دانشکده علوم پایه

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

عنوان

حلقه‌های ماتریسی قویاً تمیز روی حلقه‌های موضعی جابه‌جایی

نگارش

بهنام ابراهیم زاده

استاد راهنما

دکتر ناهید اشرفی

استاد مشاور

دکتر علی معدنشکاف

اردیبهشت ماه ۱۳۸۹

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

قدردانی

در اینجا از کلیه افرادی که به من در تهیه این پایان‌نامه و همچنین در این دوره تحصیلی یاری نموده‌اند، خصوصاً از اساتید ارجمند جناب آقای دکتر بهمنی و سرکار خانم دکتر اشرفی تشکر و قدردانی می‌نمایم.

تقدیم به :

پدر

و

دستان پر مهر مادر

چکیده

در این پایان نامه سعی خواهد شد حلقه‌های موضعی جابه‌جایی را مشخص کنیم که حلقه‌ی ماتریس های $n \times n$ روی آنها قویاً تمیز باشند. روند کار بر اساس تجزیه در $R[t]$ است. همچنین نشان می دهیم برای هر چند جمله‌ای تکین $f \in R[t]$، قویاً تمیز بودن ماتریس همراه چند جمله‌ای f معادل است با اینکه همه‌ی ماتریس هایی با چند جمله‌ای مشخصه‌ی f، قویاً تمیز باشند. در ادامه با معرفی $SRC(SR)-$ تجزیه‌ها، ارتباط میان $SRC-$ تجزیه‌ها و ماتریس‌های قویاً تمیز در $\mathbb{M}_n(R)$ را بررسی می کنیم و همچنین با توجه به تعریف $SRC(SR)$ تجزیه‌ها، مفهوم $n - SRC$ حلقه‌ها را بیان می‌کنیم و مثال هایی از $SRC-$حلقه‌ها از جمله حلقه‌های موضعی هنسلی را ارائه می دهیم و سپس ارتباط آن را با ماتریس‌های قویاً تمیز در $\mathbb{M}_n(R)$ بررسی می‌کنیم. همچنین مفهوم $PR-$ تجزیه‌ها را بیان و ارتباط آن با ماتریس‌های قویاً تمیز در $\mathbb{M}_n(R)$ را بررسی می کنیم و در انتها مباحثی در مورد ماتریس‌های قویاً $\pi-$ منظم را مورد بررسی قرار می دهیم و با بیان مفهوم $SP-$تجزیه‌ها، ارتباط میان این تجزیه‌ها با ماتریس‌های قویاً $\pi-$ منظم را بررسی می کنیم.

واژه‌های کلیدی: حلقه‌ی قویاً تمیز، حلقه‌ی موضعی جابه‌جایی، $n - SRC(n - SR)$ حلقه‌ها، حلقه‌ی موضعی هنسلی، حلقه‌ی قویاً $\pi-$منظم، چند جمله‌ای مشخصه.

مقدمه

در این پایان نامه سعی خواهد شد حلقه‌های موضعی جابه‌جایی را مشخص کنیم که حلقه‌ی ماتریس های $n \times n$ روی آنها قویاً تمیز باشند. روند کار بر اساس تجزیه در $R[t]$ است. همچنین نشان می دهیم برای هر چند جمله‌ای تکین $f \in R[t]$، قویاً تمیز بودن ماتریس همراه چند جمله‌ای f معادل است با اینکه همه‌ی ماتریس هایی با چند جمله‌ای مشخصه‌ی f، قویاً تمیز باشند. در این پایان نامه چون بحث در مورد حلقه‌های قویاً تمیز است پس بهتراست که بدانیم مفهوم حلقه‌های تمیز از چه زمانی تعریف شده‌است.

مفهوم تمیزی برای اولین بار در سال ۱۹۷۷ توسط نیکولسن [1] درمرجع [۲۴] معرفی شد. یک عنصر از یک حلقه را تمیز گوییم هرگاه بتوان آن را به شکل جمع یک عنصر خودتوان و یک عنصر یکال نوشت و همچنین یک حلقه را تمیز گوییم هرگاه هر عنصر آن تمیز باشد. در این زمینه محققان نتایج بسیاری بدست آوردند برای مثال نیکولسن در مرجع [۲۴] نشان داد که تمیزی یک شرط کافی برای یک حلقه با خاصیت تبادلی می باشد، و همچنین بعدها کامیلیو [2] و یو [3] در مرجع [۷] نشان دادند که برای حلقه‌ها رابطه‌ی زیر را داریم :

$$\text{حلقه‌ی تبادلی} \Longleftarrow \text{حلقه‌ی تمیز} \Longleftarrow \text{حلقه‌ی نیمه‌کامل}$$

در ادامه محققان در مرجع [٦] مفهوم مدول تمیز را بیان کردند که یک مدول را تمیز گوییم هرگاه حلقه درون ریختی‌اش تمیز باشد. در ادامه نیکولسون در مرجع [۲۵] مفهوم عنصر قویاً تمیز را بیان کرد که یک عنصر از یک حلقه را قویاً تمیز گوییم هرگاه بتوان آن را به شکل جمع یک عنصر خودتوان و یک عنصر یکال نوشت که با هم جابه جا شوند و همچنین یک مدول قویاً تمیز است هرگاه حلقه درون ریختی اش قویاً تمیز باشد. او همچنین نشان داد حلقه‌های موضعی، قویاً تمیز هستند. بعدها نیکولسون نشان داد که حلقه‌های قویاً $\pi-$ منظم، قویاً تمیز هستند و همچنین حلقه‌های کامل و در

---

[1] Nicholson
[2] Camillo
[3] Yu

حالت خاص حلقه‌های آرتینی قویاً تمیز هستند. هدف ما در این پایان نامه این است که حلقه‌های موضعی جابه‌جایی را مشخص کنیم که $\mathbb{M}_n(R)$، قویاً تمیز باشد برای مثال از قبل می دانیم که اگر R حلقه آرتینی چپ (راست) باشد آن گاه به ازای هر n، $\mathbb{M}_n(R)$ قویاً تمیز است و یا در جای دیگر کیم [۴] و لی [۵] در مرجع [۱۶] نشان داده‌اند که اگر حلقه‌ی R موضعاً متناهی باشد آن گاه $\mathbb{M}_n(R)$ به ازای هر n، قویاً تمیز است از طرفی وانگ [۶] و چن [۷] در مرجع [۳۰]، مثال (۱) ثابت کردند که $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_{(2)})$ قویاً تمیز نیست که این مثال در واقع پاسخ منفی به سوالی بود که نیکولسن درمرجع [۲۵] مطرح کرده بود که آیا حلقه‌های نیمه کامل، قویاً تمیز می باشند یا خیر. بعدها چن و یانگ و زو در مرجع [۱۱] نشان دادند که روی حلقه‌های موضعی جابه جایی $\mathbb{M}_2(R)$ قویاً تمیز است و سپس لی در مرجع [۲۱] روشی را که چن و یانگ [۸] و ذو [۹] درمرجع [۱۱] به کار گرفته بودند را کامل کردند. بسیاری از نتایج از مراجع [۱۱] و [۲۱] حالت های خاصی از قضایا و مباحثی هستند که در این پایان‌نامه به آن می پردازیم ما در ادامه با مفهوم $n-SRC$ حلقه‌ها آشنا خواهیم شد.

این پایان‌نامه شامل سه فصل است که در فصل اول تعدادی تعاریف، لم و قضیه که در فصل‌های بعدی از آن استفاده شده است را آورده‌ایم. فصل دوم شامل سه بخش است که در بخش اول در مورد تجزیه در $R[t]$ و مفهوم SRC و $SR-$تجزیه بحث می کنیم. در بخش دوم در مورد رابطه‌ی $SRC-$تجزیه و قویاً تمیزی از $\mathbb{M}_n(R)$ مباحثی را عنوان می کنیم و در بخش سوم مثال‌هایی از $SRC-$حلقه‌ها می آوریم. فصل سوم شامل دو بخش است که در بخش اول انواع دیگری از تجزیه‌ها و ارتباط آنها با $SRC-$تجزیه‌ها را مورد بحث قرار می دهیم در بخش دوم از این فصل در مورد حلقه‌های ماتریسی قویاً $\pi-$ منظم مباحثی را بیان خواهیم کرد. دراین پایان‌نامه تمامی تعاریف، مثال‌ها، لم‌ها، گزاره‌ها، قضیه‌ها و نتایج ابتدا با شماره فصل، بعد با شماره بخش و سپس با شماره‌ی مطلب مورد نظر آورده شده است. مطالب این پایانامه بر اساس مقاله‌های [۶]، [۲۴] و [۳۱] تنظیم گردیده است.

---

[۴] Kim
[۵] Lee
[۶] Wang
[۷] Chen
[۸] Yang
[۹] Zhou

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش نیازها و مفاهیم اولیه

این فصل شامل سه بخش می باشد. در بخش اول تعدادی تعاریف و قضایا مربوط به مباحث گروه، حلقه و مدول را بیان می کنیم و در بخش دوم مباحثی را در مورد توسیع و بستارجبری میدانها می آوریم و همچنین در بخش سوم تعدادی تعاریف و قضایا مربوط به جبرخطی که بیشتر مربوط به مباحثی از مرجع [۳۴] می باشند را می آوریم. هدف از بیان مباحث این فصل کمک به اثبات موضوع اصلی در فصل‌های بعدی می‌باشد. در این پایان نامه:

۱) در سراسر این بحث حلقه‌ی موضعی جابه‌جایی R با ایدآل ماکسیمال J را بانماد (R, J) نشان می دهیم، و نماد $\pi : R \longrightarrow (\frac{R}{J})$ را با ضابطه‌ی $\pi(r) = \overline{r}$ به عنوان همریختی حلقه‌ی خارج قسمتی از حلقه‌ی R به میدان $\frac{R}{J}$ در نظر می‌گیریم که در آن $\overline{R} = \frac{R}{J}$ می‌باشد و همچنین از نماد $\overline{\pi}$ به عنوان همریختی القایی برای همریختی های $R[t] \longrightarrow \overline{R}[t]$ و $\mathbb{M}_n(R) \longrightarrow \mathbb{M}_n(\overline{R})$ استفاده می کنیم.

۲) مجموعه‌ی همه‌ی یکال های حلقه را با $U = U(R)$ نشان می‌دهیم.

۳) از نماد $J(R)$ به عنوان رادیکال جیکوبسن حلقه‌ی R استفاده می کنیم.

۱.۱ گروه، حلقه و مدول

تعریف ۱.۱.۱ یک گروه که در آن هر عنصر مرتبه اش توانی ($\geq$ ۰) از عدد اول ثابتی مانند P باشد، را یک $P-$ گروه گوییم. شرط ($\geq$ ۰) به‌این علت که $<e>$ یک $P-$ زیر گروه G است و $|<e>| = ۱ = P^{\circ}$ می باشد.

قضیه ۲.۱.۱ گروه متناهی G، یک $P-$ گروه است، اگر وفقط اگر $|G|$ توانی از P باشد.

برهان: به نتیجه‌ی ۳.۵ صفحه‌ی ۱۴۶ از مرجع[۱۷] رجوع شود. $\square$

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه آبلی و τ یک توپولوژی روی G باشد. G را یک گروه توپولوژیک گوییم هرگاه توابع

$$G \times G \longrightarrow G \quad \text{(عمل جمع)}$$

$$(x,y) \longrightarrow x+y$$

$$G \longrightarrow G \quad \text{(عمل ضرب)}$$

$$x \longrightarrow -x$$

پیوسته باشند.

تعریف ۴.۱.۱ یک دنباله مانند $\{x_n\}$ از عناصر G را یک دنباله‌ی کوشی گوییم هرگاه برای هر همسایگی V از ۰ یک عدد صحیح مانند $s(V)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $m,n \geq s(V)$ داشته باشیم $x_m - x_n \in V$.

تعریف ۵.۱.۱ عنصر e از حلقه R راخود توان گوییم هرگاه $e = e^{2}$. مجموعه‌ی همه‌ی عناصر خودتوان حلقه‌ی R را با $Id(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱ عنصر خودتوان e از حلقه R را خودتوان مرکزی گوییم هر گاه برای هر $r \in R$ داشته باشیم $er = re$.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید e یک عنصر خود توان از حلقه‌ی یکدار R باشد دراین صورت مجموعه‌ی $eRe = \{exe \mid x \in R\}$، با جمع و ضربی که در R تعریف می شود، تشکیل یک حلقه می‌دهد که عضو خنثی جمعی آن $e \circ e = \circ$ و همانی ضربی آن $e 1 e = e$ می‌باشد.

قضیه ۸.۱.۱ فرض کنیم e خودتوانی از حلقه درون ریختی‌های M ($End(M)$) باشد. آنگاه $1 - e$ نیز خودتوانی از $End(M)$ خواهد بود به طوری که :

۱) $Ker\, e = \{x \in M \mid x = x(1 - e)\} = Im(1 - e)$،

۲) $Im\, e = \{x \in M \mid x = xe\} = Ker(1 - e)$.

به علاوه $M = e(M) \oplus (1 - e)(M)$.

برهان: به لم ۵.۶ صفحه‌ی ۷۰ از مرجع [۱] رجوع شود. □

لم ۹.۱.۱ فرض کنیم R_1، R_2،...، R_n اید آل های دوطرفه از R باشند آنگاه شرایط زیر معادلند:

۱) $R = R_1 + R_2 + ... + R_n$

۲) ${}_R R = R_1 \oplus R_2 \oplus ... \oplus R_n$،

۳) R به عنوان گروه آبلی جمع مستقیم R_1، R_2،...، R_n است،

برهان: به قضیه‌ی ۷.۶ صفحه‌ی ۹۸ از مرجع [۱] رجوع شود. □

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنید G یک گروه و R یک حلقه باشد و همچنین RG گروه آبلی جمعی $\sum_{g\in G} R$ (یک نسخه از R به ازای هر $g \in G$) باشد. یک عنصر x از RG را با مجموع صوری $\sum_{g\in G} x_g.g$، نشان می دهیم به‌طوری که $x_g \in R$ و تعداد متناهی از x_gها مخالف صفراست. جمع در گروه RG به صورت زیر تعریف می شود.

$$\sum_{g\in G} x_g.g + \sum_{g\in G} y_g.g = \sum_{g\in G} (x_g + y_g).g$$

و ضرب نیز در RG به صورت زیر تعریف می شود .

$$(\sum_{g\in G} x_g.g)(\sum_{k\in G} y_g.k) = \sum_{t\in G} z_t.t$$

که در آن $z_t = \sum_{gk=t} x_g.y_k$ است. RG بااین اعمال یک حلقه است که آن را حلقه− گروه G روی R می نامیم. در ادامه داریم که RG تعویض پذیر است اگر وتنها اگر G وR تعویض پذ یر باشد. و همچنین هر گاه حلقه‌ی R دارای واحد 1_R و1_G عنصر همانی G باشد آنگاه $1_R 1_G$ عنصر واحد RG است.

تعریف ۱۱.۱.۱ عنصر $x \in R$ را شبه منظم چپ گوییم هرگاه $1 - x$ وارون چپی در R داشته باشد و همین طور عنصر $x \in R$ را شبه منظم راست گوییم هرگاه $1 - x$ یک وارون راست در R داشته باشد. یک عنصر از R می تواند شبه منظم چپ باشد اما شبه منظم راست نباشد.

قضیه ۱۲.۱.۱ هرحلقه‌ی یکدار را می توان در یک حلقه‌ی درون ریختی از گروه آبلی جمعی نشاند.

برهان: به قضیه‌ی ۸.۲۷ صفحه‌ی ۲۲۶ از مرجع [۲۷] رجوع شود. □

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد و K یک حلقه جابه‌جایی باشد و همچنین $\phi : K \longrightarrow Cen(R)$ یک همریختی حلقه باشد. آنگاه دستگاه (R, K, ϕ) را یک $K-$جبر گوییم یا R را یک $K-$جبر نامیم.

تعریف ۱۴.۱.۱ ایدآل I ازحلقه R را ایدآل متناهی مولد گویند هرگاه مجموعه‌ای متناهی از عناصر R مانند$\{a_۱, a_۲, \cdots, a_n\}$ موجود باشد به‌طوری که بتوان هر عنصر از I مانند x را به شکل $x = r_۱a_۱ + r_۲a_۲ + \cdots + r_na_n$ نوشت که در آن به ازای هر $i = ۱, ۲, \cdots, n$ ، $r_i \in R$ می‌باشد.

گزاره ۱۵.۱.۱ فرض کنیم RG یک حلقه‌-گروه باشد. در این صورت نگاشت $\omega : RG \to R$ با ضابطه‌ی $\omega(\sum x_g.g) = \sum x_g$ یک بروریختی حلقه‌ها می‌باشد که به این نگاشت، نگاشت افزایشی گوییم.

برهان: ابتدا نشان می‌دهیم ω خوش تعریف است. فرض کنیم $\sum x_g.g$ و $\sum y_g.g$ دو عنصر دلخواه از RG باشند و داشته باشیم $\sum x_g.g = \sum y_g.g$، با توجه به G، که یک گروه ضربی است پس $۰ = ۰_R.g = ۰_{RG}$ لذا برای هر $g \in G$، $x_g = y_g$، بنابراین $\sum x_g = \sum y_g$، پس $\omega(\sum x_g.g) = \omega(\sum y_g.g)$. بنابراین ω خوش تعریف است. به راحتی دیده می‌شود که ω یک همریختی حلقه‌هاست. اکنون نشان می‌دهیم ω پوشاست. فرض کنیم $r \in R$. قرار می‌دهیم $x = r.۱_G \in RG$. داریم

$$\omega(x) = \omega(r.۱_G) = r.$$

بنابراین $x \in RG$ یافت شد که $\omega(x) = r$. پس ω پوشاست. □

تعریف ۱۶.۱.۱ هسته‌ی بروریختی حلقه‌های $\omega : RG \to R$ را ایدآل افزایشی حلقه‌-گروه RG گوییم و آن را با نماد $\Delta(RG)$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر $\Delta(RG)$ شامل تمام عناصر

$x = \sum x_g.g \in RG$ می‌باشد که

$$\omega(x) = \omega(\sum x_g.g) = \sum x_g = ۰.$$

و این اید آل توسط $g - g'$(تفاضل دو عنصر از G) تولید می شود.

تعریف ۱۷.۱.۱ اید آل واقعی P از حلقه‌ی R را اول گوییم، هرگاه به ازای هر $a, b \in R$ داشته باشیم: اگر $ab \in P$ آنگاه $a \in P$ یا $b \in P$.

نکته ۱۸.۱.۱ فرض کنیم D، یک دامنه صحیح باشد و همچنین فرض کنیم $a \in D$ و $a \neq ۰$ و $a \notin U(D)$ آن گاه a در D اول است اگر وتنها اگر (a) اید آل اول در D باشد.

قضیه ۱۹.۱.۱ در حلقه‌ی تعویض پذ یرو یکد ار R اید آل P اول است، اگر و تنها اگر حلقه‌ی خارج قسمتی $\frac{R}{P}$ یک دامنه‌ی صحیح باشد.

برهان: به قضیه‌ی ۱٦.۲ صفحه‌ی ۱۹۷ از مرجع [۱۷] رجوع شود. □

تعریف ۲۰.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد. در این صورت:

۱) مجموعه‌ی تمام اید آل‌های اول در R را طیف اید آل اول R می گوییم و با $Spec(R)$ نشان می‌دهیم.

۲) مجموعه‌ی تمام اید آل‌های ماکسیمال در R را طیف اید آل ماکسیمال R می گوییم و با $Max(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۱.۱.۱ فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. پوچساز M در R را با $ann_R(M)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$ann_R(M) := \{x \in M \mid \forall\, r \in R \,:\, rx = ۰\}$$

و در صورتی که $ann_R(M) = 0$، M را یک مدول وفادار می‌نامیم.

تعریف ۲۲.۱.۱ حلقه‌ی R را یک حلقه‌ی ابتدایی گوییم هرگاه یک $R-$مدول ساده و وفادار وجود داشته باشد. یک ایدآل I از R را ابتدایی نامیم، هرگاه R/I حلقه‌ی ابتدایی باشد.

تعریف ۲۳.۱.۱ ایدآل I از حلقه‌ی R را پوچ توان گوییم هرگاه به ازای عدد صحیحی مانند n، داشته باشیم $I^n = 0$.

تعریف ۲۴.۱.۱ عنصر x متعلق به حلقه‌ی R پوچ توان است، هرگاه $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری که $x^n = 0$، مجموعه تمام عناصر پوچ توان حلقه R را رادیکال پوچ R می‌نامیم و با $Nil(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۵.۱.۱ یک زیر مجموعه‌ی A از حلقه‌ی R را پوچ گوییم هرگاه هر عنصر A پوچ توان باشد.

تذکر ۲۶.۱.۱ هر ایدآل پوچ توان، پوچ است، زیرا $I^n = 0$ ایجاب می‌کند که به ازای هر $a \in I$، $a^n = 0$.

گزاره ۲۷.۱.۱ فرض کنید x یک عنصر پوچ توان از حلقه‌ی تعویض پذیر R باشد در این صورت داریم :

۱) $1 + x$ در R یکال است،

۲) مجموع یک عنصر پوچ توان و یک عنصر یکال، یکال است.

برهان: اثبات (۱): فرض کنیم x یک عنصر پوچ توان در حلقه‌ی R باشد پس $n \in N$ ی موجود است که $x^n = ۰$، بنا براین $۱ - x^n = ۱$. لذا $۱ - x^n = (۱ + x)(۱ - x + x^۲ + ... + (-۱)^n x^{n-۱}) = ۱$ واین نتیجه می دهد که $x + ۱$ در R یکال است.

اثبات (۲): فرض کنید x عنصری پوچ توان وa عنصری یکال از R باشد ثابت می کنیم $a + x$ یکال است. چون x پوچ توان است پس $n \in N$ ی موجود است که $x^n = ۰$ و چون a یکال است پس برای $n \in N$ داریم $a^{-۱}x^n = (a^{-۱}x)^n = ۰$ لذا $a^{-۱}x$ پوچ توان است وطبق قسمت (۱) $۱ + a^{-۱}x$ یکال است. حال از اینکه a یکال است پس $a(۱ + a^{-۱}x)$ یکال است وچون $a(۱ + a^{-۱}x) = a + x$ پس $a + x$ یکال است. □

تعریف ۲۸.۱.۱ فرض کنیم S حلقه‌ای تعویض پذ یر و یکد ار باشد و همچنین فرض کنیم R زیر حلقه‌ای از S باشد که شامل ۱_S است در این صورت گوئیم S یک توسیع حلقه‌ی R است.

تعریف ۲۹.۱.۱ زیر مجموعه‌ی ناتهی S از حلقه‌ی R یک زیر مجموعه بسته‌ضربی نامیده می شود هر گاه $۰ \notin S$ (زیرا در غیراین صورت S حلقه صفر است) و همچنین اگر $a, b \in S$ آنگاه داشته باشیم $ab \in S$، به علاوه اگر R یک حلقه‌ی یکد ار باشد، $۱_R \in S$.

گزاره ۳۰.۱.۱ فرض کنید I یک ایدآل حلقه‌ی تعویض پذیر R و S زیر مجموعه‌ی بسته‌ضربی R باشد و همچنین $I \cap S = \emptyset$. در این صورت مجموعه‌ی زیر از ایدآل های R، $\Omega = \{J \in I_R | J \cap S = \emptyset, J \supseteq I\}$ (که با رابطه‌ی شمول مجموعه‌ی مرتب جزئی است) حداقل یک عضو ماکسیمال دارد و هر عضو ماکسیمال Ω ایدآل اول R است. (I_R نشان دهنده مجموعه‌ی همه ایدآل های R) می باشد.

برهان: به قضیه‌ی ۴۴.۳ صفحه‌ی ۵۸ از مرجع [۳۳] رجوع شود. □

قضیه ۳۱.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد در این صورت داریم

$$Nil(R) = \bigcap_{P \in Spec(R)} P$$

.

برهان: به قضیه‌ی ۵.۳.۵ صفحه‌ی ۱۲۹ از مرجع [۳۲] رجوع شود. □

لم ۳۲.۱.۱ در حلقه‌ی ناصفر و یکد ار R همواره اید آل های (چپ) ماکسیمال وجود دارند. در واقع هر اید آل (چپ) در R(جزء خود R) مشمول در یک اید آل (چپ) ماکسیمال است.

برهان: به قضیه‌ی ۱۸.۲ صفحه‌ی ۱۹۸ از مرجع [۱۷] رجوع شود. □

قضیه ۳۳.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد در این صورت هر یک از شرایط زیر برابر با $J(R)$ (رادیکال جیکوبسن) از R می باشد:

۱) اشتراک همه‌ی اید آل های ماکسیمال (راست) چپ از R می باشد،

۲) اشتراک همه‌ی اید آل های ابتدایی (راست) چپ از R می باشد،

۳) { به ازای هر $r, s \in R$ آنگاه rxs که در آن $x \in R$ می‌باشد، شبه منظم است }،

۴) { به ازای هر $r \in R$ آنگاه rx که در آن $x \in R$ می باشد، شبه منظم است }،

۵) { به ازای هر $s \in R$ آنگاه xs که در آن $x \in R$ می باشد، شبه منظم است }،

٦) اجتماع همه‌ی اید آل های (راست)چپ شبه منظم از R می باشد،

۷) اجتماع همه‌ی اید آل های شبه‌منظم از R می باشد،

به علاوه اگر خاصیت شبه منظم با شبه منظم چپ(راست) عوض شود آنگاه شرایط ۳ تا۷ همچنان برای $J(R)$ برقرار است.

برهان: به قضیه‌ی ۱۵.۳ صفحه‌ی ۱٦٦ از مرجع [۱] رجوع شود. □

تعریف ۳۴.۱.۱ حلقه غیربدیهی و یکدار R را موضعی گویند، هرگاه دقیقاً دارای یک ایدآل ماکسیمال چپ (راست) باشد.
لذا اگر R یک حلقه موضعی باشد، $J(R)$ ایدآل ماکسیمال منحصربه فرد R می‌باشد.

قضیه ۳۵.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد آنگاه شرایط زیر معادلند:

۱) R یک حلقه‌ی موضعی است،

۲) R یک ایدآل چپ ماکسیمال دارد،

۳) $J(R)$، ایدآل چپ ماکسیمال است،

۴) $\frac{R}{J(R)}$ حلقه‌ی بخشی است،

۵) اگر $x \in R$ باشد آنگاه x یا $۱ - x$ وارون پذیراست.

برهان: به گزاره‌ی ۱۵.۱۵ صفحه‌ی ۱۷۰ ازمرجع [۱] رجوع شود. □

تعریف ۳٦.۱.۱ فرض کنیم P عددی اول باشد، در این صورت موضعی سازی $\mathbb{Z}$ در P که آن را با $\mathbb{Z}_{(P)}$ نشان می دهیم زیر حلقه‌ای از $\mathbb{Q}$ است که‌به‌صورت

$$\mathbb{Z}_{(P)} = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} | (P, n) = ۱\}$$

است و همچنین به‌راحتی می توان دید که $J(\mathbb{Z}_{(P)}) = P\mathbb{Z}_{(P)}$ است.

قضیه ۳۷.۱.۱ هر گاه R یک حلقه‌ی تعویض پذیر یکد ار باشد آنگاه شرایط زیر معادلند:

۱) R یک حلقه‌ی موضعی است،

۲) تمام غیر یکه‌های R مشمول در ایدآلی مانند $M \neq R$ اند،

۳) غیر یکه های R یک ایدآل تشکیل می دهند.

برهان: به قضیه‌ی ۱۳.۴ صفحه‌ی ۲۳۰ از مرجع [۱۷] رجوع شود. □

تعریف ۳۸.۱.۱ حلقه‌ی R را آرتینی چپ (آرتینی راست) می‌نامیم اگر R، به عنوان $R-$مدول چپ (راست)، آرتینی باشد R آرتینی نامیده می‌شود اگر هم آرتینی (چپ) و هم (آرتینی راست) باشد.

توجه کنید که بنا به آنچه گفته شد، حلقه‌ی R، آرتینی چپ (آرتینی راست) است اگر و فقط اگر هر زنجیر نزولی از ایدآل‌های چپ (ایدآل‌های راست) R سرانجام متوقف شود.

قضیه ۳۹.۱.۱ فرض کنیم R، حلقه‌ای جابه‌جایی و آرتینی باشد. در این صورت $Max(R)$ مجموعه‌ای متناهی است.

برهان: به قضیه ۱۱ صفحه‌ی ۱۷۱ از مرجع [۳۵] رجوع شود. □

قضیه ۴۰.۱.۱ فرض کنید R، حلقه‌ی آرتینی چپ (به ترتیب آرتینی راست، آرتینی) باشد. در این صورت، $J(R)$ پوچ توان است، یعنی عددی طبیعی مثل n موجود است که $J(R)^n = 0$.

برهان: به قضیه‌ی ۸ (قسمت الف) صفحه‌ی ۱۶۹ از مرجع [۳۵] رجوع شود. □

تعریف ۴۱.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک باشد در این صورت اگر قرار دهیم $G = A$ و $G_n = a^n$ که A یک حلقه و G_n زیر گروهی از G باشد و همچنین a یک ایدآل در حلقه‌ی A آن‌گاه