دانشگاه تهران

دانشکدهٔ علوم

گروه ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامهٔ دورهٔ کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان

نرخ رشد گروهها

استاد راهنما

دکتر محمد رضا درفشه

نگارش

عمران احمدی درویشوند

تابستان ۱۳۷۸

قدردانی

تقدیم به پدرو مادر مهربانم، دو آینهٔ فداکاری و محبت. اینان که پاک زیستن و صداقت را به من آموختند و تمام هستی خود را در راه به ثمر رساندنم نثار نمودند. باشد که قطره‌ای از دریای بیکران محبتهایشان را سپاس گفته باشم.

تقدیر و سپاس

خداوندا! ای هستی بخش جهان و خالق انسان، ای همانند و سازندهٔ هرچیز، آموزگار و معلم نخستین، سپاس شایستهٔ توست که به من توفیق آموختن علم ودانش عطا کردی. برآستان مقدست سجده شکر بجا میاورم. اکنون که به فضل تو و حمایت اساتید بزرگوارم این پایان نامه را تدوین وتنظیم و آماده دفاع نموده‌ام، برخود فرض میدانم که از این عزیزان سپاسگزاری و آرزو کنم که سایه شان همواره بر سر جویندگان دانش و معرفت گسترده باشد.

با تقدیر فراوان از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر محمد رضادرفشه که بر من منت نهاد و بعنوان راهنما مرا تا اتمام این پژوهش یاری داده و با رهنمودهای ارزنده در تمام مراحل کار مشوق من بودند. سعادت، سلامت و موفقیت روز افزون این استاد گرانقدر را از درگاه‌پروردگار متعال خواهانم.

همچنین از کلیه اساتید گرانقدر گروه‌ریاضی دانشگاه تهران که در تمامی مراحل تحصیلاتم اندوخته هاوتجارب علمی فراوان خود را بیدریغ در اختیار اینجانب قرار دادند سپاسگزارم.

در انتها ازخانم قربانی که در تایپ این پایان نامه دقت و سعی فراوان نمودند، صمیمانه متشکرم و موفقیت ایشان را از درگاه ایزدمنان آروزمندم.

عمران احمدی درویشوند

تابستان ۱۳۷۸

جمهوری اسلامی ایران

دانشگاه تهران

دانشکده علوم

بسمه تعالی

اداره کل تحصیلات تکمیلی دانشگاه

احتراماً به اطلاع میرساند که جلسه دفاع از پایان نامه دوره **کارشناسی ارشد ریاضی محض** **آقای عمران احمدی درویشوند** تحت عنوان :

نرخ رشد گروهها

در تاریخ ۷۸/۶/۱۵ در **دانشکده علوم دانشگاه تهران** برگزار گردید.

هیأت داوران براساس کیفیت پایان نامه، مقالات انتشار یافته، استماع دفاعیه و نحوه پاسخ به سؤالات، **پایان نامه** ایشان را برای دریافت **درجه کارشناسی ارشد در** رشته ریاضی محض معادل با ۶ واحد با نمره ۱۹٫۵ نوزده و نیم با درجه عالی مورد ارزشیابی قرار داد.

هیأت داوران

سمت	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر محمدرضا درفشه	استاد	تهران	
۲ - استاد داور	دکتر حسین دوستی	دانشیار	تربیت معلم	
۳- استاد داور	دکتر علیرضا ذکائی	استادیار	خواجه نصیرالدین طوسی	

معاون تحصیلات تکمیلی گروه	مدیر گروه	سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده
رحیم زارع نهندی	عمید رسولیان	رسول اخروی

فهرست مطالب

پیشگفتار

گروه G ساده است، اگر و فقط اگر زیرگروه قطری $G \times G$، یک زیرگروه ماکسیمال باشد. این خصوصیت جالب بسیار ساده اثبات می شود و انگیزه‌ای برای پاسخ به این سوال ایجاد می کند که چگونه می توان همه زیرگروههای ماکسیمال G^n را تعیین کرد، در حالی که منظور از G^n، حاصلضرب مستقیم n نسخه از G می باشد. هدف اول این پایان نامه پاسخ دادن به‌این سوال می باشد. بخصوص نشان خواهیم داد که اگر G یک گروه کامل باشد، آنگاه هر زیرگروه ماکسیمال G^n، تصویر معکوس یک زیرگروه ماکسیمال G^2 وابسته به یک نگاشت تصویر چون $\pi : G^n \to G^2$ بر روی دو عامل می باشد.

اگر G یک گروه متناهی باشد، ما تعداد زیرگروههای ماکسیمال G^n را با $m(G^n)$ نشان می دهیم . اگر $G = c_p$ گروه دوری از مرتبه p باشد، آنگاه $m(c_p^n) = \frac{p^n-1}{p-1}$. بنابراین $m(c_p^n)$ یک تابع نمایی از n می باشد، از این مطلب براحتی نتیجه می شود که اگر G کامل نباشد، آنگاه $m(G^n)$ به طور نمایی رشد می کند. بالعکس، اگر G کامل باشد، این واقعیت که هر زیرگروه ماکسیمال G^n حاصل از G^2 می باشد متضمن این نکته است که $m(G^n)$ یک چند جمله‌ای درجه دوم برحسب nمی باشد. ما یک فرمول صریح برای $m(G^n)$ بدست خواهیم آورد (برحسب متغیرهایی که تنها به G بستگی دارند).

حداقل تعداد مولدهای یک گروه متناهی H که با $d(H)$ نشان میدهیم، قویاً وابسته به تعداد زیرگروههای ماکسیمال H می باشد. به طور مثال اگر H تنها یک زیرگروه ماکسیمال داشته باشد، آنگاه H دوری است (مرتبه‌اش یک عدد اول می باشد) و $d(H) = 1$. بنابراین چندان تعجب آور نیست که نتایج فوق مبین این مطلب هستند که $d(G^n)$ بسته به اینکه G کامل است و یا کامل نیست متفاوت رفتار می کند. نشان خواهیم داد که وقتی G کامل است، $d(G^n)$ لگاریتمی رشد می کند و وقتی G کامل نیست $d(G^n)$ خطی رفتار می کند. این نتایج اساساً از Wiegold [W1,W2]می باشند، ولی Thevenaz [T]حلی جدید ارائه داده‌است که مبتنی بر مطالعه و بررسی زیرگروههای ماکسیمال می باشد.

یک روش عمومی برای پیدا کردن زیرگروههای ماکسیمال یک گروه متناهی را Aschbacher و [A-S]

Scott ارائه کرده‌اند. البته بررسی مادر ارتباط با زیرگروههای ماکسیمال به کار مهم آنها وابسته نیست.

یک تصوری که ممکن است وجود داشته باشد، این است که اگر G یک گروه متناهی مولد باشد با بزرگ شدن n، $d(G^n)$ نیز به سمت بینهایت می گراید. در فصل سوم با ارائه مثالی که از Hirshon [H] است، نشان می دهیم که این تصور اشتباه‌است، مثالی که ارائه خواهیم کرد دارای این خاصیت است که $d(G^n)$ برای هر n ثابت و برابر چهار است.

در این بررسی نیازمند یک سری تعاریف، قضایا و مسائل و مفاهیم مقدماتی هستیم که در فصل پیشنیازها به آنها خواهیم پرداخت.

پیشنیازها

دراین فصل خلاصه ای از قضایا و تعاریف مهمی که بعداً به آنها نیاز داریم بیان خواهند شد.

قضیه تناظر

در زیر قضیه ای را یادآوری، و اثبات می کنیم که به قضیه تناظر معروف شده و در متن استفاده بسیاری از آن شده است.

قضیه (پ .۱). فرض کنیم H یک زیرگروه نرمال G است و قرار می دهیم $\bar{G} = \frac{G}{H}$. به هرزیر گروه $\bar{V}$ از $\bar{G}$، گروهی چون VازG وابسته‌است به طوری که

$$H \subset V, \bar{V} = \frac{V}{H}$$

زیرگروهV مشتمل بر آن اعضایی از G است که مشمول در عضوی از $\bar{V}$ هستند و به طور یکتایی توسط V مشخص می شود. بنابراین بین مجموعه زیرگروههای $\bar{G}$ و مجموعه زیرگروههای G که شامل H هستند، یک تناظر یک به یک با ضابطه $V \leftrightarrow \bar{V}$ وجود دارد.

اثبات: برای یک زیرگروه $\bar{V}$ از $\bar{G}$ تعریف می کنیم

$$V = \{v \in G | Hv \in \bar{V}\}$$

در این صورت اگر $x,y \in V$، آنگاه $xy \in V$. زیرا از $x,y \in V$ نتیجه می شود$Hx, Hy \in \bar{V}$ و بموجب تعریف $\bar{V}$، $Hxy = HxHy$، یعنی $xy \in V$. ازطرف دیگر چون $(Hx)^{-1} = Hx^{-1}$، پس وارون هر عضو از V به V تعلق دارد. با توجه به بحث اخیر V یک زیرگروه G است .هم مجموعهٔH ، عضو خنثای $\bar{G}$ می باشد، بنابراین H عضو خنثای $\bar{V}$ نیز می باشد یعنی $H \in \bar{V}$، پس $H \subset V$. هم مجموعه‌های H که مشمول درV هستند با $\bar{V}$ تطابق دارند، بنابراین $\bar{V} = \frac{V}{H}$، اثبات باقیمانده قضیه روشن است.■

تناظری که در بالا بیان شد، دارای خواصی است که در زیر به صورت گزاره‌ای این خواص را مطرح کرده و اثبات می کنیم.

گزاره (پ.۲). فرض کنیم $\bar{U}_1$ و $\bar{U}_2$ زیرگروههای $\bar{G}$ هستند و U_1 زیرگروهی از G است که متناظر با $\bar{U}_1$ و U_2 زیرگروهی که متناظر با $\bar{U}_2$ است. در این صورت

الف) $$H \subset U_2 \subset U_1 \subset G \Longleftrightarrow \bar{U}_2 \subset \bar{U}_1$$

و

$$[\bar{U}_1 : \bar{U}_2] = [U_1 : U_2]$$

ب) $\bar{U}_1$ مزدوج $\bar{U}_2$ در G است اگر و فقط اگر U_1 مزدوج U_2 درG باشد .

ج) $\bar{U}_1 \trianglelefteq \bar{U}_2$ اگر و فقط اگر $U_1 \trianglelefteq U_2$.

اثبات: الف) با توجه به تعریف U_1 و U_2 که در قضیه قبل انجام شد، قسمت اول روشن است. اگر نگاشت کانونی را به صورت زیر در نظر بگیریم

$$\pi : G \longrightarrow \bar{G}$$

$$x \longrightarrow Hx$$

در این صورت تصویر هم مجموعه U_2x تحت این نگاشت $\bar{U}_2\bar{x}$ است. بنابر این بدست می آید

$$[\bar{U}_1 : \bar{U}_2] \leq [U_1 : U_2]$$

از سوی دیگر اگر تصویر دو عضو uوv از U مشمول در یک هم مجموعه از$\bar{U}_۲$ باشند، بدست می آوریم $\bar{U}_۲\bar{u} = \bar{U}_۲\bar{v}$، یا $\bar{u}\bar{v}^{-۱} \in \bar{U}_۲$،بنابراین $uv^{-۱} \in U_۲$. در نتیجه بدست می آوریم $U_۲u = U_۲v$. بنابراین نشان دادیم که اگر دو عضو uوv از U مشمول در یک هم مجموعه از $\bar{U}_۲$ باشند، آنگاه مشمول در یک هم مجموعه از $U_۲$ خواهند بود، پس با توجه به نامساوی بدست آمده

$$[\bar{U}_۱ : \bar{U}_۲] = [U_۱ : U_۲]$$

ب) فرض کنیم $U_۱$و$U_۲$ مزدوج باشند، یعنی $x \in G$ وجود داشته باشد به طوری که

$$x^{-۱}U_۱x = U_۲$$

حال اگر تصویر دو طرف را تحت نگاشت کانونی محاسبه بدست می آوریم

$$\bar{x}^{-۱}\bar{U}_۱\bar{x} = \overline{x^{-۱}}\bar{U}_۱\bar{x} = \overline{x^{-۱}U_۱x} = \bar{u}_۲$$

بنابراین $\bar{U}_۱$ و$\bar{U}_۲$ نیز مزدوج هستند. حالت عکس نیز به راحتی ثابت می شود.
ج) فرض کنیم $\bar{U}_۱ \trianglelefteq \bar{U}_۲$. اگر $x \in U_۱$ و $x^{-۱}U_۲x \neq U_۲$، آنگاه طبق قسمت (ب) بدست می آوریم $\bar{x}^{-۱}\bar{U}_۲\bar{x} \neq \bar{U}_۲$، یعنی $\bar{U}_۲$ در $\bar{U}_۱$نرمال نخواهد بود که تناقض است. حالت عکس نیز ساده است . ■

حاصلضرب مستقیم گروهها

تعریف.فرض کنیم $H_۱, ..., H_n$ گروه باشند. حاصلضرب مستقیم این گروهها، مجموعه $H_۱ \times H_۲ \times ... \times H_n$ که حاصلضرب دکارتی این گروهها می باشد، همراه با عمل دو تایی زیر است

$$(x_۱, x_۲, ..., x_n)(y_۱, y_۲, ..., y_n) = (x_۱y_۱, x_۲y_۲, ..., x_ny_n)$$

هر گروه H_i عامل مستقیم حاصلضرب، مستقیم نامیده می شود.

اگر منظور از 1_i عضو خنثای گروه H_i باشد، آنگاه $(1_1, 1_2, ..., 1_n)$ عضو خنثای $H_1 \times H_2 \times ... \times H_n$ می باشد. به طور مشابه $(x_1^{-1}, x_2^{-1}, ..., x_n^{-1}) = (x_1, x_2, ..., x_n)^{-1}$. بنابراین حاصلضرب مستقیم یک گروه است. همچنین خیلی ساده می توان ثابت کرد که

$$H_1 \times H_2 \times ... \times H_n \cong (H_1 \times ... \times H_{n-1}) \times H_n$$

بطور کلی یکریختیهای زیر برقرار می باشند

$$H_1 \times H_2 \times ... \times H_n \cong (H_1 \times ... \times H_m) \times (H_{m+1} \times ... \times H_n)$$

$$H \times K \cong K \times H$$

فرض کنیم G حاصلضرب مستقیم گروههای $H_1, .., H_n$ باشد. همچینین فرض کنیم K_i مجموعه اعضایی از G باشد که برای هر $j \neq i$، j-امین مولفه 1_iاز H_j است:

$$K_i = \{(1_1, 1_2, ..., 1_{i-1}, x_i, 1_{i+1}, ..., 1_n)\} \quad (x_i \in H_i)$$

در این صورت K_i یک زیرگروه G است و گزاره زیر برقرار است .

گزاره (پ.۳). الف) زیرگروه K_i با H_i تحت یکریختی زیر یکریخت می باشد

$$(1_1, ..., x_i, ..., 1_n) \mapsto x_i$$

ب) K_i زیرگروه نرمال G است.

ج) اگر $j \neq i$، اعضا K_iوK_j دو به دو جابجا می شوند، در واقع

$$(1, ..., k_i, ..., 1)(1, ..., k_j, ..., 1) = (1, ..., k_j, ..., 1)(1, ..., k_i, ..., 1)$$

د) تساوی $G = K_1K_2...K_n$ برقرار است و هر عضو G به طور یکتایی به صورت $x_1x_2...x_n$، در حالی که $x_i \in K_i$است، نوشته می شود.

اثبات: با توجه به تعریف ضرب در G، قسمتهای الف وب وج به سادگی اثبات می شود و هر عضوی از G را می توان به صورت حاصلضرب اعضا K_i -ها نوشت

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1, 1, .., 1)(1, x_2, ..., 1)...(1, 1, ..., x_n)$$

این تجزیه یکتاست، زیرا $(x_1, ..., x_n) = (y_1, ..., y_n)$ اگر و فقط اگر برای هر i داشته باشیم $x_i = y_i$. ■

یکی از گزاره‌های مهم در حاصلضرب مستقیم گروه‌ها، گزاره زیر است.

فرض کنیم$H_1, H_2, ..., H_n$ زیرگروههای نرمال یک گروه G هستند، به طوری که $G = H_1H_2...H_n$.

در این صورت سه شرط زیر معادلند

الف) برای هر $i = 1, 2, ..., n$، $H_1H_2...H_{i-1} \cap H_i = \{1\}$ (عضو خنثای گروه Gمی باشد).

ب) هر عضو ازG را به طور یکتایی می توان به صورت $x_1x_2....x_n$ که $x_i \in H_i$ برای هر i، نوشت.

ج) یکریختی $G \cong H_1 \times H_2 \times ... \times H_n$ برقرار استبه طوری که زیر گروه H_iاز G به زیر گروه K_i ازحاصلضرب مستقیم آنگونه که بالا تعریف شد وابسته است.

اثبات: (الف) $\Longleftarrow$(ب) : طبق فرض $G = H_1H_2...H_n$، بنابراین هر عضو از G را می توان به صورت $x_1x_2...x_n$ نوشت که برای هر i، $x_i \in H_i$، حال فرض کنیم

$$x_1x_2...x_m = y_1y_2...y_m \quad x_i, y_i \in H_i$$

قرار می دهیم $u = y_1...y_{m-1}$، بدست می آوریم $y_mx_m^{-1} = u^{-1}x_1...x_{m-1}$، سمت چپ عضو H_m است، در حالی‌که سمت راست عضوی از $H_1H_2...H_{m-1}$. از شرط (الف) داریم $H_1H_2...H_{m-1} \cap H_m = \{1\}$، بنابراین $y_mx_m^{-1} = 1$ و در نتیجه $y_m = x_m$ و

$$x_1...x_{m-1} = y_1...y_{m-1}$$

با تکرار این کار ثابت می شود که تجزیه هر عضو یکتاست بنابراین شرط (الف) متضمن شرط (ب) می باشد.

(ب) $\Longleftarrow$ (ج): ابتدا نشان می دهیم که اگر $i < j$ باشد و $u \in H_i$ و $v \in H_i$، آنگاه uو v با یکدیگر جابجا می شوند. با توجه به (ب) حاصلضرب vu را به صورت یکتایی می توان به صورت ضرب عضوی از H_i در عضوی از H_j نوشت. ما داریم $vu = u(u^{-1}vu) = (vuv^{-1})v$. ازآنجا که $H_i \lhd G$ و vuv^{-1} به H_i تعلق دارد و $u^{-1}vu$ به H_j، بنابراین با توجه به‌یکتایی تجزیه بدست می آوریم $v = v^u$ یا $uv = vu$.

فرض کنیم g عضوی از G باشد، با توجه به (ب) ما می توانیم عضو g را به طور یکتایی به صورت $g = x_1x_2...x_n$ در حالی که برای هرi، $x_i \in H_i$ بنویسیم. ما تابع f ازG به توی حاصلضرب مستقیم $H_1 \times H_2 \times ... \times H_n$ را با ضابطه زیر تعریف می کنیم

$$f(g) = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

فرض کنیم h عضو دیگری از G باشد که تجزیه زیر را دارد.

$$h = y_1y_2...y_n \qquad (y_i \in H_i)$$

از آنجا که x_i با y_j به شرط $i \neq j$ جابجا می شود، بدست می آوریم

$$gh = (x_1y_1)(x_2y_2)...(x_ny_n)$$

بنابراین

$$f(gh) = (x_1y_1, x_2y_2, ..., x_ny_n) = f(g)f(h)$$

و این یعنی اینکه f یک همریختی است. از فرض روشن است که f یک به یک است. زیرا اگر $f(g) = (1, 1, ..., 1)$ آنگاه با توجه به تعریف f باید برای هر i داشته باشیم $x_i = 1$، که‌نتیجه می دهد $g = 1$. پوشایی f نیز به سادگی حاصل می شود، زیرا $f(H_i) = 1 \times 1 \times ... \times H_i \times ... \times 1$. بقیه

اثبات نیز به سادگی حاصل می شود.

(ج) $\Longleftarrow$ (الف): کافیست ثابت کنیم $K_۱K_۲...K_{i-۱} \cap K_i = \{۱\}$. اما این نیز بسیار واضح است، زیرا i-امین مولفه عضوی که به اشتراک تعلق دارد ۱ است . ■

نتیجه(پ.۵). فرض کنیم $H_۱, ..., H_n$ زیرگروههای نرمال G هستند به طوری که مرتبه H_i و مرتبه H_j به شرط $i \neq j$ نسبت به هم اول هستند. در این صورت زیرگروه پدید آمده توسط زیرگروههای نرمال $H_۱, ..., H_n$ با حاصلضرب مستقیم $H_۱ \times H_۲ \times ... \times H_n$ یکریخت است.

اثبات: اگر $i \neq j$ باشد، مرتبه $H_i \cap H_j$ هر دو عدد $|H_i|$و$|H_j|$را عاد می کند. پس با توجه به فرض که مرتبه‌های H_iوH_j نسبت به هم اول می باشند، باید داشته باشیم $|H_i \cap H_j| = ۱$. در نتیجه $H_i \cap H_j = \{۱\}$ واز طرفی می دانیم $|H_iH_j| = \frac{|H_i||H_j|}{|H_i \cap H_j|}$، پس $|H_iH_j| = |H_i||H_j|$، بالاخص

$$H_۱ \cap H_۲ = \{۱\}, \qquad |H_۱H_۲| = |H_۱||H_۲|$$

با استقرا به دست می آوریم

$$|H_۱...H_i| = |H_۱|...|H_i|, H_۱...H_{i-۱} \cap H_i = \{۱\}$$

بنابراین شرط (الف) گزاره پیش برقرار است و در نتیجه $H_۱...H_n$ با $H_۱ \times H_۲ \times ... \times H_n$ یکریخت می‌باشد.

■

گزاره(پ.۶). فرض کنیم HوK زیرگروههای نرمال G هستند. در این صورت $\frac{G}{H \cap K}$ با زیرگروهی از حاصلضرب مستقیم $\frac{G}{H} \times \frac{G}{K}$ یکریخت است.

اثبات: تابع f را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$f : G \longrightarrow \frac{G}{H} \times \frac{G}{K}$$
$$x \longmapsto (Hx, Kx)$$