بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار گرایش آمار ریاضی

مطالعه ای بر خواص طول عمر سیستم های k از n متوالی

استاد راهنما:

دکتر مجید اسدی

پژوهشگر:

مریم اثنی عشری

شهریور ماه ۱۳۸۹

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه آمار

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمارگرایش آمارریاضی

خانم مریم اثنی عشری

تحت عنوان

مطالعه ای بر خواص طول عمر سیستم های k از n متوالی

در تاریخ۸۹/۶/۳۱ توسط هیأت داوران زیر بررسی با درجه **عالی** به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر مجید اسدی با مرتبه‌ی علمی استاد امضاء

۲- استاد داور داخل گروه دکتر محمد حسین علامت ساز با مرتبه‌ی علمی استاد امضاء

۳- استاد داور خارج از گروه دکتر محمد حسین پورسعید با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء

امضای مدیر گروه

ره پویان راه دانش هر اندازه پیش روند و هر دری از علوم به روی آنها گشوده شود، باز همان نوآموزان مکتب استادان هستند که بی‌فروغ نور علم ایشان در بی راهه‌ها سرگردان بودند.

به مصداق سخن شریف « **من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق** » بر خود لازم می‌دانم مراتب سپاس و امتنان خود را از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر مجید اسدی که در کلیه مراحل تدوین این پایان نامه مرا یاری نمودند، ابراز دارم. همچنین از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر محمد حسین علامت ساز و جناب آقای دکتر محمد حسین پور سعید که داوری این رساله را پذیرفته و با پیشنهادات خود موجب ارتقای آن گردیدند، صمیمانه تشکر می‌نمایم. از همسر عزیزم که در نگارش این پایان نامه از صمیم قلب تشکر می کنم و آرزوی موفقیت وکامیابی آنها را دارم.

تقدیم به پدر عزیز و مادر مهربانم

به پاس محبتهای بی دریغشان

چکیده:

در سال های اخیر سیستم های متوالی در شاخه های مختلف علوم، مانند علوم مهندسی، جایگاه ویژه ای یافته اند. به همین دلیل قابلیت اعتماد آنها توسط محققان زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است. مطالعه و بررسی این سیستم ها منجر به شناخت بهتر سیستم های اولیه، از جمله سیستم سری می شود. سیستم های k از n متوالی از یک نقطه نظر به دو کلاس سیستم های k از n شکست متوالی و k از n پیروزی متوالی تقسیم می شوند. سیستم k از n شکست متوالی (k از n پیروزی متوالی) شامل یک دنباله ی مرتب شده از n مؤلفه است به طوری که سیستم از کار می افتد (کار می کند)، اگر و فقط اگر حداقل k واحد متوالی آن شکست بخورند(سالم باشند). این سیستم ها بر حسب اینکه اجزا روی یک خط مرتب شده باشند و یا به طور دایره ای قرار گرفته باشند، به ترتیب خطی یا دایره ای نامیده می شوند.

این پایان نامه پس از ارائه مقدمات و مفاهیم اولیه سیستم های k از n متوالی خطی ایستا (سیستمی که در آن اجزا فقط دو وضعیت دارند.) را معرفی و خلاصه ای از ویژگی های آنها را بیان می کند. در ادامه سیستم های k از n متوالی خطی پویا (سیستمی که در آن برای اجزا طول عمر قائل می شوند.) در دو حالتی که اجزای آنها مستقل و یا وابسته اند مورد مطالعه قرار می گیرند و برخی از مشخصه های آنها مانند طول عمر، باقیمانده ی طول عمر در سطح اجزا و میانگین باقیمانده عمر در سطح سیستم، بررسی می شوند.

واژگان کلیدی:

آماره های ترتیبی، باقیمانده ی طول عمر، ترتیب های تصادفی، توزیع تبادل پذیر، توزیع طول عمر، سیستم هـای k از n متوالی، قابلیت اعتماد، میانگین باقیمانده ی عمر، نرخ شکست.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول: مفاهیم پایه

عنوان **صفحه**

عنوان **صفحه**

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

فهرست جدول‌ها

عنوان **صفحه**

مخففها و کوتاه نوشتها

DMRL	Decreasing Mean Residual Lifetime
DFR	Decreasing Failure Rate
hr	Hazard Rate Order
IFR	Increasing Failure Rate
IMRL	Increasing Mean Residual Lifetime
iid	Independent Identically Distributed
lr	Likelihood Ratio Order
MME	Moment Method Estimator
mrl	Mean Residual Lifetime Order
MTTF	Mean Time to Failure
st	Stochastic Order

فصل اول

مفاهیم پایه

۱-۱ مقدمه

امروزه طراحی و به کارگیری سیستم هایی با خصوصیات بهتر و قابلیت اعتماد بالاتر برای مهندسان و کاربران، اصلی اساسی به شمار می رود. ارزیابی قابلیت اعتماد سیستم ها در استفاده از آنها و برنامه ریزی دقیق تر آینده، اهمیت زیادی دارد.

یکی از مهم ترین مسائل رایج در قابلیت اعتماد مهندسی انتخاب روشی خاص برای طراحی سیستم به منظور دستیابی به اهداف اجرایی مشخص است. در اغلب موارد هدف رسیدن به سیستمی با بیشترین طول عمر (بیشترین قابلیت اعتماد) در قبال وقت، هزینه و اجزای مشخص و از پیش تعیین شده است. طول عمر بعضی سیستم های ساده مانند سیستم سری به ویژه هنگامی که سیستم بزرگ است کوتاه می باشد. گروهی دیگر، مانند سیستم های موازی، طول عمر بالایی دارند ولی طراحی و استفاده از آنها مستلزم صرف هزینه های زیاد است. در این میان سیستم های k از n متوالی توجه بسیاری از مهندسان و پژوهشگران را به خود جلب کرده است. زیرا علاوه بر اینکه قابلیت اعتماد بالایی دارند، طراحی و استفاده از آنها به نسبت دیگر سیستم ها کم هزینه تر می باشد. این سیستم ها بر اساس ساختار و چگونگی قرار گرفتن اجزا در آن به انواع مختلفی تقسیم می شوند که مهم ترین و

پرکاربردترین آنها سیستم های k از n متوالی خطی می باشد. این نوع سیستم ها در این فصل معرفی و در ادامه مورد بررسی قرار می گیرند.

در این فصل مفاهیم و تعاریفی که در فصل های بعد مورد استفاده قرار می گیرند ارائه می شود. دربخش ۱-۲ انواع سیستم هایی که در این پایان نامه به کار رفته است معرفی می شوند. موضوع بخش ۱-۳ علامت سیستم می باشد. بخش ۱-٤ به چگونگی محاسبه ی قابلیت اعتماد سیستم های ایستا اختصاص یافته است. مفاهیم سالخوردگی که برای مطالعه ی یک سیستم به آن نیاز داریم دربخش ۱-۵ تعریف می شوند. بخش ۱-٦ به مهمترین ترتیب های تصادفی و ۱-۷ به مفهوم تبادل پذیری اختصاص یافته است. دربخش ۱-۸ روش گشتاوری برای برآورد پارامترها و برخی خواص آن ذکر می شود.

۱-۲ مروری بر سیستم ها

در بخش صنعت و دیگر بخش ها با سیستم هایی سر وکار داریم که متشکل از تعدادی واحد است که برای انجام یک هدف به یکدیگر متصل شده اند. هر واحد به طور مستقل یا وابسته به واحدهای دیگر وظیفه ای را انجام می دهد و بسته به نوع اتصال آنها درسیستم، سیستم وظیفه ای را انجام می دهد. همچنین براساس رابطه ی ساختاری بین سیستم و اجزای آن سیستم ها به انواع مختلفی تقسیم می شوند. دراین بخش به معرفی برخی از معروفترین سیستم های مسنجم که در این پایان نامه نیز کاربرد دارند می پردازیم.

۱-۲-۱ سیستم ایستا

سیستمی است که اجزای آن (و به طبع خود سیستم) دارای دو وضعیت هستند، به عبارتی یا کار می کنند یا از کار افتاده اند. برای توصیف این دو وضعیت یک متغیر دو مقداری $X_i; i = ۱, \dots, n$ به صورت زیر معرفی می کنیم.

$$X_i = \begin{cases} ۱ & i - \text{امین جزء روشن باشد} \\ ۰ & i - \text{امین جزء خاموش باشد} \end{cases} . \qquad (۱-۱)$$

برای تعیین وضعیت سیستم برحسب وضعیت اجزاء فرض می کنیم وابستگی سیستم به اجزای آن توسط تابع دو مقداری مانند $\varphi(\underline{X})$ که به تابع ساختار [1] معروف است مشخص می شود که درآن $\underline{X} = (X_۱, X_۲, \dots, X_n)$. یعنی

$$\varphi(\underline{X}) = \begin{cases} ۱ & \text{سیستم روشن باشد} \\ ۰ & \text{سیستم خاموش باشد} \end{cases} . \qquad (۱-۲)$$

۱-۲-۲ سیستم پویا

سیستمی است که درآن هر یک از مؤلفه ها (و به طبع خود سیستم) دارای طول عمر بیشتر از صفر است. یعنی وضعیت اجزا وسیستم تابعی از زمان است. دراین حالت برای توصیف وضعیت اجزا متغیر دو مقداری $X_i(t); i = ۱, \dots, n$ را به صورت زیرتعریف می کنیم.

$$X_i(t) = \begin{cases} ۱ & Z_i > t \\ ۰ & Z_i \leq t \end{cases} . \qquad (۱-۳)$$

که Z_i متغیرتصادفی مربوط به طول عمر واحد i-ام است و برای تعیین وضعیت سیستم برحسب وضعیت اجزا از تابع ساختار $\varphi(\underline{X}(t))$ استفاده می شود که درآن

$$\underline{X}(t) = (X_۱(t), X_۲(t), \dots, X_n(t)) ,$$

لذا

$$\varphi(\underline{X}(t)) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر طول عمر سیستم بیشتر از } t \text{ باشد} \\ ۰ & \text{اگر طول عمر سیستم کمتر از } t \text{ باشد} \end{cases} . \qquad (۱-٤)$$

تذکر۱-۱ درتعاریف ۱-۲-۳ تا ۱-۲-۸ ، سیستم ایستا درنظرگرفته شده و تابع ساختار برای چنین سیستمی بیان شده است. این تعاریف برای سیستم پویا نیز به همین صورت است با این تفاوت که در سیستم های پویا همان گونه که گفته شد به جای X_i، متغیر $X_i(t)$ استفاده می شود.

---

[1] Structure fuction

۱-۲-۳ چند تعریف

الف) سیستم یکنوا. فرض کنید $\underline{X}$ و $\underline{Y}$ دو بردار وضعیت باشند. اگر شرایط زیر برای سیستمی با تابع ساختار $\varphi(.)$ برقرار باشد، آن را سیستم یکنوا گوییم.

$$۱.\ \varphi(۰,\dots,۰) = ۰,\quad \varphi(۱,\dots,۱) = ۱$$
$$۲.\ \underline{X} < \underline{Y} \Rightarrow \varphi(\underline{X}) \leq \varphi(\underline{Y})$$

ب) جزء نامرتبط[۱]. یک جزء را نامرتبط می گوییم، اگر تاثیری درتابع ساختار نداشته باشد یعنی تابع ساختار به ازای هر مقداری برای آن ثابت باشد.

پ) سیستم منسجم[۲]. اگر یک سیستم یکنوا جزء نامرتبط نداشته باشد منسجم نامیده می شود.

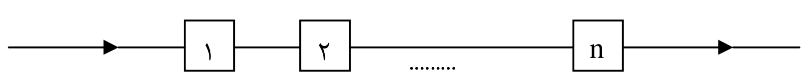
از حالت های خاص سیستم های منسجم می توان به سیستم های سری، موازی، k از n و k از n متوالی اشاره کرد که در ادامه به تعریف آنها می پردازیم.

۱-۲-٤ سیستم سری

سیستم سری، سیستمی را گویند که عملکرد آن مستلزم عملکرد تمام اجزای آن باشد. به عبارت دیگر سیستم روشن است اگر و تنها اگرتمامی اجزای آن روشن باشد. برای چنین سیستمی تابع ساختار عبارتست از

$$\varphi(\underline{x}) = \prod_{i=۱}^{n} x_i = min_{۱\leq i\leq n}\, x_i \,. \qquad (۱-۵)$$

شکل ۱-۱ چنین سیستمی را نشان می دهد.



شکل ۱-۱. سیستم سری

---

[۱] Irrelevent

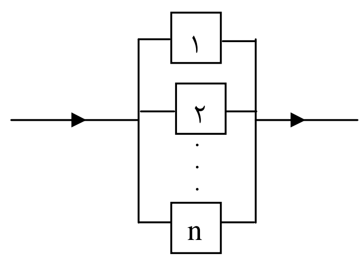
[۲] Coherent

۱-۲-۵ سیستم موازی

سیستم موازی، سیستمی را گویند که عملکرد آن مستلزم عملکرد حداقل یکی از اجزای آن باشد. به عبارت دیگر سیستم روشن است اگر و تنها اگر حداقل یکی از اجزای آن روشن باشد. تابع ساختار چنین سیستمی برابراست با

$$\varphi(\underline{x}) = ۱ - \prod_{i=۱}^{n}(۱ - x_i) = max_{۱\leq i\leq n}\, x_i\ . \qquad (۱-۶)$$

شکل ۱-۲ چنین سیستمی را نشان می دهد.



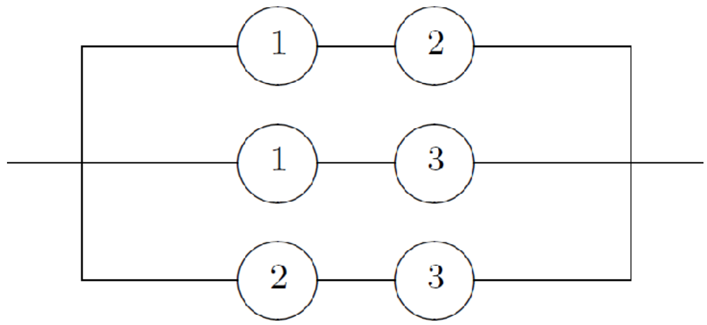
شکل **۱-۲. سیستم موازی**

۱-۲-۶ سیستم k از n

سیستم k از n سیستمی را گویند که عملکرد آن مستلزم عملکرد حداقل k واحد از n جزء باشد ($k \leq n$). به عبارت دیگر سیستم روشن است اگر و تنها اگر k واحد از n واحد سیستم کار کند. روشن است که سیستم های سری و موازی حالت خاص سیستم k از n هستند. سیستم سری، سیستمی n از n است و سیستم موازی یک سیستم ۱ از n است. تابع ساختار این سیستم عبارتست از

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} ۱ & \sum_{i=۱}^{n} x_i \geq k \\ ۰ & \sum_{i=۱}^{n} x_i < k \end{cases}. \qquad (۱-۷)$$

شکل ۱-۳ یک سیستم ۲ از ۳ را نشان می دهد.



شکل ۱-۳. **سیستم ۲ از ۳**

۱-۲-۷ سیستم k از n شکست متوالی

چنین سیستمی شامل n جزء است و از کار می افتد اگر و فقط اگر حداقل k جزء متوالی آن از کار بیافتند. برحسب اینکه اجزای سیستم روی یک خط مرتب شده باشند و یا به طور دایره ای قرارگرفته باشند به ترتیب سیستم k از n شکست متوالی خطی (به اختصار با $(c,k,n{:}F)$ نشان داده می شود) و یا دایره ای نامیده می شود.

به عبارتی یک سیستم $(c,k,n{:}F)$، اتصال سری $(n-k+۱)$ سیستم موازی است که هریک شامل k واحد است. بنابراین تابع ساختار چنین سیستمی به شکل زیر است.

$$\varphi(\underline{x}) = \prod_{j=۱}^{n-k+۱}\left[۱-\prod_{i=j}^{j+k-۱}(۱-x_i)\right]. \qquad (۱-۸)$$

۱-۲-۸ سیستم k از n پیروزی متوالی

چنین سیستمی شامل n جزء است و سیستم کار می کند اگر و فقط اگر حداقل k جزء متوالی آن کارکنند. همچنین برحسب اینکه اجزای سیستم روی یک خط مرتب شده باشند و یا به طور دایره ای قرارگرفته باشند، به ترتیب سیستم k از n پیروزی متوالی خطی (به اختصار با $(c,k,n{:}G)$ نشان داده می شود) و یا دایره ای نامیده می شود.

با توجه به تعریف مشخص می شود که سیستم $(c,k,n{:}G)$، اتصال موازی $(n-k+۱)$ سیستم سری است که هریک از آن ها متشکل از k واحد می باشد. بنابراین تابع ساختار چنین سیستمی برابر است با