وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

هندسه ریمانی اوربیفلدها

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

مهدی آقاجانلو

استاد راهنما: دکتر سعاد ورسایی

دی ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به

پیشگاه حضرت ولی عصر (عج)

قدردانی و تشکر

سپاس و ستایش مخصوص خود را تقدیم درگاه پروردگار بسیار مهربان و بخشنده‌ام می‌نمایم. او که در تمام لحظات، این بنده ناچیز و نالایق خود را مورد لطف و رحمت بی‌کرانش قرار می‌دهد.

از خانواده‌ام بخصوص پدر و مادر مهربانم که در تمام امور تحصیلی پشتیبان و مشوق من بوده و وجود آن‌ها گرمی‌بخش زندگانی‌ام می‌باشد، کمال تشکر و امتنان را دارم.

از استاد راهنمای عزیزم دکتر سعاد ورسایی به خاطر تمام زحماتی که در امر تعلیم من متقبل شده‌اند و با راهنمایی‌ها و محبّت‌های بی‌دریغ‌شان، بر این حقیر منّت نهاده‌اند تشکر می‌نمایم و از خداوند متعال، برای ایشان آرزوی سربلندی و سرافرازی دارم.

در ضمن، از افتخار علمی ایران پروفسور ثبوتی به خاطر ایجاد یک محیط علمی پربار در دانشگاه علوم پایه زنجان سپاسگزارم.

همچنین از تمام اساتید بویژه اساتید بخش ریاضی که افتخار شاگردی آنها را داشته‌ام متشکرم. همچنین از دکتر میثم نصیری، دکتر بهروز میرزایی و دکتر سعید تفضلیان به خاطر داوری پایان نامه ممنونم.

در پایان از تمام دوستان و دانشجویان به خاطر همه لطف و خوبی‌های بی‌منّتشان سپاسگزارم و موفقیت همگان را در تمام مراحل زندگی از خداوند منّان خواستارم.

چکیده

هدف اصلی این پایان نامه معرفی اوربیفلدها می‌باشد. اوربیفلدها فضاهایی هستند که موضعاً همئومورف با فضای خارج قسمت ناشی از عمل یک گروه متناهی روی مجموعه‌های باز فضای اقلیدسی می‌باشند. در این پایان نامه، ابتدا مفاهیمی از هندسه ریمانی روی اوربیفلدها بیان می‌شود سپس این مفاهیم هندسی را برای اوربیفلدها تعمیم می‌دهیم، مفاهیمی از قبیل فرم‌های اساسی، فرم‌های التصاق و تانسورهای انحنا. در آخر با استفاده از فرمول انحنای گاوسی و مفهوم اندیس تکینگی برای میدان‌های برداری، قضیه گاوس—بنه را برای اوربیفلدهای ریمانی، فشرده و جهت‌دار ثابت می‌کنیم.

فهرست

مقدمه

در سال ۱۹۸۵، دیکسون [۱]، هاروی [۲]، وفا[۳] و ویتّن [۴] نظریه ریسمان [۵] را روی اوربیفلدها مطرح کردند. آنها اوربیفلدها را به صورت فضای خارج قسمت سرتاسری X/G برای یک گروه متناهی G در نظر گرفتند [٦]. با وجود اینکه اوربیفلد یک فضای منفرد می‌باشد، نظریه ریسمان اوربیفلدی به طور شگفت آوری یک نظریه هموار است. از آن زمان نظریه ریسمان اوربیفلدی یک بخش مهمی از نظریه ریسمان بوده است. با این حال اوربیفلدها در هندسه و توپولوژی به صورت گسترده مورد مطالعه قرار نگرفته‌اند. در بیست و سه سال اخیر فقط قسمت کوچکی از نظریه ریسمان اوربیفلدی در ریاضیات مورد توجه واقع شده است. برای مثال اعداد اویلر–هاج [٦] اوربیفلدی در هندسه و توپولوژی و تناظر مک کی[۷] در هندسه جبری مطالعه شده است (برای مطالعه بیشتر به مرجع [۷] و [۸] مراجعه نمایید). یکی از کارهای برجسته گذشته اثبات باتیرف[۸] از انگاره زیر است:

اعداد هاج اوربیفلدی یک فضای خارج قسمت سرتاسری X/G که در آن G یک زیرگروه متناهی از $SL(n,\mathbb{C})$ است، برابر اعداد هاج یک تحلیل X/G می‌باشد.

البته از این دست انگاره‌ها در نظریه ریسمان اوربیفلدی فراوان می‌توان یافت.

یکی از دلایل توسعه کند جنبه ریاضی نظریه ریسمان اوربیفلدی ضعف ارتباط میان فیزیکدانان و ریاضیدانان می‌باشد. البته در سالهای اخیر بدلیل افزایش تعداد ریاضیدانانی که جداً برای درک فیزیک تلاش می‌کنند، این وضعیت به سرعت در حال بهتر شدن است. با درک بهتر ایده‌های فیزیکی نظریه ریسمان اوربیفلدی، ریاضیدانان قادر خواهند بود تا همه نتایج نظریه ریسمان اوربیفلدی را کشف کنند. در این راستا از کارهایی مانند [۹]، [۱۰]، [۱۱] و [۱۲] می‌توان نام برد.

بررسی اجمالی نظریه ریسمان اوربیفلدی نشان می‌دهد که ریاضیات این نظریه بسیار جالب و قابل توجه است.

---

[۱] Dixson
[۲] Harvey
[۳] Vafa
[۴] Witten
[۵] String Theory
[٦] Euler-Hodge Numbers
[۷] McKay Correspondence
[۸] Batyrev

در حقیقت این نظریه، انگیزه بی‌نظیری را برای گرایش شاخه‌های جدید ریاضیات به اوربیفلدها ایجاد کرده است. این اعتقاد وجود دارد که یک توپولوژی و هندسی ریسمانی روی اوربیفلدها در حال ظهور است. هسته این هندسه و توپولوژی مفهوم قطاع‌های پیچ دار[۹] است. به عبارت نادقیق، سازگاری نظریه ریسمان اوربیفلدی مستلزم آن است که فضای هیلبرت ریسمانی شامل عواملی باشد که آنها را قطاع‌های پیچ دار می‌نامیم. وجود این قطاع‌ها را می‌توان به عنوان اثر تکینگی‌ها تفسیر کرد. به این ترتیب همه کمیتهای دیگر مانند توابع همبستگی باید به نوعی از وجود این قطاع‌ها متأثر شوند. بنابراین توپولوژی معمولی اوربیفلدها یک نظریه ناقص است. برای تکمیل این نظریه لازم است که مفهوم قطاع‌های پیچ دار به این نظریه اضافه شود. بعلاوه نظریه ریسمان اوربیفلدی دارای یک درجه آزادی درونی معینی است که به آن پیچش گسسته[۱۰] می‌گویند [۱۳]. این درجه آزادی اجازه می‌دهد تا بتوانیم نظریه ریسمان اوربیفلدی را تغییر دهیم [۱۴]. این ها از جمله مهمترین مفاهیم مندرج در نظریه ریسمان اوربیفلدی می‌باشند که لازم است از جنبه ریاضی مورد بررسی قرار گیرند.

در این پایان نامه مفهوم اوربیفلد را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و مفاهیم مهم هندسه ریمانی موجود روی منیفلدها را برای اوربیفلدها تعمیم می‌دهیم. در پایان قضیه گاوس—بنه را برای اوربیفلدها اثبات می‌کنیم.

در فصل اول این پایان نامه، ابتدا با مفهوم التصاق خطی و مشتق هموردا آشنا می‌شویم. سپس با استفاده از نمادهای کریستفل، التصاق‌های خطی را به صورت موضعی بیان می‌کنیم پس از آن روی کلافهای تانسوری التصاق خاصی را معرفی می‌نماییم و به کمک آن مفهوم مشتق هموردا کل و هسیان هموردا را مطرح می‌کنیم. در پایان برای هر خم، مشتق هموردی را در طول آن خم ارائه می‌دهیم. مطالب این فصل از مرجع [۳، فصل ۴] است.

در فصل دوم، ابتدا با مفهوم منیفلد ریمانی آشنا می‌شویم و در ادامه وجود قاب راست هنجار موضعی را روی آن نشان می‌دهیم. پس از آن روی هر منیفلد هموار وجود یک متر ریمانی بررسی می‌شود. در پایان این فصل با استفاده از تکنیک بالا بردن و پایین آوردن اندیس در یک تانسور، التصاق لوی — چویتا را روی منیفلد ریمانی معرفی می‌نماییم. مطالب این فصل مرجع [۳، فصل ۳ و ۵] است.

در فصل سوم، ابتدا مفهوم درونریختی انحنا و تانسور انحنا را بیان می‌کنیم و قضایای مورد نیاز را مطرح می‌کنیم. در ادامه تقارن‌های روی تانسورهای انحنا را مطالعه می‌کنیم و در پایان فصل با اتحاد بیانکی آشنا می‌شویم. مطالب این فصل از ۳ بخش اول فصل ۷ مرجع [۳] است.

---

[۹] Twisted Sectors

[۱۰] Discrete Torsion

موضوع فصل چهارم، معرفی اوربیفلدها می‌باشد. برای این منظور، ابتدا مفهوم پایه‌ای دستگاه یکنواخت‌ساز موضعی را مطرح می‌کنیم پس از آن با مفاهیمی مانند انژکسیون، اوربیفلد و خانواده معرف آشنا می‌شویم و رابطه هم ارزی میان خانواده‌های معرف را تشریح می‌کنیم. در ادامه میان خانواده‌های معرف نگاشت اوربیفلدی را تعریف می‌کنیم و یک رابطه هم‌ارزی برای نگاشت‌های اوربیفلدی تعریف می‌کنیم. مطالب این فصل از مرجع [۱] است.

در فصل پنجم با استفاده از تعریف زوج خانواده‌های معرف، مفهوم کلاف اوربیفلدی را ارائه می‌دهیم. در ادامه قضیه مهمی را درباره شرط هم ارزی مستقیم زوج خانواده‌های معرف بیان می‌کنیم. سپس مفهوم برش روی کلاف اوربیفلدی و نگاشت میان کلاف‌های اوربیفلدی ارائه می‌شود. در ادامه روی اوربیفلدهای ویژه‌ای، کلاف اوربیفلدی ساخته می‌شود. مطالب این فصل از مرجع [۱] است.

در فصل ششم، کلاف های اوربیفلدی از قبیل کلافهای مماس و کلاف‌های تانسوری ارائه می‌شوند و با استفاده از آنها فرمهای دیفرانسیل و مشتق خارجی روی اوربیفلدها معرفی می‌شوند. در پایان این فصل با انتگرال‌گیری از فرمهای دیفرانسیل روی اوربیفلدها آشنا می‌شویم. مطالب این فصل از مرجع [۱] است.

در فصل هفتم مفاهیم هندسه ریمانی را روی اوربیفلدها تشریح می‌کنیم. در ابتدا، روی اوربیفلدها متر ریمانی را تعریف می‌کنیم. سپس با کلاف بردارهای مماس واحد و قاب‌های راست هنجار روی اوربیفلدها آشنا می‌شویم. در ادامه با معرفی فرم‌های اساسی، فرم‌های التصاق و فرم‌های انحنا و بیان قضیه‌های مورد نیاز، فرمول انحنای گاوسی را ارائه می‌نماییم. این فرمول در قضیه گاوس—بنه در فصل بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد. مطالب این فصل از مرجع [۱] است.

سرانجام در فصل هشتم، ابتدا با استفاده از فرم‌های کمکی مطرح شده در [۲]، فرمول مهمی را با استفاده از روشهای کلاسیک بدست می آوریم که از آن در ادامه برای اثبات قضیه گاوس—بنه استفاده می‌شود. سپس برای هر نقطه تکین یک میدان برداری، یک اندیس تکینگی نسبت می‌دهیم و با بکارگیری آن فرمول انتگرال کرونکر را روی اوربیفلدها اثبات می‌نماییم. در پایان فصل با استفاده از خاصیت‌های فرم‌های کمکی، فرمول بنیادی چرن را بدست می آوریم و در نهایت، قضیه گاوس—بنه برای اوربیفلد ریمانی، جهت پذیر و فشرده اثبات می‌شود. مطالب این فصل از مرجع [۱] و قسمتهایی از مرجع [۲] است.

فصل اول

التصاق‌های خطی

۱.۱ مفهوم التصاق خطی و مشتق هموَرد

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید $\pi : E \to M$ یک کلاف برداری روی منیفلد M و نیز $\varepsilon(M)$ فضای برش‌های هموار E باشد. یک التصاق خطی[۱] (یا به اختصار «التصاق») در E نگاشت

$$\nabla : \Gamma(M) \times \varepsilon(M) \to \varepsilon(M)$$

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

می‌باشد که شرایط زیر را داراست:

الف) ∇ در X روی $C^\infty(M)$ خطی است. یعنی به ازای هر $f, g \in C^\infty(M)$،

$$\nabla_{fX+gX'} Y = f\nabla_X Y + g\nabla_{X'} Y$$

ب) ∇ در Y روی $\mathbb{R}$ خطی است. یعنی به ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$،

---

۱ Linear Connection

$$\nabla_X(aY+bY')=a\nabla_X Y+b\nabla_X Y'$$

ج) ∇ در قانون ضرب زیر صدق می‌کند:

به ازای هر $f\in C^\infty(M)$، $\nabla_X(fY)=(Xf)Y+f\nabla_X Y$

$\nabla_X Y$ را مشتق هموردِ[۲] Y در راستای[۳] X می‌نامند.

در لم زیر دیده می‌شود ∇ یک عمل موضعی می‌باشد.

لم ۲.۱.۱ اگر ∇ التصاق کلاف E باشد و $X\in\Gamma(M)$ و $Y\in\varepsilon(M)$ و $p\in M$ آنگاه $\nabla_X Y\mid_p$ فقط به مقادیر X و Y در همسایگی به اندازه کافی کوچک نقطه p بستگی دارد. به صورت معادل اگر در یک همسایگی کوچک p، $X=\tilde{X}$ و $Y=\tilde{Y}$ باشد آنگاه $\nabla_X Y\mid_p=\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y}\mid_p$.

برهان. قرار دهید $S:=Y-\tilde{Y}$. در این صورت برای یک همسایگی U از p، $S=0$ است. حال تابع ضربه $\varphi\in C^\infty(M)$ را با شرط $Supp\varphi\subset U$ و $\varphi(p)=1$ در نظر بگیرید بنابراین روی M، $\varphi S=0$ می‌باشد. بنابراین $\nabla_X(\varphi S)=0$. حال با اعمال قانون ضرب داریم

$$0=\nabla_X(\varphi S)=(X\varphi)S+\varphi\nabla_X S$$

چون $S(p)=0$ بنابراین جمله اول در p صفر است در نتیجه $(\varphi\nabla_X S)(p)=0$. چون $\varphi(p)=1$ پس $(\nabla_X S)(p)=0$. به عبارت دیگر

$$0=\nabla_X(Y-\tilde{Y})=\nabla_X Y-\nabla_X\tilde{Y}$$

یعنی

$$\nabla_X Y|_p=\nabla_X\tilde{Y}|_p$$

به طور مشابه برای X نیز حکم برقرار است.

$\square$

---

[۲] Covariant Derivative

[۳] Direction

تعریف ۳.۱.۱ اگر ∇ یک التصاق خطی در $T(M)$ (کلاف مماس منیفلد M) باشد آنگاه ∇ را یک التصاق خطی روی M می‌نامند.

توجه کنید که یک التصاق خطی میدان تانسوری نیست زیرا روی $C^\infty(M)$ در Y خطی نیست.

۲.۱ نمادهای کریستفل

فرض کنید $\{E_i\}$ یک قاب موضعی[۴] در TM روی مجموعه باز $U \subset M$ باشد. معمولاً قاب موضعی را $E_i = \partial_i$ در نظر می‌گیریم. داریم

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k \tag{۱.۱}$$

که در آن توابع هموار Γ_{ij}^k $(i, j, k = ۱, \cdots, n)$ را نمادهای کریستفل[۵] می‌گویند.

طبق لم بعدی مقدار∇ روی U بستگی به نمادهای کریستفل دارد.

لم ۱.۲.۱ فرض کنید ∇ یک التصاق باشد و $X, Y \in \Gamma(U)$. همچنین فرض کنید $X = X^i E_i$ و $Y = Y^j E_j$. در اینصورت

$$\nabla_X Y = (X(Y^k) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) E_k$$

برهان.

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_X (Y^j E_j) = X(Y^j) E_j + Y^j \nabla_X E^j \\
&= X(Y^k) E_k + Y^j \nabla_{X^i E_i} E_j = X(Y^k) E_k + X^i Y^j \nabla_{E_i} E_j
\end{aligned}$$

---

[۴] Local Frame

[۵] Christoffel Symbols

$$= \quad X(Y^k)E_k + X^iY^j\Gamma^k_{ij}E_k$$

$$= \quad (X(Y^k) + X^iY^j\Gamma^k_{ij})E_k$$

□

مثال ۲.۲.۱ روی $\mathbb{R}^n$ و نسبت به مختصات طبیعی آن داریم $\nabla_X(Y^j\partial_j) = XY^j\partial_j$. زیرا $\nabla_{\partial_i}\partial_j = ۰$ در نتیجه $\Gamma^k_{ij}\partial_k = ۰$. بنابراین نمادهای کریستفل روی $\mathbb{R}^n$ برابر صفر است. △

لم ۳.۲.۱ فرض کنید M توسط نقشه مختصاتی واحدی پوشیده شود. تناظری یک به یک میان التصاق‌های خطی M و توابع هموار $\{\Gamma^k_{ij}\}$ روی M توسط معادله زیر وجود دارد:

$$.\nabla_XY = (X^i\partial_iY^k + X^iY^j\Gamma^k_{ij})\partial_k \qquad (۲.۱)$$

برهان. اولاً توجه کنید معادله اخیر همان معادله لم قبل با جایگذاری $E_i = \partial_i$ می‌باشد. بنابراین اگر ∇ داده شده باشد آنگاه Γ^k_{ij} ها از (۱.۱) بدست می‌آیند. به عکس اگر $\{\Gamma^k_{ij}\}$ داده شده باشد ∇ را برای میدان‌های برداری هموار X و Y با $X = X^i\partial_i$ و $Y = Y^j\partial_j$، به صورت (۲.۱) تعریف کنید. به راحتی دیده می‌شود ∇ یک التصاق است. □

قضیه ۴.۲.۱ هر منیفلد یک التصاق خطی دارد.

برهان. فرض کنید منیفلد M توسط نقشه‌های مختصاتی $\{U_\alpha\}_\alpha$ پوشانده شده باشد. طبق لم قبل برای هر همسایگی U_α التصاق ∇^α موجود است. با در نظر گرفتن پارتیسون واحد $\varphi = \{\varphi_\alpha\}_\alpha$ برای همسایگی‌های

$\{U_\alpha\}_\alpha$ می‌توان تعریف کرد:

$$\nabla_X Y = \sum_\alpha \varphi_\alpha \nabla^\alpha_X Y$$

∇ در تعریف اخیر التصاق است. در این قسمت فقط قانون ضرب بررسی می‌شود.

$$\nabla_X(fY) = \sum_\alpha \varphi_\alpha \nabla^\alpha_X(fY) = \sum_\alpha \varphi_\alpha((Xf)Y + f\nabla^\alpha_X Y)$$

$$= \sum_\alpha \varphi_\alpha (Xf)Y + f\sum_\alpha \varphi_\alpha \nabla^\alpha_X Y$$

$$= (Xf)Y + f\nabla_X Y$$

$\square$

تذکر: اگر ∇^1 و ∇^2 دو التصاق روی $\Gamma(M)$ باشد آنگاه هر ترکیب آنها التصاق نیست. برای مثال $\frac{1}{2}\nabla^1$ و $\nabla^1 + \nabla^2$ در قانون ضرب صدق نمی‌کند زیرا

$$(\nabla^1 + \nabla^2)_X(fY) = \nabla^1_X(fY) + \nabla^2_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla^1_X Y + (Xf)Y + f\nabla^2_X Y$$

$$= 2(Xf)Y + f(\nabla^1 + \nabla^2)_X Y$$

$$\neq (Xf)Y + f(\nabla^1 + \nabla^2)_X Y$$

دیدیم هر التصاق خطی روی M در واقع مشتق هموردا میدان‌های برداری M است. در لم زیر نشان داده می‌شود هر التصاق خطی یک التصاق یگانه روی هر کلاف تانسوری M القا می‌کند.

۳.۱ التصاق روی کلاف تانسوری

لم ۱.۳.۱ اگر ∇ یک التصاق خطی روی M باشد. آنگاه یک التصاق یگانه روی هر کلاف تانسوری $T^k_l M$ متناظر ∇ وجود دارد (این التصاق را نیز با ∇ نمایش می‌دهیم) که شرایط زیر در آن صدق می کند:

الف) روی TM، ∇ همان التصاق خطی M می‌باشد.

ب) روی $T^0(M)$، ∇ همان مشتق معمولی توابع است. یعنی به ازای هر $f \in C^\infty(M)$،

$$\nabla_X f = X(f)$$

ج) ∇ قانون ضرب تانسوری زیر را دارد:

$$\nabla_X(F\otimes G)=(\nabla_X F)\otimes G+F\otimes(\nabla_X G)$$

د)∇ با همه ادغام‌ها جابجا می‌شود: برای نمونه

$$tr(\nabla_X F)=\nabla_X(trF)$$

همچنین ∇ شرایط زیر را نیز ارضا می‌کند:

ر) ∇ قانون ضرب زیر نسبت به زوج میدان هم بردار ω و میدان برداری Y را دارد:

$$\nabla_X\langle\omega,Y\rangle=\langle\nabla_X\omega,Y\rangle+\langle\omega,\nabla_X Y\rangle$$

ه) برای هر $F\in\Gamma_l^k(M)$ و میدانهای برداری Y_i و ۱−فرمهای ω^j،

$$\nabla_X F(\omega^1,\cdots,\omega^l,Y_1,\cdots,Y_k)=X(F(\omega^1,\cdots,\omega^l,Y_1,\cdots,Y_k))$$

$$-\sum_{s=1}^{l}F(\omega^1,\cdots,\nabla_X\omega^s,\cdots,\omega^l,Y_1,\cdots,Y_k)$$

$$-\sum_{s=1}^{k}F(\omega^1,\cdots,\omega^l,Y_1,\cdots,\nabla_X Y_s,\cdots,Y_k)$$

برهان. تعریف کنید:

$$\nabla_X(F\otimes G)=(\nabla_X F)\otimes G+F\otimes(\nabla_X G)$$

فرض کنید $F=F_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l}\partial_{j_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{j_l}\otimes dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_k}$ یک $\binom{k}{l}$ میدان تانسوری باشد در این صورت طبق تعریف بالا $\nabla_X F$ شکل زیر را دارد:

$$\nabla_X F=(\nabla_p F_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l})\partial_{j_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{j_l}\otimes dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_k}X^p$$

که در آن

$$\nabla_p F_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l}=\partial_p F_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l}+\sum_{s=1}^{l}F_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots q\cdots j_l}\Gamma_{pq}^{j_s}-\sum_{s=1}^{k}F_{i_1\cdots q\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l}\Gamma_{pi_s}^{q}$$

باتوجه به تعریف $\nabla_X F$، (الف) و (ب) و (ج) براحتی ثابت می شوند حال به اثبات (د) می‌پردازیم.

فرض کنید $F = F^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k}\partial_{j_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{j_l}\otimes dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_k}$ باشد در این صورت

$$trF = F^{mj_2\cdots j_l}_{mi_2\cdots i_k}\partial_{j_2}\otimes\cdots\otimes\partial_{j_l}\otimes dx^{i_2}\otimes\cdots\otimes dx^{i_k}$$

لذا

$$\nabla_p trF = (\nabla_p F^{mj_2\cdots j_l}_{mi_2\cdots i_k})\partial_{j_2}\otimes\cdots\otimes\partial_{j_l}\otimes dx^{i_2}\otimes\cdots\otimes dx^{i_k}$$

که در آن

$$\nabla_p F^{mj_2\cdots j_l}_{mi_2\cdots i_k} = \partial_p F^{mj_2\cdots j_l}_{mi_2\cdots i_k} + \sum_{s=2}^{l} F^{mj_2\cdots q\cdots j_l}_{mi_2\cdots i_k}\Gamma^{j_s}_{pq} - \sum_{s=2}^{k} F^{mj_2\cdots j_l}_{mi_2\cdots q\cdots i_k}\Gamma^{q}_{pi_s}$$

از طرفی

$$tr(\nabla_p F) = (\nabla_p F^{mj_2\cdots j_l}_{mi_2\cdots i_k})\partial_{j_2}\otimes\cdots\otimes\partial_{j_l}\otimes dx^{i_2}\otimes\cdots\otimes dx^{i_k}$$

که در آن

$$\nabla_p F^{mj_2\cdots j_l}_{mi_2\cdots i_k} = \partial_p F^{mj_2\cdots j_l}_{mi_2\cdots i_k} + \sum_{s=1}^{l} F^{mj_2\cdots q\cdots j_l}_{mi_2\cdots i_k}\Gamma^{j_s}_{pq} - \sum_{s=1}^{k} F^{mj_2\cdots j_l}_{mi_2\cdots q\cdots i_k}\Gamma^{q}_{pi_s}$$

در تساوی بالا عبارت مربوط به $s=1$ برابر است با:

$$F^{mj_2\cdots q\cdots j_l}_{mi_2\cdots i_k}\Gamma^{m}_{pq} - F^{mj_2\cdots j_l}_{mi_2\cdots q\cdots i_k}\Gamma^{q}_{pm}$$

چون q, m به صورت آزاد بین ۱ تا n تغییر می‌کنند بنابراین این دوجمله باهم حذف می‌شوند. پس

$$tr(\nabla_p F) = (\nabla_p F^{mj_2\cdots j_l}_{mi_2\cdots i_k})\partial_{j_2}\otimes\cdots\otimes\partial_{j_l}\otimes dx^{i_2}\otimes\cdots\otimes dx^{i_k}$$

که در آن

$$\nabla_p F^{mj_2\cdots j_l}_{mi_2\cdots i_k} = \partial_p F^{mj_2\cdots j_l}_{mi_2\cdots i_k} + \sum_{s=2}^{l} F^{mj_2\cdots q\cdots j_l}_{mi_2\cdots i_k}\Gamma^{j_s}_{pq} - \sum_{s=2}^{k} F^{mj_2\cdots j_l}_{mi_2\cdots q\cdots i_k}\Gamma^{q}_{pi_s}$$

بنابراین

$$\nabla_X(trF) = tr(\nabla_X F).$$

با استفاده از تعریف $\nabla_X F$، به راحتی (ر) و (ه) قابل اثبات است. $\square$

۱.۳.۱ مشتق هموورد کل و هسیان هموورد

لم ۲.۳.۱ اگر ∇ یک التصاق خطی روی M باشد و $F \in \Gamma_l^k(M)$، نگاشت

$$\nabla F : \underbrace{\Gamma^1(M) \times \cdots \times \Gamma^1(M)}_{l-copy} \times \underbrace{\Gamma(M) \times \cdots \times \Gamma(M)}_{(k+1)-copy} \to C^\infty(M)$$

با ضابطه

$$\nabla F(\omega^1, \cdots, \omega^l, Y_1, \cdots, Y_k, X) = \nabla_X F(\omega^1, \cdots, \omega^l, Y_1, \cdots, Y_k)$$

یک $\binom{k+1}{l}$—میدان تانسوری می‌باشد.

برهان. با توجه به لم قبل دیده می‌شود که $\nabla_X F$ روی $C^\infty(M)$ در $(k+l)$— مولفه خود چند خطی است و همچنین در X روی $C^\infty(M)$ خطی است در نتیجه طبق لم مشخصه تانسوری $\nabla_X F$ یک $\binom{k+1}{l}$—میدان تانسوری می‌باشد. $\square$

∇F مشتق هموورد کل[۶] برای F نامیده می‌شود.

مثال ۳.۳.۱ فرض کنید u یک تابع هموار M باشد آنگاه $\nabla u \in \Gamma^1(M)$ همان ۱— فرم du است. به همین دلیل هر دو تانسور عمل یکسانی روی بردارها دارند:

[۶] Total Covariant Derivative