



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار گرایش آمار ریاضی

**مطالعه‌ی بر خواص طول عمر سیستم‌های  $k$  از  $n$  متوالی**

استاد راهنما:

دکتر مجید اسدی

پژوهشگر:

مریم اثنی عشری

شهریور ماه ۱۳۸۹

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات،  
ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق  
موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه  
اصفهان است.



دانشگاه اصفهان  
دانشکده علوم  
گروه آمار

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار گرایش آمار ریاضی

خانم مریم اثنی عشری

تحت عنوان

مطالعه‌ی ای بر خواص طول عمر سیستم های  $k$  از  $n$  متوالی

در تاریخ ۸۹/۶/۳۱ توسط هیأت داوران زیر بررسی با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

امضاء  
امضاء  
امضاء

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر مجید اسدی با مرتبه‌ی علمی استاد

۲- استاد داور داخل گروه دکتر محمد حسین علامت ساز با مرتبه‌ی علمی استاد

۳- استاد داور خارج از گروه دکتر محمد حسین پورسعید با مرتبه‌ی علمی استادیار

امضای مدیر گروه

ره پویان راه دانش هر اندازه پیش روند و هر دری از علوم به روی آنها گشوده شود، باز همان نوآموزان مکتب استادان هستند که بی فروغ نور علم ایشان در بی راهه‌ها سرگردان بودند.

به مصداق سخن شریف « **من لم يشكر المخلوق لم يشكر الخالق** » بر خود لازم می‌دانم مراتب سپاس و امتنان خود را از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر مجید اسدی که در کلیه مراحل تدوین این پایان نامه مرا یاری نمودند، ابراز دارم. همچنین از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر محمد حسین علامت ساز و جناب آقای دکتر محمد حسین پور سعید که داوری این رساله را پذیرفته و با پیشنهادات خود موجب ارتقای آن گردیدند، صمیمانه تشکر می‌نمایم. از همسر عزیزم که در نگارش این پایان نامه از صمیم قلب تشکر می‌کنم و آرزوی موفقیت و کامیابی آنها را دارم.

تقدیم به پدر عزیز و مادر مهربانم

به پاس محبت‌های بی‌دریغشان

## چکیده:

در سال های اخیر سیستم های متوالی در شاخه های مختلف علوم، مانند علوم مهندسی، جایگاه ویژه ای یافته اند. به همین دلیل قابلیت اعتماد آنها توسط محققان زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است. مطالعه و بررسی این سیستم ها منجر به شناخت بهتر سیستم های اولیه، از جمله سیستم سری می شود. سیستم های  $k$  از  $n$  متوالی از یک نقطه نظر به دو کلاس سیستم های  $k$  از  $n$  شکست متوالی و  $k$  از  $n$  پیروزی متوالی تقسیم می شوند. سیستم  $k$  از  $n$  شکست متوالی ( $k$  از  $n$  پیروزی متوالی) شامل یک دنباله ی مرتب شده از  $n$  مؤلفه است به طوری که سیستم از کار می افتد (کار می کند)، اگر و فقط اگر حداقل  $k$  واحد متوالی آن شکست بخورند (سالم باشند). این سیستم ها بر حسب اینکه اجزا روی یک خط مرتب شده باشند و یا به طور دایره ای قرار گرفته باشند، به ترتیب خطی یا دایره ای نامیده می شوند. این پایان نامه پس از ارائه مقدمات و مفاهیم اولیه سیستم های  $k$  از  $n$  متوالی خطی ایستا (سیستمی که در آن اجزا فقط دو وضعیت دارند) را معرفی و خلاصه ای از ویژگی های آنها را بیان می کند. در ادامه سیستم های  $k$  از  $n$  متوالی خطی پویا (سیستمی که در آن برای اجزا طول عمر قائل می شوند) در دو حالتی که اجزای آنها مستقل و یا وابسته اند مورد مطالعه قرار می گیرند و برخی از مشخصه های آنها مانند طول عمر، باقیمانده ی طول عمر در سطح اجزا و میانگین باقیمانده عمر در سطح سیستم، بررسی می شوند.

## واژگان کلیدی:

آماره های ترتیبی، باقیمانده ی طول عمر، ترتیب های تصادفی، توزیع تبادل پذیر، توزیع طول عمر، سیستم های  $k$  از  $n$  متوالی، قابلیت اعتماد، میانگین باقیمانده ی عمر، نرخ شکست.



## فهرست مطالب

صفحه

عنوان

### فصل اول: مفاهیم پایه

۱-۱	مقدمه	۱
۲-۱	مروری بر سیستم ها	۲
۱-۲-۱	سیستم ایستا	۲
۲-۲-۱	سیستم پویا	۳
۳-۲-۱	چند تعریف	۴
۴-۲-۱	سیستم سری	۴
۵-۲-۱	سیستم موازی	۵
۶-۲-۱	سیستم $k$ از $n$	۵
۷-۲-۱	سیستم $k$ از $n$ شکست متوالی	۶
۸-۲-۱	سیستم $k$ از $n$ پیروزی متوالی	۶
۹-۲-۱	ساختار دوگان	۷
۱۰-۲-۱	مجموعه های قطع کننده و وصل کننده مینیمال	۷
۳-۱	علامت سیستم	۸
۴-۱	قابلیت اعتماد سیستم ایستا	۱۰
۵-۱	مفاهیم سالخوردگی	۱۱
۱-۵-۱	تابع قابلیت اعتماد (تابع بقا)	۱۲
۲-۵-۱	تابع نرخ خطر	۱۲
۳-۵-۱	میانگین باقیمانده عمر	۱۳
۶-۱	ترتیب های تصادفی	۱۵
۷-۱	تبادل پذیری	۱۷
۸-۱	روش برآورد گشتاوری	۱۸
۹-۱	روند پایان نامه	۱۹

فصل دوم: سیستم های  $k$  از  $n$  متوالی خطی ایستا

- ۱-۲ مقدمه..... ۲۰
- ۲-۲ قابلیت اعتماد سیستم های  $k$  از  $n$  متوالی ایستا..... ۲۱
- ۱-۲-۲ فرمولی دقیق برای محاسبه ی قابلیت اعتماد سیستم  $k$  از  $n$  شکست متوالی ایستا با اجزای  $iid$ ..... ۲۱
- ۲-۲-۲ معادله ی بازگشتی برای محاسبه قابلیت اعتماد سیستم  $k$  از  $n$  شکست متوالی با اجزای  $iid$ ..... ۲۳
- ۳-۲-۲ معادله بازگشتی برای قابلیت اعتماد سیستم  $(c, k, n: F)$  ایستا با اجزایی که مستقل اند ولی لزوماً هم توزیع نیستند..... ۲۴
- ۳-۲ کرانهایی برای قابلیت اعتماد سیستم  $k$  از  $n$  شکست متوالی ایستا با اجزای مستقل..... ۲۵
- ۴-۲ روشی برای ترتیب قراردادن اجزا در سیستم  $(c, k, n: F)$ ..... ۲۷

فصل سوم: سیستم های  $k$  از  $n$  متوالی پویا

- ۱-۳ مقدمه..... ۳۰
- ۲-۳ برخی ویژگی های سیستم های  $k$  از  $n$  متوالی پویا با اجزای  $iid$ ..... ۳۱
- ۱-۲-۳ طول عمر و قابلیت اعتماد سیستم  $(c, k, n: F)$  پویا با اجزای  $iid$ ..... ۳۱
- ۱-۲-۳-۱ سیستم با اجزای نمایی..... ۳۵
- ۲-۲-۳-۲ سیستم با اجزای وایبل..... ۳۸
- ۲-۲-۳ چند ترتیب تصادفی بین طول عمرهای سیستم های متوالی با اجزای مستقل..... ۴۰
- ۳-۳ ویژگی های قابلیت اعتمادی سیستم  $k$  از  $n$  متوالی پویا با اجزای وابسته..... ۴۴
- ۱-۳-۳ قابلیت اعتماد سیستم با اجزای وابسته..... ۴۴
- ۲-۳-۳ متوسط زمان شکست سیستم..... ۴۸
- ۳-۳-۳ نرخ خطر سیستم..... ۴۹
- ۴-۳-۳ تقریبهایی برای قابلیت اعتماد سیستم..... ۵۰
- ۴-۳ نقش شرایط محیطی در ایجاد وابستگی بین اجزای سیستم..... ۵۳

فصل چهارم: باقیمانده سیستم های  $k$  از  $n$  متوالی در سطح اجزا

۱-۴ مقدمه ..... ۵۸

۲-۴ طول عمر باقیمانده سیستم  $(c, k, n: F)$  ..... ۵۹

۳-۴ طول عمر باقیمانده سیستم  $(c, k, n: G)$  ..... ۶۸

فصل پنجم: میانگین باقیمانده عمر سیستم های  $k$  از  $n$  متوالی در سطح سیستم

۱-۵ مقدمه ..... ۸۱

۲-۵ تابع میانگین باقیمانده عمر ..... ۸۲

۳-۵ ترتیب های موجود ..... ۸۶

منابع و مآخذ ..... ۱۰۳

## فهرست شکل‌ها

عنوان	صفحه
شکل ۱-۱ سیستم سری	۴
شکل ۲-۱ سیستم موازی	۵
شکل ۳-۱ سیستم ۲ از ۳	۶
شکل ۴-۱ سیستم ۲ از $n$ پیروزی	۷
شکل ۳-۱ مقادیر دقیق و تقریبی تابع $(c, 10, 20: G)$	۵۶
شکل ۳-۲ مقادیر دقیق و تقریبی تابع $(c, 15, 20: G)$	۵۶
شکل ۴-۱ تابع $M_{\delta, G}^3(t)$ برای سیستم با اجزای دارای توزیع $GPD$ مثال ۱-۴	۷۹
شکل ۴-۲ نمودار $M_{n, G}^{k, r}(t)$ مثال ۲-۴	۸۰
شکل ۵-۱ توابع $MRL$ سیستم $(c, 3, 5: F)$ در مثال ۱-۵	۸۵
شکل ۵-۲ توابع $MRL$ سیستم $(c, 4, 5: F)$ در مثال ۱-۵	۸۶
شکل ۵-۳ چگالی $(T_1, T_2)$ در مثال ۲-۵	۹۲
شکل ۵-۴ توابع $MRL$ اجزای سیستم های مختلف مثال ۲-۵	۹۳

## فهرست جدول‌ها

صفحه	عنوان
۱۰	جدول ۱-۱ علامت‌های سیستم‌های $k$ از $n$ متوالی.....
۵۵	جدول ۱-۳ مقادیر تقریبی تابع بقای چند سیستم $(c, k, n: G)$ .....
۵۷	جدول ۲-۳ طول عمر سیستم‌های $(c, ۳, ۵: G)$ و $(c, ۴, ۵: G)$ .....
۸۷	جدول ۱-۵ علامت‌های مینیمال و ماکزیمال چند سیستم $k$ از $n$ متوالی.....

## مخفف‌ها و کوتاه‌نوشت‌ها

DMRL	Decreasing Mean Residual Lifetime
DFR	Decreasing Failure Rate
hr	Hazard Rate Order
IFR	Increasing Failure Rate
IMRL	Increasing Mean Residual Lifetime
iid	Independent Identically Distributed
lr	Likelihood Ratio Order
MME	Moment Method Estimator
mrl	Mean Residual Lifetime Order
MTTF	Mean Time to Failure
st	Stochastic Order

## فصل اول

### مفاهیم پایه

#### ۱-۱ مقدمه

امروزه طراحی و به کارگیری سیستم هایی با خصوصیات بهتر و قابلیت اعتماد بالاتر برای مهندسان و کاربران، اصلی اساسی به شمار می رود. ارزیابی قابلیت اعتماد سیستم ها در استفاده از آنها و برنامه ریزی دقیق تر آینده، اهمیت زیادی دارد.

یکی از مهم ترین مسائل رایج در قابلیت اعتماد مهندسی انتخاب روشی خاص برای طراحی سیستم به منظور دستیابی به اهداف اجرایی مشخص است. در اغلب موارد هدف رسیدن به سیستمی با بیشترین طول عمر (بیشترین قابلیت اعتماد) در قبال وقت، هزینه و اجزای مشخص و از پیش تعیین شده است. طول عمر بعضی سیستم های ساده مانند سیستم سری به ویژه هنگامی که سیستم بزرگ است کوتاه می باشد. گروهی دیگر، مانند سیستم های موازی، طول عمر بالایی دارند ولی طراحی و استفاده از آنها مستلزم صرف هزینه های زیاد است. در این میان سیستم های  $k$  از  $n$  متوالی توجه بسیاری از مهندسان و پژوهشگران را به خود جلب کرده است. زیرا علاوه بر اینکه قابلیت اعتماد بالایی دارند، طراحی و استفاده از آنها به نسبت دیگر سیستم ها کم هزینه تر می باشد. این سیستم ها بر اساس ساختار و چگونگی قرار گرفتن اجزا در آن به انواع مختلفی تقسیم می شوند که مهم ترین و

پرباربردترین آنها سیستم های  $k$  از  $n$  متوالی خطی می باشد. این نوع سیستم ها در این فصل معرفی و در ادامه مورد بررسی قرار می گیرند.

در این فصل مفاهیم و تعاریفی که در فصل های بعد مورد استفاده قرار می گیرند ارائه می شود. دربخش ۲-۱ انواع سیستم هایی که در این پایان نامه به کار رفته است معرفی می شوند. موضوع بخش ۱-۳ علامت سیستم می باشد. بخش ۱-۴ به چگونگی محاسبه ی قابلیت اعتماد سیستم های ایستا اختصاص یافته است. مفاهیم سالخورده گی که برای مطالعه ی یک سیستم به آن نیاز داریم دربخش ۱-۵ تعریف می شوند. بخش ۱-۶ به مهمترین ترتیب های تصادفی و ۱-۷ به مفهوم تبادل پذیری اختصاص یافته است. دربخش ۱-۸ روش گشتاوری برای برآورد پارامترها و برخی خواص آن ذکر می شود.

## ۲-۱ مروری بر سیستم ها

در بخش صنعت و دیگر بخش ها با سیستم هایی سر و کار داریم که متشکل از تعدادی واحد است که برای انجام یک هدف به یکدیگر متصل شده اند. هر واحد به طور مستقل یا وابسته به واحدهای دیگر وظیفه ای را انجام می دهد و بسته به نوع اتصال آنها درسیستم، سیستم وظیفه ای را انجام می دهد. همچنین براساس رابطه ی ساختاری بین سیستم و اجزای آن سیستم ها به انواع مختلفی تقسیم می شوند. دراین بخش به معرفی برخی از معروفترین سیستم های منجم که در این پایان نامه نیز کاربرد دارند می پردازیم.

### ۱-۲-۱ سیستم ایستا

سیستمی است که اجزای آن (و به طبع خود سیستم) دارای دو وضعیت هستند، به عبارتی یا کار می کنند یا از کار افتاده اند. برای توصیف این دو وضعیت یک متغیر دو مقداری  $X_i; i = 1, \dots, n$  به صورت زیر معرفی می کنیم.

$$X_i = \begin{cases} 1 & i - \text{امین جزء روشن باشد} \\ 0 & i - \text{امین جزء خاموش باشد} \end{cases} \quad (1-1)$$



برای تعیین وضعیت سیستم برحسب وضعیت اجزاء فرض می‌کنیم وابستگی سیستم به اجزای آن توسط تابع

دو مقداری مانند  $\varphi(\underline{X})$  که به تابع ساختار<sup>۱</sup> معروف است مشخص می‌شود که در آن

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ یعنی}$$

$$\varphi(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{سیستم روشن باشد} \\ 0 & \text{سیستم خاموش باشد} \end{cases} \quad (2-1)$$

### ۲-۲-۱ سیستم پویا

سیستمی است که در آن هر یک از مؤلفه‌ها (و به طبع خود سیستم) دارای طول عمر بیشتر از صفر است. یعنی

وضعیت اجزا و سیستم تابعی از زمان است. در این حالت برای توصیف وضعیت اجزا متغیر دو مقداری

$X_i(t); i = 1, \dots, n$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$X_i(t) = \begin{cases} 1 & Z_i > t \\ 0 & Z_i \leq t \end{cases} \quad (3-1)$$

که  $Z_i$  متغیر تصادفی مربوط به طول عمر واحد  $i$ -ام است و برای تعیین وضعیت سیستم برحسب وضعیت اجزا از

تابع ساختار  $\varphi(\underline{X}(t))$  استفاده می‌شود که در آن

$$\underline{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)),$$

لذا

$$\varphi(\underline{X}(t)) = \begin{cases} 1 & \text{اگر طول عمر سیستم بیشتر از } t \text{ باشد} \\ 0 & \text{اگر طول عمر سیستم کمتر از } t \text{ باشد} \end{cases} \quad (4-1)$$

تذکره ۱-۱ در تعاریف ۱-۲-۳ تا ۱-۲-۸، سیستم ایستا در نظر گرفته شده و تابع ساختار برای چنین سیستمی

بیان شده است. این تعاریف برای سیستم پویا نیز به همین صورت است با این تفاوت که در سیستم‌های پویا همان

گونه که گفته شد به جای  $X_i$ ، متغیر  $X_i(t)$  استفاده می‌شود.

---

<sup>۱</sup> Structure function

## ۳-۲-۱ چند تعریف

**الف) سیستم یکنوا.** فرض کنید  $\underline{X}$  و  $\underline{Y}$  دو بردار وضعیت باشند. اگر شرایط زیر برای سیستمی با تابع ساختار  $\varphi(\cdot)$  برقرار باشد، آن را سیستم یکنوا گوئیم.

$$۱. \varphi(۰, \dots, ۰) = ۰, \quad \varphi(۱, \dots, ۱) = ۱$$

$$۲. \underline{X} < \underline{Y} \Rightarrow \varphi(\underline{X}) \leq \varphi(\underline{Y})$$

**ب) جزء نامرتب<sup>۱</sup>.** یک جزء را نامرتب می گوئیم، اگر تاثیری در تابع ساختار نداشته باشد یعنی تابع ساختار به ازای هر مقداری برای آن ثابت باشد.

**پ) سیستم منسجم<sup>۲</sup>.** اگر یک سیستم یکنوا جزء نامرتب نداشته باشد منسجم نامیده می شود.

از حالت های خاص سیستم های منسجم می توان به سیستم های سری، موازی،  $k$  از  $n$  و  $k$  از  $n$  متوالی اشاره کرد که در ادامه به تعریف آنها می پردازیم.

## ۴-۲-۱ سیستم سری

سیستم سری، سیستمی را گوئند که عملکرد آن مستلزم عملکرد تمام اجزای آن باشد. به عبارت دیگر سیستم روشن است اگر و تنها اگر تمامی اجزای آن روشن باشد. برای چنین سیستمی تابع ساختار عبارتست از

$$\varphi(\underline{x}) = \prod_{i=1}^n x_i = \min_{1 \leq i \leq n} x_i. \quad (۵-۱)$$

شکل ۱-۱ چنین سیستمی را نشان می دهد.



شکل ۱-۱. سیستم سری

<sup>۱</sup> Irrelevant

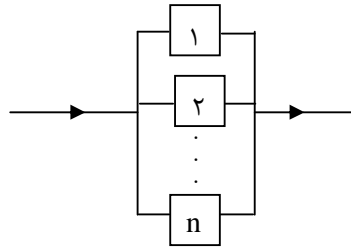
<sup>۲</sup> Coherent

### ۵-۲-۱ سیستم موازی

سیستم موازی، سیستمی را گویند که عملکرد آن مستلزم عملکرد حداقل یکی از اجزای آن باشد. به عبارت دیگر سیستم روشن است اگر و تنها اگر حداقل یکی از اجزای آن روشن باشد. تابع ساختار چنین سیستمی برابراست با

$$\varphi(\underline{x}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i) = \max_{1 \leq i \leq n} x_i . \quad (6-1)$$

شکل ۲-۱ چنین سیستمی را نشان می دهد.



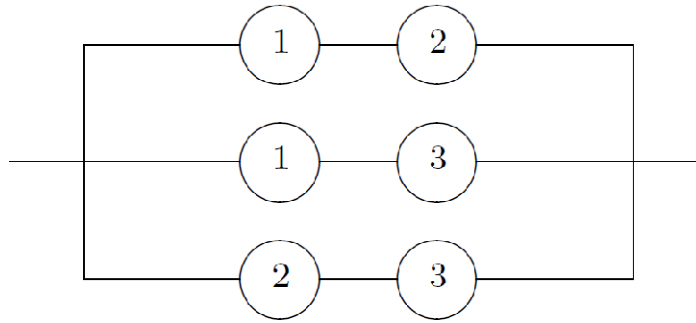
شکل ۲-۱. سیستم موازی

### ۶-۲-۱ سیستم k از n

سیستم k از n سیستمی را گویند که عملکرد آن مستلزم عملکرد حداقل k واحد از n جزء باشد ( $k \leq n$ ). به عبارت دیگر سیستم روشن است اگر و تنها اگر k واحد از n واحد سیستم کار کند. روشن است که سیستم های سری و موازی حالت خاص سیستم k از n هستند. سیستم سری، سیستمی n از n است و سیستم موازی یک سیستم ۱ از n است. تابع ساختار این سیستم عبارتست از

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^n x_i \geq k \\ 0 & \sum_{i=1}^n x_i < k \end{cases} \quad (7-1)$$

شکل ۳-۱ یک سیستم ۲ از ۳ را نشان می دهد.



شکل ۱-۳. سیستم ۲ از ۳

### ۷-۲-۱ سیستم $k$ از $n$ شکست متوالی

چنین سیستمی شامل  $n$  جزء است و از کار می افتد اگر و فقط اگر حداقل  $k$  جزء متوالی آن از کار بیافتند. برحسب اینکه اجزای سیستم روی یک خط مرتب شده باشند و یا به طور دایره ای قرار گرفته باشند به ترتیب سیستم  $k$  از  $n$  شکست متوالی خطی (به اختصار با  $(c, k, n: F)$  نشان داده می شود) و یا دایره ای نامیده می شود.

به عبارتی یک سیستم  $(c, k, n: F)$ ، اتصال سری  $(n - k + 1)$  سیستم موازی است که هر یک شامل  $k$  واحد است. بنابراین تابع ساختار چنین سیستمی به شکل زیر است.

$$\varphi(\underline{x}) = \prod_{j=1}^{n-k+1} [1 - \prod_{i=j}^{j+k-1} (1 - x_i)] \quad (۸-۱)$$

### ۸-۲-۱ سیستم $k$ از $n$ پیروزی متوالی

چنین سیستمی شامل  $n$  جزء است و سیستم کار می کند اگر و فقط اگر حداقل  $k$  جزء متوالی آن کارکنند. همچنین برحسب اینکه اجزای سیستم روی یک خط مرتب شده باشند و یا به طور دایره ای قرار گرفته باشند، به ترتیب سیستم  $k$  از  $n$  پیروزی متوالی خطی (به اختصار با  $(c, k, n: G)$  نشان داده می شود) و یا دایره ای نامیده می شود.

با توجه به تعریف مشخص می شود که سیستم  $(c, k, n: G)$ ، اتصال موازی  $(n - k + 1)$  سیستم سری است که هر یک از آن ها متشکل از  $k$  واحد می باشد. بنابراین تابع ساختار چنین سیستمی برابر است با