بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه آقای **محمد منوچهرزاده** دانشجوی رشته: **ریاضی محض** به شماره دانشجویی **۹۱۵۲۳۱۱۰۳۷** تحت عنوان: «**مدول های تابعی ،طولپاها و طولپاهای تقریبی**» را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکترفرشته سعدی	دانشیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکترسید مسعود امینی	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر خسرو تاج بخش	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکترملیحه حسینی	استادیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر خسرو تاج بخش	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیت‌های علمی-پژوهشی دانشگاه است، بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان‌نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان‌نامه کارشناسی ارشد نگارنده در رشته **ریاضی محض** است که در سال **۹۳** در دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی خانم دکتر **فرشته سعدی** از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به‌علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به‌منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتاب‌های عرضه شده نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

ماده ۶: اینجانب **محمد منوچهرزاده** دانشجوی رشته **ریاضی محض** مقطع **کارشناسی ارشد** تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن‌را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام خانوادگی: **محمد منوچهرزاده**

تاریخ و امضا: ۹۳/۸/۲۰

آیین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه : با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسان‌ها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهش‌های علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرح‌های تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱: حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می‌باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲: انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان‌نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می‌باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳: انتشار کتاب ، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه (حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده‌ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده‌ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین‌نامه‌های مصوب انجام شود.

ماده ۴: ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته‌ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه می‌باشد، باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵: این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم الاجرا است.

«اینجانب **محمّد منوچهرزاده** دانشجوی رشته **ریاضی محض** ورودی سال تحصیلی **۹۱** مقطع **کارشناسی ارشد** دانشکده **علوم ریاضی** متعهد می‌شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش‌های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته‌های علمی مستخرج از پایان نامه تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می‌دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله براساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم.»

امضا:

تاریخ: ۹۳/۱۱/۲۰

دانشکده‌ی علوم ریاضی

پایان‌نامه‌ی دوره‌ی کارشناسی ارشد ریاضی محض

مدول‌های تابعی، طولپاها و طولپاهای تقریبی

دانشجو:
محمّد منوچهرزاده

استاد راهنما:
دکتر فرشته سعدی

بهمن ۱۳۹۳

به پاس تعبیر عظیم و انسانیشان از کلمه ایثار و به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است، به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند، این مجموعه را به

پدر مهربانم و مادر نازنینم

تقدیم می کنم

سپاس و ستایش یگانه معبود را که پرتوی الطاف بیشمارش بر لحظه لحظه زندگیم ساطع و آشکار است.

زلال ترین سپاسم را پیشکش مهربان مادر و پدرم که پیمودن مسیر زندگیم بی مهرشان ناممکن بوده و خواهد بود.

و سپاس می گزارم راهنمایی ها و پیگیری های دل سوزانه استاد فرزانه و ارزشمندم خانم دکتر فرشته سعدی که مرا به دقت اندیشه، درک و تعمق واداشتند. از اساتید بزرگوار جناب اقای دکتر سید مسعود امینی و جناب آقای دکتر خسرو تاجبخش و داور محترم خانم دکتر ملیحه حسینی که با دقت تمام پایان نامه ام را مطالعه نمودند بسیار سپاس گزارم.

آخرین، اما نه کمترین، از خانواده ی عزیزم که همواره از همراهی و سعه صدرشان بهرمند بوده ام، بسیار سپاس گزارم.

با تشکر

محمّد منوچهرزاده - بهمن ۹۳

چکیده

در این پایان‌نامه که مرجع اصلی آن [۷] است به بررسی و ارائه صورت کلی طولپاها و طولپاهای تقریبی بین فضاهای مدولی تابعی به فرم Af می‌پردازیم، که A یک جبر یکنواخت روی فضای فشرده و هاسدورف Ω و f تابعی اکیداً مثبت و پیوسته روی Ω است. شرایط لازم و کافی برای توابع f_1 و f_2 داده می‌شود که مدول‌های Af_1 و Af_2 به عنوان فضاهای باناخ یکریخت شوند. برای جبرهای یکنواخت A و B روی فضاهای فشرده و هاسدورف Ω_1 و Ω_2 و توابع اکیداً مثبت و پیوسته f_1 و f_2 به ترتیب روی Ω_1 و Ω_2، اگر $T : Af_1 \longrightarrow Bf_2$ یک طولپای خطی و پوشا باشد آنگاه عضو وارون‌پذیر $h \in B$ و همسانریختی φ از Ω_2 به زیر مجموعه‌ای از فضای ایده‌آل‌های ماکسیمال A وجود دارد که $T(af_1) = (a \circ \varphi)(hf_2)$ برای هر $a \in A$. در حالتی که $A = B$، T یک طولپای $A-$ مدولی است اگر و تنها اگر φ نگاشت همانی باشد. دو $A-$ مدول تابعی Af_1 و Af_2 به طور تقریباً طولپا یکریخت هستند هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، یکریختی همانند $T : Af_1 \longrightarrow Af_2$ وجود داشته باشد که $\|T\| \, \|T^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$. در ادامه ثابت می‌شود $A \cong Af$ به طور تقریباً طولپا، اگر و تنها اگر $f \in \overline{Q}$ که $Q = \{|a| : a \in A^{-1}\}$. نشان داده می‌شود برای جبر یکنواخت A روی فضای فشرده و هاسدورف Ω، $A-$ مدولهای باناخی که با A به طور $A-$ مدولی و طولپا یکریخت می‌باشند، دقیقاً زیر مدول‌های بسته‌ای از $C(\Omega)$ به فرم Af هستند که $f \in \overline{Q}$.

واژه‌های کلیدی: طولپا، تقریباً طولپا، مدول‌های تابعی، $A-$ طولپا، $A-$ مدول باناخ، جبر تابعی.

فهرست

پیشگفتار

بررسی طولپاهای بین زیرفضاهایی از توابع پیوسته یک مساله کلاسیک و قدیمی است که با استفاده از صورت آنها می‌توان اطلاعاتی راجع به فضاهای توپولوژیک زمینه بدست آورد. یکی از مهمترین قضایا در این زمینه، قضیه باناخ-استون [۱] است که بر اساس آن اگر X و Y فضاهای فشرده و هاسدورف باشند و $T : C(X) \longrightarrow C(Y)$ یک طولپای خطی پوشا باشد، آنگاه تابع پیوسته $k : Y \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = ۱\}$ و همسانریختی $\varphi : Y \longrightarrow X$ وجود دارند که برای هر $y \in Y$ و $f \in C(X)$،

$$T(f)(y) = k(y)f(\varphi(y))$$

قضیه باناخ-استون در جهت‌های مختلفی گسترش یافته است. ناگاساوا [۲] در [۱۹] و دی لیو [۳] ،رودین [۴] و ورمر [۵] در [۱۶]، طولپاهای پوشای بین جبرهای یکنواخت را بررسی کرده‌اند. در حقیقت آنها ثابت کرده‌اند که اگر A و B جبرهای یکنواخت و $T : A \longrightarrow B$ یک طولپای خطی پوشا باشد که $T(e_A) = e_B$ ، آنگاه T یک یکریختی جبری است. متذکر می‌شویم یک جبر یکنواخت یک زیر جبر بسته $C(K)$ برای فضای فشرده و هاسدورف K است که نقاط K را جدا می‌کند و شامل توابع ثابت است.

یکی از مهمترین نتایج مربوط به خطی بودن طولپاهای پوشا توسط مازور-اولام [۶] [۱۸] ثابت شده است.

---

[۱] Banach-Stone

[۲] Nagasawa

[۳] de Leeuw

[۴] Rudin

[۵] Wermer

[۶] Mzur-Ulam

قضیه مازور-اولام بیان می‌کند که اگر $T : M_1 \longrightarrow M_2$ یک طولپای پوشا بین فضاهای نرمدار حقیقی باشد، آنگاه $T - T(0)$ خطی-حقیقی است.

مشخص کردن صورت کلی طولپاهای خطی پوشا بین فضاهای مختلف، بخش وسیعی از مطالعات در این زمینه را به خود اختصاص داده است.

در حالتی که X و Y فضاهای هاسدورف موضعاً فشرده باشند و $T : A \longrightarrow C_0(Y)$ یک طولپای خطی نه لزوماً پوشا باشد که در آن A یک جبر یکنواخت روی X است، آرجو [1] و فونت [2] در [۲] ثابت کرده‌اند که مرز بسته K از Y برای $T(A)$ و نگاشت پیوسته و پوشا $h : K \longrightarrow \partial A$ که در آن ∂A مرز شیلوف A است و تابع پیوسته $u : K \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$ وجود دارند که برای هر $y \in K$ و $f \in A$

$$(Tf)(y) = u(y)(f(h(y)))$$

برای جبر باناخ A منظور از یک $A-$ مدول تابعی یک زیر فضای بسته $C(K)$، برای فضای فشرده و هاسدورف K، است که تحت ضرب $\pi(A)$ که $\pi : A \longrightarrow C(K)$ یک همریختی یکال است، بسته است. در [۴] ثابت شده است که هر $A-$ مدول تابعی وفادار تک مولدی تحت یک طولپای $A-$ مدولی یکریخت با Af است که در آن A به طور طولپا یکریخت با یک جبر یکنواخت روی فضای فشرده و هاسدورف Ω است و f تابعی اکیداً مثبت پیوسته‌ای روی Ω است. در این پایان نامه که مرجع اصلی آن [۷] است، به ارائه صورت کلی طولپاها و طولپاهای تقریبی بین فضاهای مدولی تابعی به فرم Af می‌پردازیم و همچنین ارتباط بین طولپاها و تقریباً طولپاها بررسی خواهد شد.

این پایان نامه مشتمل بر سه فصل است.

در فصل اول پایان نامه به بیان تعاریف و پیش‌نیازها خواهیم پرداخت.

در فصل دوم به بررسی شرایط لازم و کافی برای توابع f_1 و f_2 می‌پردازیم که مدول‌های Af_1 و Af_2 به عنوان فضای باناخ یکریخت باشند. نشان داده می‌شود برای جبرهای یکنواخت A و B روی فضاهای فشرده

[1] Arauja

[2] Font

و هاسدورف $\Omega_۱$ و $\Omega_۲$ و توابع اکیداً مثبت پیوسته $f_۱$ و $f_۲$ روی $\Omega_۱$ و $\Omega_۲$ اگر $T : Af_۱ \longrightarrow Bf_۲$ یک طولپای خطی پوشا باشد آنگاه عضو وارون‌پذیر $h \in B$ و همسانریختی φ از $\Omega_۲$ به زیر مجموعه‌ای از M_A (فضای ایده‌آل ماکسیمال A) وجود دارد

$$T(af_۱) = (a \circ \varphi)hf_۲ \qquad (a \in A)$$

و در حالتی که $A = B$، T یک طولپای $A-$ مدولی است اگر و تنها اگر φ نگاشت همانی باشد.

در فصل سوم به شناسایی مدول‌های از نوع Af می‌پردازیم که با A به طور تقریباً طولپا یکریخت هستند. مدول‌های $Af_۱$ و $Af_۲$ را تقریباً طولپا می‌نامیم هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$، نگاشت خطی، طولپا و پوشا $T : Af_۱ \longrightarrow Af_۲$ وجود داشته باشد به طوری که $\|T\| \, \|T^{-۱}\| \leq ۱ + \varepsilon$.

در حالتی که فضای توپولوژیک زمینه یعنی Ω با مرز شیلوف A برابر است ثابت می‌شود $Af \cong A$ به طور تقریباً طولپا اگر و تنها اگر f به طور یکنواخت با قدر مطلق یک عضو وارون‌پذیر A تقریب زده شود. یعنی $f \in \overline{Q}$ که $Q = \{|a| \ : \ a \in A^{-۱}\}$، در اینجا $A^{-۱}$ نمایانگر مجموعه اعضای وارون‌پذیر A است.

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

در این فصل ابتدا مقدمات مورد نیاز از توپولوژی عمومی را بیان می‌کنیم و سپس به بیان پیش نیازهایی از آنالیز تابعی و جبرهای باناخ نظیر تعریف و مثال‌هایی از جبرهای باناخ، فضای ایده‌آل ماکسیمال و مرز شیلوف خواهیم پرداخت و همچنین قضیه‌های مورد نیاز را بیان می‌کنیم. در ادامه نیز مختصری به مدول‌ها و جبرهای یکنواخت و مطالب مرتبط خواهیم پرداخت.

۱.۱ توپولوژی عمومی

در این بخش که مرجع اصلی آن [۱۱] است، به ارائه تعاریف و قضیه‌هایی از توپولوژی عمومی که در فصل‌های بعد مورد نیاز است، می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم X و Y فضاهای توپولوژیک باشند. نگاشت دوسویی f از X به Y که f و f^{-1} پیوسته هستند یک همسانریختی نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. فضای توپولوژیک X یک فضای هاسدورف گفته می‌شود هرگاه برای هر دو نقطه متمایز از X ، همسایگی‌های حول آنها وجود داشته باشد که همدیگر را قطع نکنند.

بدیهی است هر فضای متریک هاسدورف می‌باشد.

تعریف ۳.۱.۱. فضای توپولوژیک X را نرمال گوییم هرگاه برای هر دو مجموعه بسته و مجزای A و B در X، مجموعه‌های باز مجزایی مانند U و V وجو داشته باشند که $A \subseteq U$ و $B \subseteq V$.

می‌دانیم اگر $(X, \tau_۱)$ ، $(Y, \tau_۲)$ فضاهای توپولوژیک به ترتیب فشرده و هاسدورف باشند و همچنین نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ پیوسته و دوسویی باشد آنگاه f یک همسانریختی است (گزاره ۴.۲۸ از [۱۱]).

قضیه ۴.۱.۱. [11, Lemma 15.4] فرض کنیم X یک فضای نرمال باشد و A و B زیر مجموعه‌های بسته مجزایی در X باشند، آنگاه تابع پیوسته $f : X \longrightarrow [۰, ۱]$ وجود دارد که $f|_A = ۰$ و $f|_B = ۱$.

۲.۱ آنالیز تابعی

در این بخش که مرجع اصلی آن [۲۰] است، پیش‌نیازهایی از آنالیز تابعی را ارائه می‌دهیم که در قسمت‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. توجه می‌کنیم که فضاها و جبرهای مورد بحث در این پایان نامه همگی روی میدان اعداد مختلط تعریف شده‌اند.

هرگاه فضای نرمدار X با متر $d(x, y) = \|x - y\|$ یک فضای متریک کامل باشد، به آن یک فضای باناخ گوییم. مجموعه همه توابع مختلط پیوسته روی فضای فشرده و هاسدورف K را با نماد $C(K)$ نمایش می‌دهیم. در این صورت $C(K)$ با نرم $\|f\|_K = \sup\{|f(x)| : \quad x \in K\}$ یک فضای باناخ است. همچنین برای فضای موضعاً فشرده Ω، فضای $C_۰(\Omega)$ متشکل از توابع پیوسته مختلط روی Ω که در بی‌نهایت صفر می‌شوند، نیز همراه نرم سوپریمم یک فضای باناخ است.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X, Y دو فضای نرمدار باشند. برای عملگر خطی $T : X \longrightarrow Y$ تعریف می‌کنیم

$$\|T\| = \sup \{ \|T(x)\| : \quad \|x\| \leq ۱\}$$

و T را کراندار نامیم هرگاه $\|T\| < \infty$.

می‌دانیم کرانداری یک عملگر خطی بین دو فضای نرمدار با پیوستگی آن معادل است. به سادگی دیده می‌شود که $\|.\|$ یک نرم روی فضای همه عملگرهای خطی پیوسته از X به Y است. مجموعه تمام عملگرهای خطی پیوسته از X به Y را با نماد $\mathcal{B}(X, Y)$ نمایش می‌دهیم. می‌دانیم هرگاه Y فضای باناخ باشد، $\mathcal{B}(X, Y)$ با نرم عملگری، فضای باناخ است. برای فضای نرمدار X فضای باناخ $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ را دوگان X نامیم و با X^* نشان می‌دهیم.

قضیه ۲.۲.۱. [20, Theorem 6.3] فرض کنیم Y زیر فضایی از فضای نرمدار $(X, \|\cdot\|)$ و f یک تابعک خطی پیوسته روی Y باشد. در این صورت $\Lambda \in X^*$ وجود دارد که $\Lambda|_Y = f$ و $\|f\| = \|\Lambda\|$.

قضیه زیر که به قضیه ریس [۱] معروف است کاربردهای فراوانی دارد.

قضیه ۳.۲.۱. [11, Theorem 2.7] اگر X یک فضای هاسدورف و موضعاً فشرده باشد آنگاه $C_\circ(X)^* \cong M(X)$ که $M(X)$ مجموعه همه اندازه‌های بورل کراندار و منظم روی X است. در حقیقت اگر $\Lambda : C_\circ(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ یک تابعک خطی پیوسته روی $C_\circ(X)$ باشد، آنگاه اندازه بورل، منظم و کراندار μ موجود است که $\Lambda(f) = \int f(x)d\mu(x)$ همچنین $\|\mu\| = \|\Lambda\|$.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری و τ یک توپولوژی روی X باشد. X را یک فضای برداری توپولوژیک نامیم هرگاه

الف) اعمال فضای برداری پیوسته باشند، به عبارتی جمع و ضرب اسکالر پیوسته باشند.

ب) مجموعه‌های تک عضوی بسته باشند.

بدیهی است هر فضای نرمدار یک فضای برداری توپولوژیک است. مانند فضاهای نرمدار برای یک فضای برداری توپولوژیک X، فضای تمام تابعک‌های خطی پیوسته روی X را با نماد X^* نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک باشد طوری که X^* نقاط X را جدا کند. ضعیف‌ترین توپولوژی روی X را که تحت آن همه اعضای X^* پیوسته هستند، توپولوژی ضعیف روی X می‌نامیم و با نماد τ_w نمایش می‌دهیم.

لازم به ذکر است در هر فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب X، X^* نقاط X را جدا می‌کند. در اینجا منظور از موضعاً محدبی آن است که X یک پایه موضعی (پایه‌ای برای همسایگی صفر) متشکل از زیر مجموعه های محدب X داشته باشد. پس بخصوص در هر فضای نرمدار X، X^* نقاط X را جدا می‌کند.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای نرمدار باشد. توپولوژی ضعیف تولید شده توسط X روی X^*، یعنی ضعیف‌ترین توپولوژی روی X^* که تحت آن برای هر $x \in X$، تابعک خطی $f_x(\varphi) = \varphi(x)$،

[۱] Riesz

$\varphi \in X^*$، پیوسته است توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* نامیده می‌شود.

در واقع برای هر $\varphi_\circ \in X^*$ ، خانواده تمام مجموعه‌هایی به صورت زیر تشکیل یک پایه موضعی در نقطه $\varphi_\circ$ نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* می‌دهند.

$$V = \bigcap_{i=۱}^{n} \{\varphi \in X^* \ : \ |\varphi(x_i) - \varphi_\circ(x_i)| < r_i\} \tag{۱.۱}$$

که در آن $n \in \mathbb{N}$ و $r_۱, r_۲, ..., r_n \in \mathbb{R}^+$ و $x_۱, x_۲, ..., x_n \in X$.

با توجه به تعریف، برای تور (x^*_α) در X^* و $x^* \in X^*$ ، $x^*_\alpha \longrightarrow x^*$ در توپولوژی ضعیف ستاره اگر و تنها اگر $x^*_\alpha(x) \longrightarrow x^*(x)$ برای هر $x \in X$.

تعریف ۷.۲.۱. برای هر عملگر $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ ، عملگر خطی و کرانداری مانند $T^* \in \mathcal{B}(Y^*, X^*)$ به طور یکتا نظیر می‌شود که برای هر $y^* \in Y^*$ و $x^* \in X^*$، $T^*(y^*)(x) = y^*(T(x))$. عملگر T^* عملگر الحاقی وابسته به T نامیده می‌شود.

لازم به ذکر است برای $T \in \mathcal{B}(X, Y)$، $\|T^*\| = \|T\|$.

گزاره ۸.۲.۱. برای فضاهای نرمدار X و Y و $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ عملگر T^*، نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره پیوسته است.

برهان. فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند و $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. فرض کنید (y^*_α) یک تور در Y^* باشد که در توپولوژی ضعیف ستاره به $y^* \in Y^*$ همگراست. برای همگرایی $(T^*(y^*_\alpha))$ به $T^*(y^*)$ در توپولوژی ضعیف ستاره باید نشان دهیم برای هر $x \in X$، $T^*(y^*_\alpha)(x) \longrightarrow T^*(y^*)(x)$. اما

$$T^*(y^*_\alpha)(x) = y^*_\alpha(T(x)) \longrightarrow y^*(T(x)) = T^*(y^*)(x)$$

و لذا حکم ثابت می‌شود. $\square$

قضیه ۹.۲.۱. اگر X و Y فضاهای باناخ باشند و نگاشت خطی $T : X \longrightarrow Y$ یک طولپای پوشا باشد آنگاه $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ نیز یک طولپای پوشاست.

برهان. با توجه به اینکه T یک نگاشت خطی و دوسویی است عملگر $S : Y \longrightarrow X$ وجود دارد که $S \circ T = I_X$ و $T \circ S = I_Y$ که I_X و I_Y عملگرهای همانی روی X, Y هستند. بعلاوه بدیهی است S نیز طولپاست. به سادگی دیده می‌شود

$$T^* \circ S^* = I_{X^*} \ \ , \ \ S^* \circ T^* = I_{Y^*}$$

پس بخصوص T^* دوسویی است. از آنجا که S طولپاست، $\|S\| = ۱$ و بنابراین $\|S^*\| = \|S\| = ۱$ از طرفی $\|T^*\| = \|T\| = ۱$ و این نیز نتیجه می‌دهد T^* طولپاست زیرا برای هر $y^* \in Y^*$،

$$\|T^*(y^*)\| \leq \|T^*\| \ \|y^*\| = \|y^*\|$$

$$\|T^*(y^*)\| \geq \|S^*(T^*(y^*))\| = \|y^*\|$$

که نتیجه می‌دهد $\|T^* y^*\| = \|y^*\|$. □

قضیه ۱۰.۲.۱. (قضیه باناخ-آلاغلو) [1, Theorem 3.21] فرض کنیم $(X, \| \cdot \|)$ یک فضای نرمدار باشد. در این صورت گوی واحد بسته X^* نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره، فشرده است.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری و $\emptyset \neq K \subseteq X$. مجموعه $\emptyset \neq S \subseteq K$ را یک مجموعه اکستریم برای K گوییم هرگاه برای هر $۰ < t < ۱$ و هر $x, y \in K$، از $tx + (۱ - t)y \in S$ نتیجه شود که $x, y \in S$. اگر مجموعه اکستریم S تک نقطه‌ای $\{x\}$ باشد آن را یک نقطه اکستریم K می‌گوییم. مجموعه نقاط اکستریم K را با نماد $ext(K)$ و یا به صورت $E(K)$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۱۲.۲.۱. در هر فضای نرمدار $(X, \|.\|)$ اگر $x_۰ \in X$ نقطه اکستریم برای گوی واحد بسته X باشد آنگاه $\|x_۰\| = ۱$.

برهان. به برهان خلف فرض کنیم $\|x_۰\| < ۱$. قرار می‌دهیم $t = \|x_۰\|$ از آنجا که یکی از نامساوی‌های $\frac{۱}{۲} < t$ یا $\frac{۱}{۲} < ۱ - t$ برقرار است بدون کم شدن کلیت برهان فرض کنیم $\frac{۱}{۲} < t$. پس $x_۰ = \frac{۱}{۲}(۲tx_۰) + \frac{۱}{۲}(۲ - ۲t)x_۰$ و بعلاوه $\|۲tx_۰\| \leq ۱$ و $(۲ - ۲t)\|x_۰\| = ۲t - ۲t^۲ < ۲t < ۱$ که با نقطه اکستریم بودن $x_۰$ برای گوی واحد بسته X مغایرت دارد. □

تبصره ۱۳.۲.۱. لازم به ذکر است برای اینکه $x_\circ$ نقطه اکستریم گوی واحد بسته فضای نرمدار $(X, \|\cdot\|)$ باشد تنها کافی است از تساوی $x_\circ = \frac{۱}{۲}y + \frac{۱}{۲}z$ که در آن y, z در گوی واحد بسته X قرار دارند نتیجه شود $x_\circ = y = z$. زیرا در صورتی که $x_\circ = ta + (۱ - t)b$ که در آن $۰ \leq t \leq ۱$ و a, b در گوی واحد بسته X باشد. آنگاه بدون کم شدن کلیت می‌توان فرض کرد $t \leq \frac{۱}{۲}$ با توجه به محدب بودن گوی واحد بسته X، $c = ۲ta + (۱ - ۲t)b$ نیز در گوی واحد بسته X قرار دارد و چون $x_\circ = \frac{۱}{۲}(c + b)$ لذا $c = b$ که از آن نتیجه می‌شود $a = b$.

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری باشد و $A \subseteq X$. پوش محدب A را با نماد $co(A)$ نمایش می‌دهیم که کوچکترین مجموعه محدب شامل A است. به عبارت دیگر $co(A)$ مجموعه همه ترکیبات محدب از اعضای A است. یعنی $x \in co(A)$ اگر و تنها اگر $a_۱, ..., a_n \in A$ و اسکالرهای نامنفی $c_۱, ..., c_n$ موجود باشند که $\sum_{i=۱}^n c_i = ۱$ و $x = \sum_{i=۱}^n c_i a_i$.

قضیه ۱۵.۲.۱. (قضیه کرین-میلمن) [1, Theorem 3.31] فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک باشد که X^* نقاط X را جدا می‌کند. اگر K زیر مجموعه محدب و فشرده X باشد آنگاه $K = \overline{co(E(K))}$.

قضیه ۱۶.۲.۱. [17, Theorem 1.11] فرض کنیم E یک فضای موضعاً محدب و C یک زیر مجموعه محدب و فشرده ناتهی E باشد. در این صورت هر $\Lambda \in E^*$ ماکسیمم قدر مطلق خود را روی C در نقطه‌ی اکستریمی از C اخذ می‌کند.

۳.۱ جبرهای باناخ

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم A یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط باشد. آنگاه A یک جبر است هرگاه نگاشت ضربی مانند $A \times A \longrightarrow A$ که $(a, b) \longmapsto ab$ با خواص زیر وجود داشته باشد. برای هر $a, b, c \in A$ و هر $\lambda \in \mathbb{C}$،

الف) $a(bc) = (ab)c$

ب) $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$

ج) $a(b+c) = ab + ac$ و $(a+b)c = ac + bc$.

بنابراین هر فضای برداری A که حلقه‌ی ضربی نیز باشد یک جبر است. جبر A جابه‌جایی است هرگاه A بعنوان حلقه جابه‌جایی باشد یعنی برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $ab = ba$ و جبر A یکدار است هرگاه عضوی مانند e وجود داشته باشد که برای هر $a \in A$، $ea = ae = a$.

در جبر یکدار A، عضو $x \in A$ را وارون‌پذیر می‌نامیم هرگاه $y \in A$ موجود باشد چنان که $xy = yx = e$. مجموعه تمام اعضای وارون‌پذیر A را با نماد A^{-1} نمایش می‌دهیم.

مثال ۲.۳.۱. فرض کنید X یک فضای فشرده و هاسدورف باشد. می‌دانیم $C(X)$، فضای تمام توابع پیوسته مختلط مقدار روی X، یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط می‌باشد. حال نگاشت ضرب را همان ضرب نقطه‌ای تعریف کنیم به سادگی دیده می‌شود $C(X)$ در خواص سه گانه صدق می‌کند پس $C(X)$ یک جبر است. علاوه بر این با توجه به نحوه‌ی تعریف ضرب واضح است که یک جبر جابه‌جایی می‌باشد و چون شامل تابع ثابت یک است بنابراین یک جبر جابه‌جایی یکدار است.

مثال ۳.۳.۱. فرض کنیم X یک فضای موضعاً فشرده هاسدورف باشد، $C_{\circ}(X)$ فضای تمام توابع پیوسته مختلط مقدار روی X که در بی‌نهایت صفر می‌شوند نیز یک جبر جابه‌جایی است که در حالت کلی غیر یکدار است مگر اینکه X فشرده باشد.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنیم A یک جبر روی میدان اعداد مختلط باشد. آنگاه A یک جبر نرمدار است هرگاه نرمی مانند $\|\cdot\|$ روی A وجود داشته باشد که برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$. نرمی که خاصیت فوق را داشته باشد یک نرم جبری روی A می‌نامیم. جبر نرمدار A یک جبر باناخ گفته می‌شود هرگاه A نسبت به متر حاصل از نرم کامل باشد به عبارتی دیگر هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

متذکر می‌شویم اگر جبر باناخ A دارای عضو یکه e باشد آنگاه بنا به قضیه ۱.۱۰ از [۲۰] با جایگزینی یک نرم هم ارز می‌توان فرض کرد $\|e\| = ۱$.

به عنوان مثال برای فضای هاسدورف و فشرده X ، جبر $C(X)$ که یک جبر جابجایی یکدار است با نرم سوپریمم

$$\|f\|_X = \sup \{|f(x)| : x \in X\}$$

یک جبر باناخ است. لازم به ذکر است به طور مشابه برای فضای موضعاً فشرده و هاسدورف X، $C_\circ(X)$ با نرم سوپریمم یک جبر باناخ جابه‌جایی (نه لزوماً یکدار) است.

تعریف ۵.۳.۱. زیر فضای I از جبر A را یک ایده‌آل چپ نامیم هرگاه برای هر $x \in A$ و $y \in I$، $xy \in I$. به همین ترتیب زیر فضای J از A را یک ایده‌آل راست می‌نامیم هرگاه برای هر $x \in A$ و $y \in J$، $yx \in J$. ایده‌آل دو طرفه را به اختصار ایده‌آل می‌نامیم.

ایده‌آل سره I از جبر A را یک ایده‌آل ماکسیمال نامیم هرگاه نسبت به رابطه شمول عضو ماکسیمال گردایه تمام ایده‌آل‌های سره باشد. مجموعه تمام ایده آل‌های ماکسیمال A را با نماد M_A نمایش می‌دهیم. با بکار بردن لم زرن نتیجه می‌شود هر ایده آل سره در یک جبر جابجایی یکدار، در یک ایده آل ماکسیمال قرار دارد.

قضیه ۶.۳.۱. [1, Theorem 4.14] در جبر باناخ یکدار A ، مجموعه اعضای وارن‌پذیر A باز است و بستار هر ایده‌آل سره یک ایده‌آل سره است، بخصوص هر ایده‌آل ماکسیمال A بسته است.

تعریف ۷.۳.۱. ایده‌آل چپ I از جبر A را یک ایده‌آل چپ مدولار نامیم هرگاه عضوی مانند $u \in A$ موجود باشد که به طوری که برای هر $x \in A$ ، $xu - x \in I$. به طور مشابه ایده‌آل راست مدولار تعریف می‌شود. ایده‌آل I از جبر A را مدولار نامیم هرگاه $u \in A$ وجود داشته باشد که $ux - x, xu - x \in I$.

به وضوح در حالتی که A یک جبر یکدار باشد، هر ایده‌آل A یک ایده‌آل مدولار است.

تعریف ۸.۳.۱. فرض کنید A یک جبر باشد منظور از یک مشخصه یا همریختی مختلط یک تابعک خطی و ضربی ناصفر روی A است. مجموعه تمام همریختی‌های A را با نماد Φ_A نمایش می‌دهیم.

قضیه ۹.۳.۱. [22, Theorem 8.4] اگر A یک جبر باناخ جابجایی باشد، آنگاه ایده‌آل‌های ماکسیمال مدولار A در تناظر دوسویی با اعضای Φ_A هستند.

نتیجه ۱۰.۳.۱. [1, Corollary 4.47] فرض کنیم A یک جبر باناخ جابجایی یکدار باشد. عضو $a \in A$ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $\varphi \in \Phi_A$، $\varphi(a) \neq \circ$.