-k}\phi(۲x - k),$$

بنابراین $W_j \subset V_{j+۱}$ متمم متعامد V_j در $V_{j+۱}$ است. به‌علاوه

$$\{\psi_{j,k}(x) = ۲^{j/۲}\psi(۲^j x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

یک پایه‌ی متعامد یکه برای W_j است.

برهان. به مرجع [۱۵] مراجعه شود. □

برای تابع مقیاس هار $p_۰ = p_۱ = ۱$. قضیه‌ی ۱.۴.۱ بیان می‌کند که موجک هار به شکل $\psi(x) = \phi(۲x) - \phi(۲x - ۱)$ است، که با تعریف ψ در ۱.۲.۲ مطابقت دارد.

قضیه ۲.۴.۱. *فرض کنید $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ یک آنالیز چند شفافی با تابع مقیاس $\phi(x)$ و W_j متمم متعامد V_j در $V_{j+۱}$ باشد. پس*

$$L^۲(\mathbb{R}) = \cdots \oplus W_{-۱} \oplus W_۰ \oplus W_۱ \oplus \cdots .$$

به‌ویژه هر $f \in L^۲(\mathbb{R})$ می‌تواند به‌طور منحصر به‌فرد به‌صورت $\sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k$ با $w_k \in W_k$ بیان شود، که در آن w_kها دوبه‌دو متعامد هستند. به‌طور معادل مجموعه‌ی تمام موجک‌ها، $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$، یک پایه متعامد یکه برای $L^۲(\mathbb{R})$ است.

برهان. به مرجع [۱۵] مراجعه شود. □

۱.۵ فرمول‌های تفکیک و بازسازی

قضیه ۱.۵.۱. معادله‌ی پارسوال[۱۶] **:** *فرض کنید*

$$f(x) = a_{0} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \in L^{2}_{[-\pi,\pi]},$$

آنگاه

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{2}(x)dx = \frac{1}{2}a_{0}^{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{2} + b_n^{2}\right).$$

برهان. به مرجع [۱۵] مراجعه کنید. □

فرض کنید با یک سیگنال f سروکار داریم که قبلا در یکی از فضاهای تقریبی مانند V_j قرار گرفته است. می‌توان از دو پایه‌ی متعامد یکه‌ی اولیه برای نمایش f استفاده کرد. اولین آن‌ها پایه‌ی تابع مقیاس طبیعی برای V_j، $\{\phi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$، است که در قضیه‌ی ۱.۳.۳ تعریف شده است. بر حسب این پایه داریم

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,k}\rangle \phi_{j,k}. \tag{۱.۳}$$

البته تفکیک مجموع مستقیم $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$، و نیز ترکیب پایه‌های V_{j-1} و W_{j-1} یعنی $\{\phi_{j-1,k}\}_{k\in\mathbb{Z}} \bigcup \{\psi_{j-1,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ را می‌توان به کار برد، که در آن $\psi_{j,k}$ در قضیه‌ی ۱.۴.۱ تعریف شده است. تابع نسبت به این پایه‌ی متعامد یکه به صورت

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j-1,k}\rangle \phi_{j-1,k} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j-1,k}\rangle \psi_{j-1,k} \tag{۱.۴}$$

است. فرمول تفکیک با ضرایب نسبت به پایه‌ی اول (رابطه (۱.۳)) شروع می‌شود و با استفاده از آن‌ها، ضرایب را نسبت به پایه‌ی دوم محاسبه می‌کند. در فرمول بازسازی، بر عکس عمل می‌شود. فرمول تفکیک چنین است:

$$\text{تفکیک} : \begin{cases} \langle f, \phi_{j-1,l}\rangle = 2^{-1/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{p_{k-2l}} \langle f, \phi_{j-1,k}\rangle \\ \langle f, \psi_{j-1,l}\rangle = 2^{-1/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^{k} \overline{p_{1-k+2l}} \langle f, \phi_{j-1,k}\rangle. \end{cases} \tag{۱.۵}$$

[۱۶] Parseval equation

هر دو قسمت این فرمول با استفاده از قضیه ۱.۵.۱ به‌دست می‌آیند. برای به‌دست آوردن قسمت اول از بسط (۳.۱) برای f و رابطه‌ی مقیاس در (۲.۱) استفاده می‌کنیم. قسمت دوم نیز بسط (۳.۱) را نیاز دارد. یک کاربرد مهم فرمول تفکیک، توصیف بر حسب پایه‌ی دوم است.
از فرمول تفکیک (۵.۱) و خاصیت متعامدیکه بودن $\phi_{j,k}$ها داریم $\langle \phi_{j,k}, \phi_{j-1,l}\rangle = 2^{-1/2}\overline{p_{k-2l}}$ و $\langle \phi_{j,k}, \psi_{j-1,l}\rangle = 2^{-1/2}(-1)^k p_{1-k+2l}$. توجه کنید که عمل جمع روی کدام اندیس انجام می‌شود (در این مورد)، بسط

$$\phi_{j,k} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} 2^{-1/2}\overline{p_{k-2l}}\phi_{j-1,l} + \sum_{l\in\mathbb{Z}} 2^{-1/2} p_{1-k+2l}(-1)^k \psi_{j-1,l} \qquad (6.1)$$

را به‌دست می‌آوریم که نوعی "معکوس" رابطه‌ی مقیاس است.
اگر معادله‌ی پارسوال را برای (۶.۱) و (۴.۱) به‌کار بریم فرمول بازسازی

$$\text{بازسازی :}\begin{cases} \langle f, \phi_{j,l}\rangle = 2^{-1/2}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\overline{p_{k-2l}}\langle f, \phi_{j-1,l}\rangle \\ \qquad + 2^{-1/2}\sum_{l\in\mathbb{Z}}(-1)^k\overline{p_{1-k+2l}}\langle f, \psi_{j-1,l}\rangle \end{cases} \qquad (7.1)$$

به‌دست می‌آید. فرمول‌های بالا همه شامل پایه‌های متعامدیکه هستند. به دلایل مختلف، مناسب‌تر این است که از حالات متعامد استفاده کنیم، یعنی از $\{\phi(2^j x - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ به‌جای $\{\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ و $\{\psi(2^j x - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ به‌جای $\{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$. برای مثال بسط $f \in V_j$ در (۳.۱) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{j/2}\langle f, \phi_{j,k}\rangle 2^{-j/2}\phi_{j,k}(x)$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^j \phi(2^j x - k).$$

به‌طور مشابه رابطه‌ی (۴.۱) را می‌توان به‌صورت

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^{j-1}\phi(2^{j-1}x - k) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k^{j-1}\psi(2^{j-1}x - k),$$

بازنویسی کرد که در آن $a_k^{j-1} = 2^{(j-1)/2}\langle f, \phi_{j-1,k}\rangle$ و $b_k^{j-1} = 2^{(j-1)/2}\langle f, \psi_{j-1,k}\rangle$. a_k^{j-1}ها را ضرایب تقریب و b_k^{j-1}ها را ضرایب جزئی می‌نامند. فرمول‌های بازسازی و تفکیک را می‌توان