بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

## تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **آقای امین کایدی‌بارده** رشته **ریاضی‌کاربردی** به شماره دانشجویی ۸۹۵۲۰۴۱۰۰۸ تحت عنوان: «**حل عددی معادلات دیفرانسیل و انتگرال مرتبه کسری با استفاده از روش‌های طیفی بر اساس عملگرهای ماتریسی**» را در تاریخ ۱۳۹۱/۱۱/۷ از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

| اعضای هیأت داوران | نام و نام‌خانوادگی | رتبه علمی | امضاء |
|---|---|---|---|
| ۱- استاد راهنما | دکتر محمدرضا اصلاحچی | استادیار | |
| ۲- استاد مشاور | دکتر مهدی دهقان | استاد | درجلسه حضور نداشتند |
| ۳- استاد ناظر داخلی | دکتر سیدمحمد حسینی | استاد | |
| ۴- استاد ناظر داخلی | دکتر مهدیه طهماسبی | استادیار | |
| ۵- استاد ناظر خارجی | دکتر فاطمه شاکری | استادیار | |
| ۶- نماینده تحصیلات تکمیلی | دکتر مهدیه طهماسبی | استادیار | |

# آیین‌نامه چاپ پایان‌نامه (رساله) های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیت‌های علمی-پژوهشی دانشگاه است، بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

**ماده ۱**: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

**ماده ۲**: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد نگارنده در رشته **ریاضی کاربردی** است که در سال **۱۳۹۱** در دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی جناب آقای دکتر **محمدرضا اصلاحچی** از آن دفاع شده است.»

**ماده ۳**: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

**ماده ۴**: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرس، تأدیه کند.

**ماده ۵**: :دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتاب‌های عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

**ماده ۶**: اینجانب **امین کایدی بارده** دانشجوی رشته **ریاضی کاربردی** مقطع **کارشناسی ارشد** تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: امین کایدی بارده

تاریخ و امضا: ۱۳۹۱/۱۱/۷

Akayedi

## آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش‌های علمی دانشگاه تربیت مدرس

**مقدمه :** با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

**ماده ۱**: حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

**ماده ۲**: انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

**ماده ۳**: انتشار کتاب ، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه (حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

**ماده ۴**: ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه می باشد، باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

**ماده ۵**: این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ۱/۴/۸۷ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۲۳/۴/۸۷ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۱۵/۷/۸۷ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم الاجرا است.

«اینجانب **امین کایدی بارده** دانشجوی رشته **ریاضی کاربردی** ورودی سال تحصیلی **۱۳۸۹** مقطع **کارشناسی ارشد** دانشکده **علوم ریاضی** متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله براساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم.»

تاریخ: ۱۳۹۱/۱۱/۷

امضا Akaedi

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی ( کاربردی )

# حل عددی معادلات دیفرانسیل و انتگرال مرتبه کسری با استفاده از روش‌های طیفی بر اساس عملگرهای ماتریسی

دانشجو:

**امین کایدی بارده**

استاد راهنما:

**دکتر محمدرضا اصلاحچی**

استاد مشاور:

**دکتر مهدی دهقان**

بهمن ۱۳۹۱

تقدیم

به مادر عزیزم،

و

خواهر مهربانم.

## قدردانی

ایزد یکتا را سپاس که بدون یاریش، مرا یارای آن نبود که گامی در راه پرفراز و فرود دانستن بردارم.

وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر محمدرضا اصلاحچی و استاد مشاور گرانمایه ام جناب آقای دکتر مهدی دهقان که صبورانه مرا در تکمیل این پایان نامه یاری رساندند، کمال تشکر و سپاسگزاری را داشته باشم.

همچنین از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر سید محمد حسینی جهت آموزه های ارزشمند و بی شائبه و شکیبایی ایشان کمال تشکر را دارم.

همچنین از اساتید گروه ریاضی و داوران محترم به گرمی قدردانی و تشکر می نمایم.

# چکیده

در این پایان‌نامه حل عددی معادلات دیفرانسیل و انتگرال مرتبه کسری بر اساس عملگرهای ماتریسی مورد بررسی قرار می‌گیرد. از مزایای این روش راحتی در پیاده‌سازی و تسهیل محاسبات عددی است که در معادلات دیفرانسیل همواره مورد توجه بوده است. در معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری این عملگرها از قدمت چندانی برخوردار نیستند ولی به طور روز افزون در حال گسترش هستند. در اینجا اساس روش عددی مورد بحث، تقریب جواب مسئله بر اساس توابع پایه‌ای متعامد است که از نمایش برداری آنها استفاده می‌شود. سپس بعد از تولید عملگرهایی (ماتریسی) آنها را در معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری، جایگزین مشتقات و انتگرال مرتبه کسری کرده و پس از اعمال روش طیفی مورد نظر دستگاهی خطی یا غیر خطی تولید می‌شود که پس از حل آن بردار ضرایب توابع پایه‌ای بدست می‌آید که در نهایت منجر به جواب تقریبی می‌شود. در فصل آخر از این پایان‌نامه عملگرهای ماتریسی جدیدی را معرفی می‌کنیم که بر پایه توابع متعامد ژاکوبی کسری هستند. عملگر ماتریسی مشتق کاپوتو یعنی $E^{(\alpha,\beta,\lambda)}$ و عملگر ماتریسی انتگرال ریمان-لیوویل یعنی $I^{(\alpha,\beta,\lambda)}$ را با رویکردی جدید تولید کرده و سپس کاربرد و نتایج عددی مربوطه را آورده‌ایم.

**واژه‌های کلیدی:** حسابان کسری، معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری، معادلات انتگرال مرتبه کسری، توابع ژاکوبی کسری، عملگر ماتریسی مشتق، عملگر ماتریسی انتگرال، روش‌های طیفی.

# فهرست

# لیست جداول

# لیست تصاویر

# مقدمه

شاید اولین سوالی که برای خواننده مطرح شود چنین باشد:
«چرا معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری؟»
پلیمرها بر خلاف مواد دیگر، خاصیت کشسانی و چسبناکی را توأم با هم دارند و بواسطه‌ی آن پس از کشیده شدن به آرامی به حالت تعادل باز می‌گردند و به عبارتی دارای حافظه هستند. اما دیگر مواد به صورت آنی به حالت تعادل می‌رسند و یا درهم می‌شکنند. معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری توانایی بیان و مدل کردن چنین خاصیتی را دارند. گستردگی اینگونه از معادلات به همراه تایید آزمایش‌های فیزیکی و بیولوژیکی منجر به تمرکز برای طراحی روش‌های حل عددی کارا در سال‌های اخیر شده است چرا که این دسته از معادلات اکثراً فاقد جواب تحلیلی می‌باشند .
مشتق‌های مرتبه صحیح موضعی می‌باشند به این معنی که مشتق یک تابع در یک نقطه‌ی معین از مکان یا زمان تنها به مقادیر آن تابع در مجاورت همان نقطه وابسته است لذا به دلیل وجود انتگرال، مشتق‌های مرتبه کسری غیرموضعی بوده بنابراین دارای اثر حافظه می‌باشند.
در چند دهه اخیر به دلیل وجود عملگرهای مختلف برای مشتق و انتگرال در حسابان کسری ریاضیدانان و فیزیکدانان همواره در جستجوی روش‌های عددی کارآمد با پیاده‌سازی آسان بوده‌اند. البته لازم به ذکر است که پیشینه حسابان کسری به سال ۱۹۶۵ بازمی‌گردد که در فصل دوم به طور مختصر به این پیشینه و چگونگی پیدایش حسابان کسری می‌پردازیم. با اندکی دقت نظر در تاریخچه‌ی حسابان کسری می‌توان گفت بسیاری از ریاضیدانان به این بخش از علم ریاضی کم توجهی داشته و سیر پیشرفت آن تا پیش از چند دهه اخیر کند بوده و لذا همچنان بدیع و نو قلمداد می‌شود تا جایی که اولین کنفرانس بین‌المللی در این زمینه در سال ۱۹۷۴ توسط راس[۱] تحت عنوان

"First Conference on Fractional Calculus and it’s Applications"

در دانشگاه نیوهاون[۲] برگزار شد. سپس در سال‌های ۱۹۸۴ و ۱۹۸۹ کنفرانس‌های بین‌المللی برگزار گردید که غالب مسائل مطرح شده درباره مفاهیم مشتقات کسری در ریاضیات بود تا اینکه در کنفرانس شیکاگو در سال ۲۰۰۳ مفاهیم کاربردی حسابان کسری مورد توجه قرار گرفت که پیامد آن کارگاه‌های

[۱] B. Ross

[۲] New Haven University

مشتق مرتبه کسری و کاربردها بود که به ترتیب در سال‌های ۲۰۰۴ در فرانسه، ۲۰۰۶ در پرتغال و ۲۰۰۸ در ترکیه برگزار شدند. اخیراً کاربردهای متنوع و جالبی از حسابان و معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری ارائه گردیده که همزمان با گسترش روش‌های عددی جایگاه این شاخه از ریاضیات را بین سایر علوم مهندسی، علوم فیزیک و مکانیک، علوم پزشکی، علوم کامپیوتر و ... ارتقاء داده است [۶، ۱۲، ۱۳، ۲۴، ۳۲، ۴۱، ۴۴، ۴۵، ۴۸، ۵۶، ۵۷، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۶، ۷۰].

یکی از روش‌های جدید و قدرتمند در تخمین عملگرهای حسابان کسری و حل عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری استفاده از عملگرهای ماتریسی است که به دلیل سهولت در پیاده‌سازی و کارایی بالا حائز اهمیت است. در این راستا می‌توان به روش گسسته‌سازی پودلوبنی در مرجع [۵۴]، عملگر ماتریسی بر پایه اسپلاین‌ها [۳۹]، عملگر ماتریسی برپایه موجک‌ها [۷۱، ۷۲] و عملگر ماتریسی بر پایه ماتریس کرونکر [۳۶] اشاره کرد. مراجع اصلی این پایان‌نامه [۱۸، ۶۲] می‌باشند که برپایه روش‌های طیفی، عملگرهای ماتریسی کارآمدی را برای معادلات با عملگر مشتق کاپوتو[1] ارائه می‌دهند که در فصل چهارم به طور مشروح به آنها پرداخته‌ایم.

در این پایان‌نامه فصل اول را به بیان مقدمات، تعاریف اولیه و پیش‌نیازها اختصاص داده‌ایم. در فصل دوم حسابان کسری را معرفی کرده و کلیات آن را تا جایی که مقدور بوده است بیان کرده‌ایم. در فصل سوم به معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری پرداخته‌ایم و قضایای وجودی و یکتایی برخی از مسائل را بررسی کرده و گونه‌های مختلف این معادلات را معرفی کرده‌ایم. در فصل چهارم به عملگرهای ماتریسی برای مشتق و انتگرال مرتبه کسری پرداخته‌ایم. این عملگرهای ماتریسی از قدمت چندانی برخوردار نیستند ولی طی چندین مثال مختلف، کاربرد و کارایی آنها را نشان می‌دهیم. در نهایت در فصل پنجم توابع متعامد جدیدی را تحت عنوان چندجمله‌ای‌های متعامد کسری ژاکوبی معرفی می‌کنیم. در واقع این توابع متعامد در دسته‌ی چندجمله‌ای‌های مونتس[2] قرار می‌گیرند که ما در ادامه عملگرهای مشتق و انتگرال مرتبه کسری آنها را تولید کرده و به کمک نتایج عددی بدست آمده کارایی آنها را نشان می‌دهیم. مقالات مستخرج از این پایان‌نامه مراجع [۳، ۳۳] هستند.

[1] M. Caputo

[2] Müntz

# فصل ۱

# تعاریف و پیش‌نیازها

در این فصل ابتدا برخی از مفاهیم مورد نیاز از نظریه تقریب را مرور کرده سپس به دلیل نیاز، جهت درک هرچه بهتر مطالب فصول آتی، لازم است توابع خاص، چندجمله‌ای‌های متعامد و چندجمله‌ای‌های مونتس را معرفی کنیم . در نهایت روش مانده‌های وزنی[1] را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

## ۱.۱ تعاریف مقدماتی

**تعریف ۱.۱.۱.** [۶۵] فرض کنیم $X$ یک فضای خطی و $a$ اسکالری حقیقی و دلخواه باشد. همچنین اگر تابع $\|.\| : X \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ به ازای هر $x, y \in X$ دارای خواص زیر باشد

۱. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

۲. $\|ax\| = |a|\,\|x\|$

۳. $\|x\| \geq 0$

۴. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

[1] Method of weighted residuals

در این صورت تابع $\|.\|$ را نرم فضای خطی $X$ گوییم و $X$ را فضای نرم‌دار خطی می‌نامیم. در ضمن تابع $|.|: X \to \mathbb{R}$ را شبه نرم گوییم اگر در سه شرط اول صدق کند.

**تعریف ۲.۱.۱.** فرض کنیم $X$ یک فضای خطی مختلط از توابع با ضرب داخلی $\langle f,g\rangle : X\times X \to \mathbb{C}$ باشد به طوری که

۱. $\langle f+g,h\rangle = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle$

۲. $\langle af,g\rangle = a\langle f,g\rangle$

۳. $\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle}$

۴. $\langle f,f\rangle \geq 0,\ \langle f,f\rangle = 0 \Leftrightarrow f\equiv 0$

که در آن $f,g,h\in X$ دلخواه و $a$ یک اسکالر مختلط است. در این صورت $X$ را یک فضای ضرب داخلی گوییم. سیستم $S$ از عناصر یک فضای ضرب داخلی، متعامد نامیده می‌شود اگر برای هر $f,g\in S$ متمایز داشته باشیم $\langle f,g\rangle = 0$ . سیستم متعامد $S$ یکامتعامد نامیده می‌شود اگر برای هر $f\in S$ ، داشته باشیم $\|f\|^2 := \langle f,f\rangle = 1$ .

**قضیه ۳.۱.۱.** [۲۸، ۴۲] فرض کنیم $X$ یک فضای ضرب داخلی با نرم $\|.\| = \langle .,.\rangle^{\frac{1}{2}}$ و $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ مجموعه‌ای مستقل خطی از بردارهای $X$ باشد. اگر $g_1 = \frac{f_0}{\|f_0\|}$ و همچنین

$$u_n = f_n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle f_n, g_k\rangle\, g_k, \qquad g_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$$

آنگاه $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک مجموعه متعامد بوده و برای هر $n$ داریم

$$\operatorname{span}\{g_0,g_1,\dots,g_n\} = \operatorname{span}\{f_0,f_1,\dots,f_n\}.$$

ماتریس $G_n$ که به صورت زیر است را ماتریس گرام [1] گوئیم.

[1] J.P. Gram

$$G_n = \begin{bmatrix} \langle g_0, g_0\rangle & \langle g_0, g_1\rangle & \dots & \langle g_0, g_{n-1}\rangle \\ \langle g_1, g_0\rangle & \langle g_1, g_1\rangle & \dots & \langle g_1, g_{n-1}\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle g_{n-1}, g_0\rangle & \langle g_{n-1}, g_1\rangle & \dots & \langle g_{n-1}, g_{n-1}\rangle \end{bmatrix}$$

این ماتریس ناتکین است اگر و فقط اگر سیستم $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$ مستقل خطی باشد. همچنین ماتریس گرام، یک ماتریس هرمیتی[1] بوده و همچنین $\Delta_n = \det(G_n) > 0$.

**قضیه ۴.۱.۱.** [۴۲] گیریم $\Delta_n = \det(G_n)$ و $\Delta_0 = 1$ در این صورت توابع متعامد $\phi_n$ به صورت زیر تولید می‌شوند.

$$\phi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \begin{vmatrix} \langle g_0, g_0\rangle & \langle g_0, g_1\rangle & \dots & \langle g_0, g_{n-1}\rangle & g_0(z) \\ \langle g_1, g_0\rangle & \langle g_1, g_1\rangle & \dots & \langle g_1, g_{n-1}\rangle & g_1(z) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle g_n, g_0\rangle & \langle g_n, g_1\rangle & \dots & \langle g_n, g_{n-1}\rangle & g_n(z) \end{vmatrix}.$$

**تعریف ۵.۱.۱.** [۱۷] فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ و $1 \leq p$ در این صورت

۱. $C\,[a,b]$ فضای همه توابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ به طوریکه تابع $f$ روی بازه $[a,b]$ پیوسته است.

۲. $C^n\,[a,b]$ فضای همه توابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ به طوریکه مشتق مرتبه $n$ام تابع $f$ روی بازه $[a,b]$ پیوسته است.

۳. $L_p\,[a,b]$ فضای همه توابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ به طوریکه تابع $f$ روی بازه $[a,b]$ اندازه‌پذیر بوده و $\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$.

۴. $L_\infty\,[a,b]$ فضای همه توابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ به طوریکه تابع $f$ روی بازه $[a,b]$ اندازه‌پذیر و با تغییر کراندار باشد.

[1] Hermitian matrix

۵. $A^n[a,b]$ مجموعه همه توابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ به طوریکه مشتق مرتبه $(n-1)$ ام تابع $f$ روی بازه $[a,b]$ پیوسته مطلق [1] است.

**تعریف ۶.۱.۱.** [۱۴] فرض کنیم $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ و $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد و $\mathcal{L}$ تابعی حقیقی مقدار و تعریف شده روی فضای برداری تمام چندجمله‌ای‌ها باشد و

$$\mathcal{L}[x^n]=\mu_n,\quad n=0,1,2,\dots,$$

$$\mathcal{L}[\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)]=\alpha_1\mathcal{L}[y_1(x)]+\alpha_2\mathcal{L}[y_2(x)],$$

که در آن $y_1$ و $y_2$ چندجمله‌ای‌های دلخواه هستند. در این صورت $\mathcal{L}$ را تابعک گشتاور گوییم.

**قضیه ۷.۱.۱.** [۳۷] اگر چندجمله‌ای‌های تکین از درجه $n\in\{0,1,2,\dots\}$ را با $y_n$ نشان دهیم در این صورت اگر

$$y_{n+1}(x)=(x-c_n)y_n(x)-d_n y_{n-1}(x),\quad c_n,d_n\in C,\quad n=1,2,3,\dots,$$

آنگاه برای هر $m,n\in\{0,1,2,\dots\}$ که $m\neq n$ ، تابعک گشتاور یکتای $\mathcal{L}$ وجود دارد به طوریکه

$$\mathcal{L}[1]=1,\quad \mathcal{L}[y_m y_n]=0,$$

در ضمن تابعک گشتاور $\mathcal{L}$ را معین-مثبت گوییم اگر و تنها اگر برای $n=0,1,2,\dots$ داشته باشیم $c_n\in\mathbb{R}$ و برای $n=1,2,3,\dots$ داشته باشیم $d_n>0$.

## ۲.۱ توابع خاص

برخی از توابع ریاضی به دلیل اهمیت آنها در تجزیه و تحلیل‌های ریاضی، آنالیز تابعی، فیزیک و یا برنامه‌های کاربردی دیگر تحت عنوان توابع خاص معرفی می‌شوند. این دسته از توابع فاقد تعریفی رسمی بوده و همواره فهرست وار معرفی می‌شوند. جهت درک هرچه بهتر مطالب آتی در اینجا به معرفی برخی از این توابع می‌پردازیم و بخش دیگری از این توابع را که مختص به حسابان کسری هستند را در فصل بعد معرفی خواهیم کرد.

---

[1] Absolutely continuous

### ۱.۲.۱ تابع گاما

[۵۳] تابع گاما اویلر بوسیله حد اویلر به صورت زیر بیان می‌شود

$$\Gamma(z) := \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}.$$

این تعریف برای تمام $z \in \mathbb{C}$ بجز نقاط $z = 0, -1, -2, \dots$ بیان کننده تابع گاما اویلر است. دقت شود که این نقاط در واقع قطب‌های ساده تابع گاما اویلر هستند. البته برای $Re(z) > 0$ غالباً از تعریف انتگرالی زیر استفاده می‌شود

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \mathrm{Re}(z) > 0 \tag{1.1}$$

برای این تابع اتحادهای تابعی زیر برقرار است

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad z \notin \mathbb{Z} \tag{2.1}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{-\pi}{z\sin(\pi z)}, \quad z \notin \mathbb{Z} \tag{3.1}$$

همچنین

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{with} \quad \Gamma(1) = 1, \tag{4.1}$$

در نتیجه برای $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ داریم $\Gamma(n+1) = n!$ . با توجه به رابطه فوق تابع گاما اویلر را برای $Re(z) < 0$ به صورت زیر تعریف می‌کنند

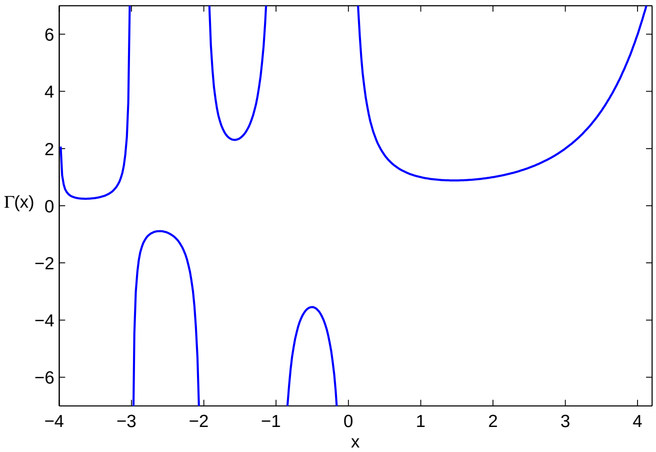
$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}, \quad Re(z) < 0,\ z \neq 0, -1, -2, \dots$$

در ادامه برای راحتی این تابع را به اختصار تابع گاما می‌نامیم.

### ۲.۲.۱ تابع بتا

[۵۳] تابع بتا به کمک انتگرال اویلر نوع اول به شکل زیر تعریف می‌شود

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad \mathrm{Re}(x) > 0,\ \mathrm{Re}(y) > 0. \tag{5.1}$$




شکل ۱.۱: نمودار تابع گاما اویلر روی خط حقیقی .

این تابع را می‌توان از روابط انتگرالی زیر نیز بدست آورد

$$B\left(x,y\right)=\int_{0}^{\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+x)^{x+y}}dt,\qquad \mathrm{Re}(x)>0,\ \mathrm{Re}(y)>0,$$

$$B\left(x,y\right)=2\int_{0}^{\pi/2}\left(\sin(t)\right)^{2x-1}\left(\cos(t)\right)^{2y-1}dt,\qquad \mathrm{Re}(x)>0,\ \mathrm{Re}(y)>0,$$

رابطه میان تابع بتا و تابع گاما به صورت زیر است

$$B\left(x,y\right)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\qquad \mathrm{Re}(x)>0,\ \mathrm{Re}(y)>0,$$

همچنین تابع بتا خواص زیر را داراست:

★ $B\left(x,y\right)=B\left(y,x\right)$

★ $B\left(x,y\right)=B\left(x+1,y\right)+B\left(x,y+1\right)$

★ $B\left(x,y+1\right)=\frac{y}{x}B\left(x+1,y\right)=\frac{y}{x+y}B\left(x,y\right)$

### ۳.۲.۱ تابع پوخهامر

[۳۷] تابع پوخهامر یا تابع فاکتوریل انتقال یافته به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(a)_0:=1,\qquad (a)_k:=\prod_{i=1}^{k}(a+i-1),\qquad k=1,2,3,\ldots.\tag{۶.۱}$$