دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (جبر)

عنوان:

مدول های ضربی و ایده السازی همگن

استاد راهنما:

دکتر حسین فضائلی مقیمی

استاد مشاور:

دکتر محمدحسین حسینی

نگارش:

سمیه سلیمان پور

تابستان ۱۳۸۸

چکیده

در سرتا سر این پایان نامه همه حلقه ها جا به جایی و یکدار و همه مدول ها یکانی هستند.

هدف این پایان نامه تحقیق در مورد چگونگی ارتباط بین یک ایده ال همگن $N_{(+)}I$ از $R(M)$ با ایده ال I از حلقه R و زیر مدول N از $R-$مدول M است.

ما نشان داده ایم که اگر M یک $R-$مدول ضربی و $N_{(+)}I$ یک ایده ال همگن اصلی متقاطع (اصلی متصل) از $R(M)$ باشد، آنگاه این خواص می توانند به I و N منتقل شوند. همچنین شرایطی را ارائه می دهیم که عکس مطلب نیز برقرار باشد.

علاوه بر این ثابت می کنیم که $N_{(+)}I$ یک ایده ال بزرگ (کوچک) از $R(M)$ است، اگر و تنها اگر N یک زیر مدول بزرگ M (Iایده ال کوچک R) باشد.

در ادامه شرایط لازم و کافی ارائه خواهیم داد تا یک ایده ال همگن به طور تقریبی ضربی (ضربی ضعیف، ضربی تعمیم یافته)، تصویری، هموار با تولید متناهی، خالص و معکوس پذیر (شبه معکوس پذیر) شود.

ما تعیین می کنیم که چه موقع $R(M)$، حلقه توزیعپذیر، $ZPI-$ حلقه عمومی، حلقه شبه ارزیابی، $P-$حلقه، حلقه منسجم و حلقه هادی متناهی می شود.

سر انجام مفهوم زیر مدول های به طور ضعیف اول (به عنوان تعمیمی از ایده ال های به طور ضعیف اول) را ارائه می کنیم و خواص گوناگون و مشخصه سازی زیر مدول های به طور ضعیف اول از مدول های ضربی باوفا را مورد مطالعه قرار داده و ارتباط آنها با ایده السازی بررسی می شود.

واژگان کلیدی

مدول ضربی، زیر مدول اصلی متقاطع، زیر مدول اصلی متصل، زیر مدول بزرگ، زیر مدول کوچک، ایده السازی، ایده ال ضربی ضعیف، ایده ال ضربی تعمیم یافته، ایده ال تصویری، ایده ال با تولید متناهی هموار، ایده ال خالص، ایده ال معکوس پذیر، ایده ال شبه معکوس پذیر، حلقه توزیعپذیر، ZPI – حلقه عمومی، حلقه شبه– ارزیابی، حلقه منسجم.

فهرست مطالب

مقدمه و تاریخچه

مراجع اصلی این تحقیق مقالات " مدول های ضربی و ایده السازی همگن (۱) و (۲) " ([۵] و [٦])، است. لازم به ذکر است شماره سوم این مقاله نیز در سال ۲۰۰۸ به چاپ رسیده است [۷].

این پایان نامه در ادامه کار خانم ها آ. قاسم نژاد و م. مقیمیان می باشد که به ترتیب در مراجع [٤٨] و [٤٩] آمده اند. با نظر استاد راهنمای محترم از آوردن مجدد اثبات های ذکر شده در مراجع فوق صرف نظر شده است.

به نظر می آید در سال ۱۹٦۲ برای اولین بار مفهوم ایده السازی توسط ام. ناگاتا[1] در کتاب " حلقه های موضعی" مطرح شده است. در سال ۱۹۸۸ جی. ای. هوکابا[2] به گسترش این مفهوم در بخش ۲۵ کتاب " حلقه های جا به جایی با مقسوم علیه صفر " پرداخته است. وی بیان می کند که اگر R یک حلقه و M یک $R-$ مدول باشد، آنگاه $R(M)=\{(r,m)| r\in R, m\in M\}$ با اعمال جمع و ضرب زیر

$$(r_1, m_1)+(r_2, m_2)=(r_1+r_2, m_1+m_2)$$

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2)=(r_1r_2, r_1m_2+r_2m_1)$$

یک حلقه است، که حلقه ایده الساز M نامیده می شود، که با $R_{(+)}M$ نیز نمایش می دهند.

او در ادامه برخی خواص اولیه چون اشتراک و ضرب دو ایده ال همگن از این حلقه را مطرح می کند. سپس شکل ایده ال های اول و ماکسیمال این حلقه را مشخص می سازد.

---

[1]. M. Nagata
[2]. J. A. Huckaba

در سال ۲۰۰۰، د. د. اندرسون[3] در مقاله ای ارتباط بین مدول های ضربی و فرایند ایده السازی را مورد بررسی قرار داد. او ثابت کرد که N یک زیر مدول ضربی از $R-$ مدول M است، اگر و تنها اگر $N_{(+)}0$ یک ایده ال ضربی از $R(M)$ باشد [۱۵].

این مقاله که نگاه جدیدی به فرایند ایده السازی داشت، مورد توجه ام. ام. علی قرار گرفت. او در سال ۲۰۰٦ در مقاله ای به نام " ایده السازی و قضایای د. د. اندرسون " نتایجی را که د. د. اندرسون برای ایده ال $N_{(+)}0$ بدست آورده بود به ایده ال های $I_{(+)}IM$ و نیز $I_{(+)}N$ که در آن I یک ایده ال از R و N یک زیر مدول از M است، تعمیم داد [۲].

ام. ام . علی در سال ۲۰۰٦، در مقاله ای دیگر به نام " مدول های ضربی و ایده السازی همگن " که یکی از مراجع اصلی این پایان نامه است، به بررسی ارتباط بین مدول های (ایده ال های) اصلی متقاطع، اصلی متصل، حذفی ضعیف و حذفی محدود با مفهوم ایده السازی پرداخت. او نشان داد که اگر I یک ایده ال اصلی متقاطع از R و N یک زیر مدول اصلی متقاطع از M باشد به طوریکه $annI+[IM:N]=R$، آنگاه $I_{(+)}N$ اصلی متقاطع است [گزاره۲-۲-۸، را ببینید.].

در سال ۲۰۰۷، او در ادامه کار خود شماره دوم مقاله قبلی را به نام " مدول های ضربی و ایده السازی همگن " را که یکی دیگر از مراجع اصلی این پایان نامه است، منتشر کرد.

او این بار با نگاه وسیع تری شرایط لازم و کافی برای اینکه یک ایده ال همگن، به طور تقریبی ضربی، ضربی تعمیم یافته، تصویری، هموار با تولید متناهی، خالص و معکوسپذیر(شبه- معکوسپذیر) باشد را ارائه داد. به عنوان مثال نشان داد اگر $I_{(+)}N$ یک ایده ال خالص، معکوس پذیر، ضربی تعمیم یافته و

---

[3]. D. D. Anderson

به طور تقریبی ضربی باشد، آنگاه ایده ال I و نیز زیـر مـدول N از $R-$ مـدول M خـالص، معکـوس پذیر، ضربی تعمیم یافته و به طور تقریبی ضربی می باشند [گزاره ۳–۱–۴۸، را ببینید.].

در ادامه در همین مقاله شرایطی را که $R(M)$ یک حلقه شبه– ارزیابی و $P-$ حلقه باشد را تعیـین کـرد [گزاره ۳–۲–۳۱، را ببینید.].

ایده السازی از جنبه های دیگر نیز مورد توجه بوده است. به عنوان مثال ام. آکستل[4] و جی. استیکلز[5] در سال ۲۰۰۵، گراف مقسوم علیه صفر حلقه ایده السازی یک مدول را مطالعه کردند و قطر و کمر برخـی گراف های مقسوم علیه صفر حلقه های ایده السازی مدول های خاص را به دست آورده اند [۲۱].

البته در سال ۲۰۰۸، ح. ر. میمنی و س. یاسمی گراف های با مقسوم علیه صفر حلقه ایده السازی یـک ایده ال را بررسی کرده اند [۳۷].

یکی از آخرین کارها در این زمینه که توسـط د. د. اندرسـون و ام. وینـدرز[6] در سـال ۲۰۰۹، بـه چـاپ رسیده است که به بررسی برخی خواص جبری دیگر حلقه ایده السازی پرداخته است [۱۹] .

---

[4]. M. Axtell

[5]. J. Stickles

[6]. M. Winders

فصل اول

ارتباط مدول های ضربی با

ایده ال های $\theta(M)$ و $S(M)$

۱-۱ مدول های ضربی

در این بخش به مطالعه مدول های ضربی می پردازیم. مدولهای ضربی نوع خاصی از مدولها هستند که از سال ۱۹۸۱ تاکنون مورد توجه بوده اند. در این بخش ارتباط بین حلقه R و مدول M با ایده ال های $\theta(M)$ و $S(M)$ را مورد بررسی قرار می دهیم.

تعریف ۱-۱-۱ مدول M را *ضربی* نامند، هرگاه به ازای هر زیر مدول N از M، ایده ال I از حلقه R موجود باشد به طوریکه $N = IM$. به خصوص ایده ال I از حلقه R را *ضربی* نامند، هرگاه برای هر ایده ال J از I، ایده ال C از حلقه R موجود باشد به طوریکه $J = CI$.

مثال ۱-۱-۲ مدولهای دوری، ضربی هستند، زیرا اگر N زیرمدول دلخواهی از $R-$ مدول دوری Rm باشد، آنگاه $N = Im$ که در آن $I = \{r \in R \mid rm \in N\}$. پس $N = IRm$.

به خصوص ایده ال های اصلی نیز ضربی هستند.

تعریف ۱-۱-۳ $R-$ مدول M را *به طور موضعی دوری* می نامند، هرگاه برای هر ایده ال ماکسیمال P از R، M_P یک R_P- مدول دوری باشد.

گزاره ۱-۱-٤ مدول با تولید متناهی M ضربی است، اگر و تنها اگر به طور موضعی دوری باشد.

اثبات. به [٤٨]، قضیه ۲-۱-۲۰ رجوع شود. ■

تعریف ۱-۱-۵ ایده‌ال $\{r \in R \mid rm = 0\}$ از R را *پوچساز* m نامند و آن را با نماد $[0 :_R m]$ یا $ann(m)$ نشان می‌دهند. اگر $ann(m) \neq 0$، m را عنصر *تابدار* و اگر $ann(m) = 0$، m را *بدون تاب* نامند. مجموعه عناصر تابدار M یک زیر مدول M است، که آن را زیر مدول تابدار M نامند و با

$T(M)$ نمایش می‌دهند. اگر $T(M)=0$، آنگاه $R-$مدول M، *بدون تاب* و اگر $T(M)=M$، آنگاه $R-$ مدول M را *تابدار* می‌نامند.

مثال ۱-۱-٦ $Z-$ مدول Z بدون تاب و زیرمدول $\{0\}$ از همین مدول تابدار است.

تعریف ۱-۱-۷ اگر M یک $R-$ مدول باشد، آنگاه $\frac{M}{N}$ با عمل زیر یک $R-$ مدول است.

$$R\times\frac{M}{N}\to\frac{M}{N}$$

$$(r,m+N)\mapsto rm+N$$

در این حالت $ann\left(\frac{M}{N}\right)$ که ایده‌ال $\{r\in R \mid rM\subseteq N\}$ از R است را با نماد $[N:M]$ نمایش می دهند.

مثال ۱-۱-۸ اگر $Z-$ مدول Z_4 را در نظر بگیریم، آنگاه $[\{\bar{0},\bar{2}\}:Z_4]=2Z$.

گزاره ۱-۱-۹ مدول M ضربی است، اگر و تنها اگر برای هر زیرمدول N از M، $N=[N:M]M$.

اثبات. به [٤٨]، لم ۱-۱-۹ رجوع شود . ■

گزاره ۱-۱-۱۰ زیر مدول K از $R-$ مدول M ضربی است، اگر و تنها اگر برای هر زیر مدول N از M، $N\cap K=[N:K]K$.

اثبات. به [٤٩]، لم ۲-۱-۷ رجوع شود. ■

گزاره ۱-۱-۱۱ مدول M ضربی است، اگر و تنها اگر برای هر عنصر $m\in M$، ایده الی از R مانند I موجود باشد به طوریکه $Rm = IM$.

اثبات. به [٤٨]، گزاره ۲-۱-۸ رجوع شود. ■

گزاره ۱-۱-۱۲ فرض کنید M یک $R-$ مدول ضربی باشد. در این صورت برای هر مجموعه ناتهی از ایده ال های I_{λ} که $(\lambda \in \Lambda)$ از R،

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_{\lambda} M = \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} [I_{\lambda} + annM] \right) M$$

اثبات. به [٤٨]، لم ۲-۱-۱۹ رجوع شود. ■

تعریف ۱-۱-۱۳ فرض کنید M یک $R-$ مدول و N زیر مدولی از M و I ایده الی از حلقه R باشد. در این صورت *زیر مدول باقی مانده* N *توسط* I به صورت

$$[N:_M I] = \{m \in M; \mathrm{Im} \subseteq N\}$$

تعریف می شود.

گزاره ۱-۱-١٤ اگر M یک $R-$ مدول ضربی باشد، آنگاه $[N:_M I] = [N:IM]M$.

اثبات. به [٤٩]، گزاره ۱-۱-۲۳ رجوع شود. ■

نتیجه ۱-۱-۱۵ اگر M یک $R-$ مدول ضربی و باوفا (یعنی $annM = 0$) باشد، آنگاه $[0:_M I] = (annI)M$.

اثبات. به[٤٩]، لم۱-۱-۲۳ رجوع شود. ■

تعریف۱-۱-١٦ فرض کنید M یک $R-$ مدول و P ایده ال ماکسیمالی از حلقه R باشد. در این صورت

$$T_P(M) = \{m \in M \mid \exists p \in P; (1-p)m = 0\}$$

یک زیر مدول از M می باشد. اگر $T_P(M) = M$، آنگاه M را $P-$ *تابدار* نامند.

مثال ۱-۱-۱۷ $Z-$ مدول Z_4، $3Z-$ تابدار است .

تعریف ۱-۱-۱۸ مدول M، P- دوری نامیده می شود اگر عناصر p در P و m در M موجود باشند به طوریکه $(1-p)M \subseteq Rm$.

مثال ۱-۱-۱۹ Z- مدول Z، $2Z$- دوری است .

گزاره ۱-۱-۲۰ R- مدول M ضربی است، اگر و تنها اگر برای هر ایده ال ماکسیمال P از R، M، P- تابدار یا P- دوری باشد .

اثبات. به [٤٩]، قضیه۲-۱-۱۵ رجوع شود . ■

۱-۲ ایده ال های $\theta(M)$ و $S(M)$

ایده ال های وابسته $\theta(M)=\sum_{m\in M}[Rm:M]$ نقش مهمی در مطالعه مدول های ضربی ایفا می کنند.

برای هر $R-$مدول ضربی M همواره داریم

$$M=\theta(M)M$$

بنا به گزاره ۱-۱-۹،

$$M=\sum_{m\in M}Rm=\sum_{m\in M}[Rm:M]M=\left(\sum_{m\in M}[Rm:M]\right)M=\theta(M)M$$

به خصوص اگر N زیر مدولی از $R-$مدول ضربی M باشد، آنگاه بنا به گزاره ۱-۱-۹،

$$N=[N:M]M=[N:M](\theta(M)M)$$

$$=\theta(M)([N:M]M)=\theta(M)N$$

لم ۱-۲-۱ فرض کنید $R-$مدول M ضربی باشد. در این صورت اگر I یک ایده ال با تولید متناهی از R باشد به طوریکه $I\subseteq\theta(M)$، آنگاه زیر مدول IM از M با تولید متناهی است.

برعکس، اگر به ازای ایده ال I از R، زیر مدول IM از M با تولید متناهی باشد، آنگاه $I \subseteq \theta(M)$.

اثبات. به [٤٨]، گزاره ٢-٢-١ رجوع شود. ■

نتیجه ١-٢-٢ فرض کنید M یک $R-$مدول ضربی باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

الف) M یک $R-$مدول با تولید متناهی است؛

ب) $\theta(M)=R$؛

ج) $\theta(M)$ یک ایده ال با تولید متناهی است.

اثبات. به [٤٨]، گزاره ٢-٢-٢ رجوع شود. ■

لم ١-٢-٣ فرض کنید M یک $R-$مدول باشد. در این صورت

الف) اگر M یک $R-$مدول ضربی و N یک زیر مدول از M باشد، آنگاه $N=\theta(M)N$.

ب) فرض کنید M یک $R-$مدول ضربی با تولید متناهی، I و J ایده ال هایی از R با این خاصیت که $IM=JM$. در این صورت $I+[0:M]=J+[0:M]$.

ج) فرض کنید M یک $R-$مدول ضربی با تولید متناهی و I یک ایده ال از R به طوریکه $M=IM$، در این صورت $R=I+[0:M]$.

اثبات. الف) در ابتدای بخش ١-٢ اثبات شده است.

ب) به [٤٩]، نتیجه ١-١-٣٦ رجوع شود.

ج) بنا به (ب)، واضح است. ■

گزاره ١-٢-٤ فرض کنید R یک حلقه و M یک $R-$مدول ضربی باوفا باشد. در این صورت $\theta(M)=S(M)$، که در آن $S(M)=\bigcap\{I+[0:M]\,;IM=M\}$، که I یک ایده ال از R است .

اثبات. به [٤٨]، قضیه١-٢-١١ رجوع شود. ■

لم ١-٢-٥ شرایط زیر برای $R-$ مدول M معادلند:

الف) M با تولید متناهی و به طور موضعی دوری است؛

ب) $\theta(M)=R$.

اثبات. به [٤٨]، قضیه ٢-١-٢٠ و نتیجه ١-٢-٢ رجوع شود. ■

گزاره ١-٢-٦ فرض کنید I ایده‌الی ضربی از حلقه R باشد. در این‌صورت برای هر ایده ال ماکسیمال M از R، I_M ایده‌ال اصلی است. به خصوص اگر $\theta(I)\supseteq M$، آنگاه $I_M=0_M$.

اثبات. به [٤٨]، گزاره ٢-٢-١٢ رجوع شود. ■

فصل دوم

زیرمدول های اصلی متقاطع و متصل

۲-۱ ایده السازی

در این بخش ابتدا از روی حلقه R و $R-$ مدول M، حلقه ای جدید می سازیم و آن را با $R(M)$ نمایش می دهیم. به علاوه نشان می دهیم که چه ارتباطی بین زیر مدول های M و ایده ال های حلقه $R(M)$ برقرار است

لم ۲-۱-۱ فرض کنید R یک حلقه جا به جایی و یکدار و M یک $R-$مدول یکانی باشد. در این صورت مجموعه $R(M)=\{(r,m)|\ r\in R, m\in M\}$، با اعمال

$$(r_1,m_1)+(r_2,m_2)=(r_1+r_2,m_1+m_2)$$

$$(r_1,m_1)(r_2,m_2)=(r_1r_2,r_1m_2+r_2m_1)$$

یک حلقه جا به جایی و یکدار است که عضو خنثی آن نسبت به عمل جمع،$(0,0)$ و عضو یکه آن $(1,0)$ است.

اثبات. به سادگی انجام پذیر است. ■

تعریف ۲-۱-۲ حلقه $(R(M),+,.)$ که به طور خلاصه با $R(M)$ یا $R_{(+)}M$ نمایش داده می شود را *حلقه ایده الساز* M می نامند .

تبصره ۲-۱-۳ اگر I یک ایده ال از حلقه R و N یک زیر مدول از R- مدول M باشد، آنگاه لزومی ندارد که $I_{(+)}N$ یک ایده ال از حلقه $R(M)$ باشد.

مثال ۲-۱-٤ $Z_{4\,(+)}0$ یک ایده ال از $Z_{4\,(+)}Z_2$ نیست.

زیرا اگر عنصر $\left(\bar{2},\bar{1}\right)\in Z_{4\,(+)}Z_2$ و $\left(\bar{1},\bar{0}\right)\in Z_{4\,(+)}0$ را در نظر بگیرید، آنگاه

$$\left(\bar{2},\bar{1}\right)\left(\bar{1},\bar{0}\right)=\left(\bar{2},\bar{1}\right)\notin Z_{4\,(+)}0$$

لم ۲-۱-۵ فرض کنید R یک حلقه و M یک $R-$مدول باشد. در این صورت

الف) حلقه R در حلقه $R(M)$ قابل نشاندن است.

ب) اگر N زیر مدولی از R – مدول M باشد، آنگاه $0_{(+)} N$ یک ایده ال از حلقه $R(M)$ است. به خصوص $0_{(+)} M$ یک ایده ال پوچ توان از حلقه $R(M)$ است و نگاشت $N \to 0_{(+)} N$ تناظر یک به یکی بین زیر مدول های M و ایده ال های $R(M)$ است که مشمول در $0_{(+)} N$ هستند.

ج) اگر N زیر مدولی از R – مدول M باشد، آنگاه $R(N)$ یک زیر حلقه از $R(M)$ است.

د) برای هر ایده ال I از R، $(I_{(+)} M)(0_{(+)} M) = 0_{(+)} IM$.

اثبات. الف) به وضوح نگاشت $f: R \to R(M)$ با ضابطه $r \mapsto (r,0)$ یک همریختی حلقه ای و یک به یک است.

ب) و ج) به وضوح نتیجه می شوند.

د) فرض کنید $(i,m) \in I_{(+)} M$ و $(0,m) \in 0_{(+)} M$. در این صورت

$$(i,m)(0,m) = (0,im) \in 0_{(+)} IM$$

پس $(I_{(+)} M)(0_{(+)} M) = 0_{(+)} IM$، لذا حکم برقرار است. ■

لم۲-۱-٦ فرض کنید R یک حلقه و M یک R – مدول و N زیر مدولی از M باشد. در این صورت

الف) اگر J ایده ال دلخواهی از حلقه $R(M)$ و شامل $0_{(+)} M$ باشد، آنگاه ایده الی مانند I از حلقه R موجود است به طوریکه $J = I_{(+)} M$.

ب) اگر J ایده ال دلخواهی از حلقه $R(M)$ و مشمول در $0_{(+)} N$ باشد، آنگاه زیر مدولی مانند K از N موجود است به طوریکه $J = 0_{(+)} K$.

اثبات. به [٤٩]، گزاره ۲-۱-٤ رجوع شود. ■

گزاره ۲-۱-۷ فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. در این صورت $R \cong \frac{R(M)}{0_{(+)}M}$.

اثبات. به [٤٩]، گزاره ۲-۱-۵ رجوع شود. ■

بنابراین بنا به لم۲-۱-٦، نگاشت $I \to I_{(+)}M$ یک تناظر یک به یک بین ایده ال های حلقه R و ایده ال های حلقه $R(M)$ است که شامل $0_{(+)}M$ هستند، بدست می دهد.

نتیجه ۲-۱-۸ در حلقه ی $R(M)$ گزاره های زیر برقرار هستند.

الف) فرض کنید J یک ایده ال از حلقه $R(M)$ باشد. در این صورت اگر $I=\{r \in R \mid \exists m \in M; (r,m) \in J\}$ و $N=\{m \in M \mid \exists r \in R; (r,m) \in J\}$، آنگاه I یک ایده ال از R و N یک زیر مدول از $R-$ مدول M است که $IM \subseteq N$ و $J \subseteq I_{(+)}N$.

ب) ایده ال های اول حلقه $R(M)$ به شکل $P_{(+)}M$ هستند به طوریکه P یک ایده ال اول از حلقه R است.

ج) ایده ل های ماکسیمال حلقه $R(M)$ به شکل $P_{(+)}M$ هستند به طوریکه P یک ایده ال ماکسیمال از حلقه R است.

اثبات. الف) بنا به [۲۹]، گزاره ۲۵-۱ برقرار است.

ب) فرض کنید H یک ایده ال اول از حلقه $R(M)$ باشد. در این صورت چون $0 = (0_{(+)}M)^2$. بنابراین H شامل $0_{(+)}M$ است. پس بنا به لم ۲-۱-٦، H به شکل $P_{(+)}M$ است که در آن P یک ایده ال اول از R می باشد.

ج) فرض کنید H یک ایده ال ماکسیمال از حلقه $R(M)$ باشد. در این صورت ابتدا نشان می دهیم که ایده ال H شامل $0_{(+)}M$ است.

به برهان خلف اگر عنصر m در M موجود باشد به طوریکه $(0,m)\notin H$، آنگاه $((0,m))+H=((1,0))$.

بنابراین عناصر (s,n) در H و (r,m_1) در $R(M)$ موجود هستند به طوریکه

$$(r,m_1)(0,m)+(s,n)=(1,0)$$

در نتیجه $(s,rm+n)=(1,0)$. پس $(1,n)\in H$.

حال بنا به قسمت (الف)، $R_{(+)}Rn\subseteq H\subseteq R_{(+)}C$. چون H یک ایده ال ماکسیمال است، پس $H=R_{(+)}C$ یا $R_{(+)}C=R(M)$.

اگر $H=R_{(+)}C$، آنگاه $(1,0)$ در H است که تناقض می باشد.

اگر $R_{(+)}C=R(M)$، آنگاه m در C است و بنا به قسمت (الف)، عنصر r_1 در R موجود است به طوریکه $(r_1,m)\in H$. از طرفی $(0,rm)(r_1,m)=(0,rr_1m)\in H$. بنابراین

$$(0,r_1rm)+(r_1s,r_1n)=(r_1,0)\in H$$

در نتیجه $(0,m)\in H$. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است. ■

تعریف ۲-۱-۹ ایده ال H از حلقه $R(M)$ همگن نامیده می شود، هرگاه $H=I_{(+)}N$ که در آن I ایده الی از حلقه R و N زیر مدولی از $R-$مدول M است در این حالت

$$I_{(+)}N=(R_{(+)}M)(I_{(+)}N)=I_{(+)}(IM+N)$$

و این نتیجه می دهد که $IM\subseteq N$، به عبارت معادل $[N:_M I]=M$.

ایده ال های $R(M)$ لزوما همگن نیستند. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۲-۱-۱۰ ایده ال $Z(2Z)(2,2)$ یک ایده ال همگن از $Z(2Z)$ نیست.

زیرا اگر $(2,2)$ $Z(2Z)$ یک ایده ال همگن از حلقه $Z(2Z)=\{(x,2y)\mid x,y\in Z\}$ باشد، آنگاه بنا به تعریف $Z(2Z)(2,2)=mZ_{(+)}2kZ$. چون $(2,2)=(1,0)(2,2)\in mZ_{(+)}2kZ$ پس $m=2$ و $k=1$. از طرفی چون $(0,2)\in 2Z_{(+)}2Z$، باید

$$(0,2)=(x,2y)(2,2)=(2x,2x+4y)$$

یعنی $x=0$ و $y=\frac{1}{2}$، که تناقض است.

گزاره ۲–۱–۱۱ فرض کنید K و L و N زیر مدول هایی از $R-$مدول M باشند. در این صورت

الف) $[K:K]=R$.

ب) اگر $L\subseteq N$، آنگاه $[L:K]\subseteq[N:K]$.

ج) اگر $L\subseteq N$، آنگاه $[K:L]\supseteq[K:N]$.

د) $[(L\cap N):K]=[L:K]\cap[N:K]$.

ه) $[K:(L+N)]=[K:L]\cap[K:N]$.

اثبات. به [٤٩]، گزاره ۱–۱–۵ رجوع شود. ■

لم ۲–۱–۱۲ اگر $I_{(+)}N$ و $J_{(+)}K$ دو ایده ال همگن از حلقه $R(M)$ باشند، آنگاه

$$[I_{(+)}N:_{R(M)}J_{(+)}K]=([I:J]\cap[N:K])_{(+)}[N:_M J]$$

که یک ایده ال همگن از $R(M)$ است.

اثبات. فرض کنید $(r,m)\in[I_{(+)}N:_{R(M)}J_{(+)}K]$. در این صورت $(r,m)(J_{(+)}K)\subseteq(I_{(+)}N)$. پس $rJ_{(+)}(rK+Jm)\subseteq I_{(+)}N$. از این رو $rJ\subseteq I$ و این یعنی $r\in[I:J]$. به علاوه چون $rK+Jm\subseteq N$، پس $rK\subseteq N$ و $Jm\subseteq N$. در نتیجه $r\in[N:K]$ و $m\in[N:_M J]$. بنابراین $r\in[I:J]\cap[N:K]$ و $m\in[N:_M J]$.