# دانشگاه تبریز

دانشکده علـوم ریاضی

گروه آمار

**پایان‌نامه**

**برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی**

**آمار، گرایش آمار ریاضی**

**عنوان**

# برآورد فازی پارامترها در مدل‌های آماری

**استاد راهنما**

**دکتر رامین ایمانی**

**استاد مشاور**

**دکتر غلامرضا حجتی**

**پژوهشگر**

**نفیسه وفایی**

**شهریور ۱۳۹۱**

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به:

فرشتگان پاک آسمان زندگی ام

پدر و مادر عزیزم

اسوه های صبر و تحمل و آینه های عاطفه و پارسایی

آنان که وجودشان برایم همه مهر بوده

و تمام وجودم همواره سرشار از عشق برایشان.

بنام خدا

و لَمْ یَشْکُر الْمَخلوق لَمْ یَشْکُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.
در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **رامین ایمانی** صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
از جناب آقای دکتر **غلامرضا حجتی** که زحمت مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند، تشکر می‌نمایم. از جناب آقای دکتر **هژیر حومئی** که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم.

در پایان از اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

نفیسه وفایی
شهریور ۱۳۹۱

| |
|---|
| نام خانوادگی دانشجو: وفایی نام: نفیسه |
| عنوان: برآورد فازی پارامترها در مدل‌های آماری |
| استاد راهنما : دکتر رامین ایمانی<br>استاد مشاور : دکتر غلامرضا حجتی |
| مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: آمار گرایش: آمار ریاضی دانشگاه تبریز<br>دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ۱۳۹۱ تعداد صفحات: ۸۳ |
| کلید واژه‌ها: برآورد نقطه‌ای، برآورد بازه‌ای، بازه‌های اطمینان، برآورد فازی، مجموعه‌های فازی، منطق فازی |

## چکیده


نظریه احتمال و منطق فازی دو مؤلفه اساسی در یک سری از روش‌هایی است که به مسائل عدم قطعیت و عدم دقت می‌پردازند و نقش مهمی را در آن‌ها ایفا می کنند. یکی از مسائل بسیار مهم در استنباط آماری مسئله برآورد می‌باشد. این مسئله تاکنون به دو طریق؛ برآورد نقطه‌ای و برآورد بازه‌ای مطرح شده است. به زبان ساده هدف برآورد، تخمین پارامتر نامعلوم تابع چگالی است که مقادیر مشاهدات نمونه از آن به دست آمده‌اند. باکلی در [۱۲] روشی را برای برآورد فازی بر اساس داده‌های قطعی(معمولی) پیشنهاد کرده است. به عبارت دیگر، او یک روش دیگر برای برآورد پارامترها در مدل‌های آماری با عنوان «**برآورد فازی**» معرفی کرده است. در این پایان‌نامه با استفاده از یک مجموعه از بازه‌های اطمینان، این روش را برای ساختن یک عدد فازی مثلثی شکل به عنوان یک برآوردگر برای پارامترهای نامعلوم در مدل‌های آماری بسط می دهیم. برای این روش بررسی شده یک تابع عضویت صریح و منحصربفرد از این چنین برآوردگرهای فازی را به دست می‌آوریم. از روش ارائه شده برای به دست آوردن تابع عضویت صریح برآوردگر فازی پارامترهای توزیع‌های نرمال، نمائی و پواسن استفاده شده است.

# فهرست مطالب

# فهرست اشکال

# پیشگفتار

نظریه احتمال و منطق فازی دو مؤلفه اساسی در یک سری از روش‌هایی است که به مسائل عدم قطعیت و عدم دقت می‌پردازند. منطق فازی به عنوان یک شاخه جدید از ریاضیات برای صورت‌بندی و تجزیه و تحلیل مفاهیم نادقیق کاربرد دارد. در کنار ارتباط‌هایی که نظریه مجموعه‌های فازی با سایر شاخه‌های علوم پیدا کرده است، ارتباط آن با احتمال و آمار شایان توجه است. منظور از آمار فازی، استفاده از روش‌های فازی در مباحث گوناگون علم آمار است. در مسئله برآورد گاهی مشاهدات مربوط به یک متغیر تصادفی نادقیق هستند و یا به صورت نادقیق گزارش می‌شوند. در این موارد می‌توان داده‌های نادقیق را با مجموعه‌های فازی صورت‌بندی کرد و آن‌گاه از آن‌ها در برآورد استفاده کرد.

پایان‌نامه حاضر شامل چهار فصل می‌باشد که در آن به طور مختصر و مفید به معرفی مجموعه‌های فازی و منطق فازی پرداخته و یک کاربرد آن در علم آمار و شاخه استنباط آماری به صورت برآورد فازی بیان شده است. در فصل اول یک تاریخچه مختصری از منطق فازی آورده شده است. فصل دوم شامل مطالبی درباره تعاریف و مفاهیم کلی منطق فازی است. در واقع در این بخش خواننده با مفاهیمی همچون مجموعه‌های فازی، تابع عضویت، $\alpha$ -برش، اعداد فازی و عملگرهای حسابی مربوط به این اعداد آشنا می‌شود. از خواننده انتظار می‌رود تا در پایان این فصل بتواند بین مجموعه‌های فازی و قطعی تمییز قائل شده و هدف از کاربرد مجموعه‌های فازی در ریاضیات را بداند. در فصل سوم، یک نوع دیگری از برآورد پارامتر مجهول تابع چگالی به نام «**برآورد فازی**» را از [۱۲] معرفی می‌کنیم و در فصل چهارم که می‌توان از آن به عنوان فصل اصلی این پژوهش نام برد یک تعمیم برای روش فوق انجام داده و مثال‌هایی از توزیع‌های نرمال، نمائی و پواسن بیان می‌کنیم.

این پژوهش بر اساس مقاله [۱۳] و [۱۴] انجام شده است و امیدواریم که بتواند مفید واقع شود.

# پیشینه پژوهش

نظریه مجموعه‌های فازی و نظریه آمار هر دو برای مطالعه الگوها و سیستم‌های شامل عدم قطعیت آماری وضع شده‌اند. نظریه آمار برای مطالعه الگوهای مبتنی بر عدم قطعیت ناشی از تصادف (عدم قطعیت احتمالی) و نظریه مجموعه‌های فازی بر عدم قطعیت ناشی از ابهام (عدم قطعیت امکانی) مناسب هستند. این دو نظریه نه متناقض یکدیگرند و نه یکی دیگری را شامل می‌شود. گر چه طبیعت و کاربرد هر یک از این دو نظریه متفاوت از دیگری است، اما این باعث نمی‌شود که نتوان در یک مسئله از هر دو نظریه استفاده کرد. در واقع می‌توان روش‌های فازی را با هدف توصیف و تحلیل بهتر مسائل دنیای واقعی، با هم تلفیق کرد. نظریه مجموعه‌های فازی در سال ۱۹۶۵ معرفی شد، اما مطالعات و تحقیقات در آمار و احتمال فازی در گسترش و تعمیق روش‌های آماری مورد توجه روزافزون بوده است.

کتاب‌های «**داده‌های مبهم**» [۱۵] اثر کروس و میر[۱] و «**روش های آماری برای داده‌های نادقیق**» [۱۶] اثر ورتیل[۲] از جمله کتاب‌های مهم در زمینه آمار و احتمال فازی هستند که می‌توانند مراجع خوبی برای درک بهتر آمار و احتمال فازی باشند. همان گونه که بیان شد منظور از آمار فازی استفاده از روش‌های فازی در مباحث گوناگون علم آمار است. در یک تقسیم بندی کلی این کار تاکنون به صورت‌های زیر انجام شده است:

۱. تعمیم مدل‌های کلاسیک به مدل‌های فازی؛ برای نمونه می‌توان به مدل‌هایی اشاره کرد که در آن‌ها مشاهدات نادقیق مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند. در این موارد چنانچه داده‌های نادقیق به داده‌های دقیق تبدیل شوند، آنگاه مدل اصلی به یک مدل معمولی آماری تقلیل می‌یابد.

۲. استفاده از روش‌های فازی به جای روش‌های آماری؛ برای نمونه می‌توان به مواردی اشاره کرد که احساس می شود عدم اطمینان حاکم بر مدل، از نوع امکانی است. مثلا در یک مدل

[۱] Kruse and Meyer

[۲] Viertl

رگرسیونی ممکن است خطای مدل به عدم اطمینان ناشی از مبهم بودن و منعطف بودن ارتباط بین متغیرهای سیستم باز گردد، و نه به عدم اطمینان منسوب به خطای تصادفی. در این موارد می توان از مدل‌های رگرسیونی امکانی به جای مدل‌های رگرسیونی معمولی استفاده کرد.

۳. به کارگیری هم زمان روش‌های فازی و روش‌های آماری در مدل‌هایی که هر دو نوع عدم قطعیت (احتمالی و امکانی) در آن‌ها وجود دارند؛ مثلا در مسئله برآورد یک پارمتر مجهول از یک توزیع احتمال ممکن است با مشاهدات نادقیق نمونه مواجه شویم. در این حالت می‌توان مشاهدات نادقیق را با مجموعه‌های فازی صورت‌بندی و سپس از آن‌ها در استباط درباره پارامتر مجهول استفاده کرد.

از بین سه رده‌ای که در بالا به آن‌ها اشاره شد، رده اول مهم‌ترین و گسترده‌ترین حالات را در بر می‌گیرد. مسئله برآورد فازی نقطه‌ای در منابع [۱۷]، [۱۸]، [۱۹] و [۲۰] نیز بررسی شده است. برآورد فازی بازه‌ای در منابع [۲۱]، [۲۲] و [۲۳] مورد بررسی قرار گرفته و همچنین کرال وگیل[۳] در [۱۷] برآورد فازی نقطه‌ای با استفاده از اصل ماکزیمم درستنمائی[۴] را ارائه کرده‌اند.

---

[۳] Corral and Gil

[۴] maximum likelihood principle

**تمام آثار طبیعت نتایج ریاضی چند قانون تفسیر ناپذیرند.**

**لاپلاس**

# فصل ۱

# مقدمه‌ای برنظریه مجموعه‌های فازی

«جهان خاکستری است اما علم سیاه و سفید است. ما درباره صفرها و یک‌ها صحبت می‌کنیم اما حقیقت چیزی بین آن‌هاست. جملات و بیان‌های منطق صوری و برنامه‌ریزی رایانه‌ای همگی به شکل درست یا نادرست هستند. اما بیان‌های مربوط به جهان واقعی متفاوتند، هر نوع بیان واقعیت، یکسره درست یا نادرست نیست حقیقت آن‌ها چیزی بین درستی کامل و نادرستی کامل است. چیزی بین یک و صفر، یعنی مفهومی چند ارزشی و یا خاکستری. حال فازی چیزی بین سیاه و سفید، یعنی خاکستری است.»

بارت کاسکو

## ۱.۱ مقدمه

دانش مورد نیاز برای بسیاری از مسائل مورد مطالعه به دو صورت متمایز عینی و شخصی ظاهر می‌شود، که دانش عینی به مدل‌ها، معادلات و فرمول‌های ریاضی گفته می‌شود که برای حل مسائل معمولی فیزیک، شیمی و مهندسی به‌کار می‌روند، در حالی که دانش شخصی به دانشی گویند که مبتنی بر دانستنی‌هایی است که تا حدودی قابل توصیف و بیان بوده ولی ریاضیات سنتی قادر به کمی سازی آن نیست.

به عبارتی دیگر متغیرها در طبیعت یا در محاسبات بر دو نوع می‌باشند؛ ارزش‌های کمی که می‌توان با یک عدد معین و ارزش‌های کیفی که بر اساس یک ویژگی بیان می‌شوند که این دو ارزش قابل تبدیل به یکدیگرند. از آن‌جایی که در عمل هر دو نوع دانش مورد نیاز است، بنابراین به ابزاری

نیاز داریم که بتواند آن‌ها را به صورتی منظم، منطقی، و ریاضیاتی با یکدیگر هماهنگ کند. منطق فازی[۱] نه تنها این ابزار را در اختیار ما قرار می‌دهد، بلکه وسیله‌ای برای صورت‌بندی و تجزیه و تحلیل مفاهیمی نادقیق[۲] و دارای عدم قطعیت[۳] است.

در بین تغییرات مختلف در تمامی علوم و ریاضیات در قرن اخیر یک تغییری که مورد توجه قرار گرفت، مفهوم عدم قطعیت است. در علم این تغییر به وسیله یک تحول تدریجی از دیدگاه سنتی به دیدگاه جدید ثابت شده است، به طوری که این دیدگاه قدیمی بر این اصرار دارد که عدم قطعیت در علم مطلوب نیست و باید تلاش شود به وسیله تمامی معانی ممکن از آن دوری شود. مطابق با دیدگاه قدیمی، علم باید برای قطعیت در تمامی ابعادش (دقت[۴]، ویژگی[۵]، تیزی[۶]، سازگاری [۷]و...) تلاش کند، یعنی عدم قطعیت (عدم دقت[۸]، نامشخصی[۹]، ابهام[۱۰]، ناسازگاری[۱۱] و ...)غیر علمی در نظر گرفته می‌شود. اما با توجه به دیدگاه مدرن، عدم قطعیت اجتناب‌ناپذیر است و اساسا به‌صورت علمی بررسی می‌شود، و آن نه تنها یک آفت نیست بلکه در حقیقت یک منفعت در علم به حساب می‌آید.

منطق فازی اولین بار توسط پروفسور لطفعلی عسگرزاده معروف به زاده، در پی تنظیم نظریه مجموعه‌های فازی درسال ۱۹۶۵ در صحنه محاسبات نو ظاهر شد. در این مقاله پروفسور زاده نظریه‌ای را معرفی کرد که در آن اجزا مجموعه‌هایی هستند با کران‌های نادقیق. اهمیت مقاله زاده در این بود که نظریه احتمال را به عنوان تنها عامل برای عدم قطعیت به چالش واداشت. منطق فازی از جمله منطق‌های چند ارزشی بوده و بر نظریه مجموعه‌های فازی[۱۲] تکیه دارد.

مجموعه‌های فازی خود از تعمیم و گسترش مجموعه‌های قطعی[۱۳] به صورتی طبیعی حاصل

[۱] fuzzy logic

[۲] imprecise

[۳] uncertainty

[۴] precision

[۵] specificity

[۶] sharpness

[۷] consistency

[۸] imprecision

[۹] nonspecificity

[۱۰] vagueness

[۱۱] inconsistency

[۱۳] crisp sets

می‌شوند به عنوان مثال زمانی‌که $A$ یک مجموعه فازی باشد و $x$ یک جزء مناسب با آن، عبارت «$x$ یک عضو از $A$ می‌باشد» لزوما بر اساس منطق دو ارزشی درست یا نادرست نیست بلکه می‌توان حالات بسیار متفاوتی را در نظر گرفت. مجموعه‌های قطعی در واقع همان مجموعه‌های عادی و معمولی هستند که در ابتدای نظریه کلاسیک مجموعه‌ها معرفی می‌شوند که در آن هر مجموعه معمولی با یک یا چند ویژگی دقیق و معین مشخص می‌شود. افزودن صفت قطعی، وجه تمایزی است بین مجموعه‌های فازی و معمولی که به کمک آن یکی از مفاهیم ابتکاری در منطق فازی، موسوم به تابع عضویت[۱۴] به آسانی در ذهن به وجود می‌آید.

به طور خلاصه سه منطق کلاسیک، صوری و فازی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

**منطق کلاسیک**[۱۵]: منطق کلاسیک که نخستین بار توسط ارسطو معرفی شد، بر این عقیده است که یک عبارت یا درست است یا نادرست.

**منطق صوری**[۱۶]: ارسطو کشف کرده بود که درستی یا نادرستی استدلال‌هایی که ما بر اساس جمله‌هایی که بیان می‌کنیم به فرم و قالب جمله‌ای که می‌گوییم بستگی دارد، نه به محتوای آن. به این دلیل است که این منطق که به ظاهر جمله توجه می کند منطق صوری نامیده می‌شود. به عنوان مثال؛ همه الف‌ها ب هستند، ج یک الف است بنابراین ج یک ب می‌باشد.

**منطق فازی**[۱۷]: پروفسور زاده نخستین نظریات منطق جدید خود را با نام منطق فازی ارائه داد. در منطق فازی برای یک جمله علاوه بر درست و نادرست، میلیون‌ها حالت دیگر نیز وجود دارد.

هر عضو در هر مجموعه قطعی دارای درجه عضویت یک یا صفر است، یعنی به صورت قطعی می‌توان گفت اگر آن عضو آن ویژگی مورد نظر را داشته باشد، متعلق به مجموعه مورد بررسی است و در غیر این صورت خیر. در حالی که در مجموعه‌های فازی هر عضو، دارای درجه عضویتی از صفر تا یک می‌باشد و به طور قطع نمی‌توان گفت یک عضو متعلق به مجموعه مورد بررسی هست یا خیر و در صورت متعلق بودن، با چه شدتی، عضو مجموعه می‌باشد.

در منطق فازی به جای متغیرهای عددی از **متغیرهای زبانی**[۱۸] استفاده می‌شود. متغیرهای زبانی

[۱۴] membership function

[۱۵] classic logic

[۱۶] formal logic

[۱۷] fuzzy logic

[۱۸] linguistic terms

به متغیرهایی گفته می‌شود که مقادیر مورد قبول برای آن‌ها به جای اعداد، کلمات و جملات زبان‌های انسانی یا ماشینی هستند. متغیرهای زبانی بر اساس ارزش‌های زبانی که در مجموعه عبارات (کلمات یا اصطلاحات) قرار دارند. عبارات زبانی صفاتی برای متغیرهای زبانی هستند. برای مثال؛ متغیر زبانی «سن» بسته به تقسیمات مورد نظر شخصی و شرایط می‌تواند عباراتی از قبیل «نوجوان»، «جوان»، «میان‌سال»، «سالمند» باشد.

مجموعه عبارات فازی سن:

{جوان، نه چندان جوان، خیلی‌جوان، میان‌سال، نه چندان میان‌سال، پیر، نه پیر، خیلی‌پیر، کم وبیش پیر}

یا در مثالی دیگر، فشار خون را می‌توان متغیری زبانی در نظر گرفت، خصوصیت‌هایی از قبیل«پایین»، «بالا»، «ضعیف»، «متوسط»، «قوی» را می‌تواند در خود جای دهد.

صفت عدم قطعیت [۱۹] به صور گوناگون در همه زمینه‌ها و پدیده‌ها صرف نظر از روش‌شناسی مورد کاربرد جهت مطالعه، طراحی و کنترل پدیدار می‌شود. مفاهیم نادقیق بسیاری در پیرامون ما وجود دارند که آن‌ها را به صورت روزمره در قالب عبارت‌های مختلفی بیان می‌کنیم. به عنوان مثال «هوا خوب است» هیچ کمیتی برای خوب بودن هوا مطرح نمی‌کند تا آن را به طور دقیق اندازه‌گیری کنیم، بلکه این یک حس کیفی است. در واقع مغز انسان با در نظر گرفتن عوامل گوناگون و بر پایه تفکر استنتاجی جملات را تعریف و ارزش گذاری می‌کند که الگوبندی آن‌ها به زبان فرمول‌های ریاضی، کاری بسیار پیچیده خواهد بود.

منطق فازی فناوری جدیدی است که شیوه‌هایی که برای طراحی و مدل سازی یک سیستم نیازمند ریاضیات پیچیده و پیشرفته است را با استفاده از مقادیر زبانی و دانش فرد خبره جایگزین می‌سازد. هر چند کلمات و مفاهیمی همچون؛ گرم، سرد، بلند، کوتاه، پیر، جوان و... به عدد خاص و دقیقی اشاره ندارند، اما ذهن انسان با سرعت و با انعطاف پذیری شگفت آوری همه را می‌فهمد و در تصمیمات و نتیجه گیری‌های خود به کار می‌گیرد.

از دیر باز تنها رهیافت تکامل یافته ریاضی برای حل مسائل در شرایط عدم قطعیت، نظریه احتمال بوده است. براساس باور عمومی در بسیاری از محیط‌های تصمیم، داده‌های موجود جنبه آماری دارند و بنابراین با روش‌های نظریه احتمال می‌توان بر عدم قطعیت ناشی از جنبه‌های تصادفی فائق آمد. این نظریه در تحلیل نوع خاصی از عدم اطمینان کارایی دارد در صورتی‌که محدودیت‌های این نظریه

[۱۹] uncertainty

روز به روز بیشتر شناخته می‌شود. نظریه احتمال تنها در موقعیت‌هایی از عدم اطمینان کاربرد دارد که نامطمئنی شرایط، ناشی از وجوه تصادفی پیشامدهای یک سیستم و یا فرآیند بوده و فقدان روند در تغییرات و یا پیچیدگی و گستردگی عوامل تاثیرگذار به خوبی قابل شناسائی و برآیند این تاثیر به صورت مجزا قابل بررسی نباشد. رویکرد تصمیم‌گیران در به کاربردن نظریه احتمال، دستیابی به الگوریتمی جهت پیش‌بینی تغییرات رفتار جامعه آماری بر اساس شاخص‌هایی است که از تحلیل نمونه‌های جامعه به دست می‌آیند. در بسیاری از موقعیت‌ها، عدم اطلاع کامل و معتبر ما از یک فرآیند یا سیستم، صرفا به دلیل وجوه تصادفی حاکم بر آن‌ها نیست، بلکه ممکن است به این دلیل باشد که ما با اطلاعاتی ناکافی، مبهم، نادقیق و... سروکار داریم. حتی در موقعیت‌هایی که استنتاج قطعی ما از داده‌های موجود ، نشان‌دهنده وجود رفتارهای غیر منطقی باشد، ما با نوعی ابهام در تحلیل شرایط و پیشامدهای موجود مواجه خواهیم بود. بنابراین، این عدم کفایت، انگیزه‌ای شد برای ارزیابی نقش نظریه مجموعه‌های فازی در ساختار پایه‌های نظریه‌های علمی و کاربرد آن‌ها.
یک مدل آماری را می‌توان با استفاده از نظریه مجموعه‌های فازی از چهار جنبه تعمیم داد:

۱. متغیرهای تصادفی مدل را به صورت متغیرهای تصادفی فازی در نظر گرفت.

۲. متغیرها به صورت معمولی فرض شوند، اما مشاهدات مربوط به آن‌ها مشاهدات نادقیق باشند.

۳. متغیرها و مشاهدات مربوط به آن‌ها معمولی باشند اما پارامترهای مدل فازی فرض شوند.

۴. متغیرها و مشاهدات مربوط به آن‌ها و پارامترهای مدل اصلی همگی معمولی باشند اما متغیرها یا فرض‌ها یا توابع مرتبط با مدل (مانند تابع زیان، تابع تصمیم ، فرض مورد آزمون و...) منعطف و نادقیق باشند.

کارایی روش‌های فازی در علم آمار باعث به وجود آمدن بحث بین موافقین و مخالفین استفاده از نظریه مجموعه‌های فازی شده است و به نظر می‌رسد که با گسترش استفاده از نظریه مجموعه‌های فازی در شاخه‌های گوناگون آمار این مناقشات نیز گسترش یابد. گر چه بعضی از مقاومت‌ها ناشی از عدم درک صحیح ادعاها و قابلیت‌های نظریه مجموعه‌های فازی هستند، اما این نکته را هم باید به خاطر داشت که اصولا یک نظریه هنگامی تقویت و تایید می‌شود که در برابر مقاومت‌ها، محک‌ها، و آزمون‌های جدی قرار گرفته و از این آزمون‌ها سربلند بیرون آید.

**کتاب بزرگ طبیعت را با علائم ریاضی نگاشته اند.**

**گالیله**

# فصل ۲

# تعاریف و مفاهیم فازی

«منطق کلاسیک شبیه شخصی است که با یک لباس رسمی مشکی، بلوز سفید آهاردار، کروات مشکی، کفش‌های براق و... به یک مهمانی رسمی آمده است و منطق فازی تا اندازه‌ای شبیه فردی است که با لباس غیر رسمی، شلوار جین، تی‌شرت و کفش‌های پارچه‌ای آمده‌است. این لباس را در گذشته نمی‌پذیرفتند، اما امروز جور دیگری است. »

زاده

## ۱.۲ مقدمه

بیشتر مفاهیمی که در زندگی روزمره به کار می‌بریم و بر اساس آن‌ها استدلال انجام می‌دهیم و تصمیم‌گیری می‌کنیم، مفاهیمی نادقیق بوده و مجموعه‌هایی با کران‌های تقریبی می‌باشند. به عنوان مثال لامپ‌های با طول عمر زیاد، شوری خاک حدوداً ۱۲/۴، ضریب هوشی پایین، مسافت‌های طولانی، نرخ تورم بالا، مقاومت کششی زیاد، تاثیر کم دارو، فشار خون نامنظم، ویا عبارت‌هایی مانند معمولا، تقریبا، اغلب، بعضی مواقع و... همگی غیر صریح می‌باشند. نظریه فازی بیشتر به موضوعاتی در زندگی می‌پردازد که در رابطه با درجه می‌باشند. یک عکس سیاه و سفید مطلقا سیاه و سفید نیست، بلکه سطوح خیلی زیادی از سایه‌های خاکستری در آن وجود دارد که می‌توان در یک عکس معمولی مشاهده کرد. مهندسان و دانشمندان کامپیوتر از مدت‌ها قبل این حقیقت را پذیرفته‌اند. به عنوان مثال یک پیکسل[۱] می‌تواند مقادیری از درجات روشنائی را از ۰ تا ۲۵۵ داشته باشد. مقدار صفر مربوط

[۱] pixel

به رنگ سیاه و مقدار ۲۵۵ مرتبط با سفید می‌شود و هر عدد دیگری مابین صفر و ۲۵۵ مرتبط با یک سطح خاکستری مجزا می‌باشد.

ابتدا برای تمییز قائل شدن بین مجموعه‌های فازی و مجموعه‌های قطعی یک تعریف کلی و مختصر از مجموعه‌های قطعی را بیان می‌کنیم.

سه روش برای تعریف یک مجموعه قطعی[۲] از یک مجموعه مرجع[۳] وجود دارد:

۱. با استفاده از نامگذاری تمامی اعضای مجموعه که معمولا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$A = \{a_1, a_2 \cdots, a_n\}.$$

۲. با استفاده از تعریف یک ویژگی برای تمامی اعضای آن مجموعه که معمولا به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$A = \{x \quad | p(x)\}.$$

که در آن $p(x)$ نشان‌دهنده این است که $x$ دارای خاصیت $p$ می‌باشد.

۳. با استفاده ازیک تابع به نام تابع نشانگر[۴] که به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}.$$

یعنی تابع نشانگر نگاشتی است، از مجموعه مرجع $\chi$ به مجموعه دو عضوی $\{0,1\}$.

در این پایان‌نامه فرض می‌کنیم که خواننده با خواص پایه‌ای عملگرهای مجموعه‌های قطعی آشنایی دارد، لذا از بیان خواص آن خودداری می‌کنیم.

## ۲.۲ مجموعه‌های فازی

هم آن طوری که در بخش قبل گفته شد، تابع نشانگر یک مجموعه قطعی نشان دهنده یک مقدار صفر یا یک برای هر عضو از مجموعه مرجع می‌باشد که به این طریق می‌توان عضوها یا غیر عضوها

[۲] crisp sets

[۳] universal set

[۴] indicator function

را در یک مجموعه معمولی تشخیص داد. این تابع می‌تواند طوری تعمیم یابد که مقادیر وضع شده برای عناصر مجموعه مرجع درون یک محدوده ویژه‌ای قرار گیرند و نشان دهنده درجه عضویت این عناصر در مجموعه مورد بررسی باشند. مقادیر بزرگتر نشان‌دهنده درجه بالاتری از عضویت خواهند. بود یک چنین تابعی را تابع عضویت نامیده و مجموعه فازی [۵] بر اساس آن تعریف می‌شود. به طور رایج حدود مقادیر تابع عضویت را بازه واحد $[۰, ۱]$ در نظر می‌گیرند. در این حالت هر تابع عضویت اعضای یک مجموعه مانند $\chi$ را (که معمولا یک مجموعه قطعی در نظر گرفته می‌شود) را به اعداد حقیقی در بازه $[۰, ۱]$ می‌نگارد. دو روش رایج برای نشان دادن توابع عضویت به صورت زیر است:

$$\mu_{\bar{A}} : \chi \longrightarrow [۰, ۱],$$

و یا

$$\bar{A} : \chi \longrightarrow [۰, ۱].$$

در حالت اول $\bar{A}$ را مجموعه فازی و $\mu_{\bar{A}}$ تابع عضویت آن را نشان می‌دهد، در حالی که در تعریف دوم $\bar{A}$ هم به مجموعه فازی و هم به تابع عضویت اشاره دارد. در حالت دوم، با وجود عدم تفاوت در شکل ظاهری، هیچ ابهامی وجود نخواهد داشت.

در این پایان‌نامه از تعریف دوم استفاده می‌شود به طوری که $\bar{A}$ نشان‌دهنده مجموعه فازی و $\bar{A}(x)$ نشان‌دهنده مقدار تابع عضویت می‌باشد.

### ۱.۲.۲ مجموعه فازی

**تعریف ۱.۲.۲.** فرض کنید $\chi$ نشان‌دهنده فضای اشیاء باشد، در این صورت مجموعه فازی $\bar{A}$ در $\chi$ مجموعه‌ای از جفت‌های مرتب شده به صورت زیر است:

$$\bar{A} = \{(x, \bar{A}(x)) \quad | x \in \chi\},$$

که در آن $\bar{A}(x)$ درجه عضویت $x$ در مجموعه فازی $\bar{A}$ است. هر مجموعه فازی منحصرا توسط تابع عضویت نشان داده می‌شود.

هرگاه $\bar{A}(x_۱) = ۰$، گوییم $x_۱$ به $\bar{A}$ تعلق ندارد و هرگاه $\bar{A}(x_۲) = ۱$ گوییم $x_۲$ به $\bar{A}$ متعلق است و هرگاه $\bar{A}(x_۳) = ۰/۶$ گوییم شدت عضویت $x_۳$ در $\bar{A}$، ۰/۶ می‌باشد. زمانی که $\bar{A}(x)$ همواره برابر

[۵] fuzzy set