بسم الله الرحمن الرحیم

۱۰۴۹۱۷

دانشگاه یزد

مجتمع علوم پایه

دانشکده ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

# حل عددی معادلات انتگرال ولترا- فردهلم نوع دوم با هسته‌های منفرد

استاد راهنما: دکتر فرید (محمد) مالک قائینی

استاد مشاور: دکتر سید محمد مهدی حسینی

پژوهش و نگارش: عفت سلمانی

آبان ۱۳۸۵

تقدیم به

دو موجود مقدس

دو قصیدهٔ بلند زندگیم

**«پدر و مادر مهربانم»**

به پاس فداکاری و استواری‌شان.

و تقدیم به

**«خواهر و برادران عزیزم»**

به پاس مهربانی و همراهی‌شان.

# قدردانی

اول سپاس بیکران خدایی را که هر توفیقی در گرو عنایت اوست.

سپس از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر فرید(محمد) مالک قائینی که هم در دوران تحصیل از محضر ایشان بهره برده‌ام و هم استاد راهنمای اینجانب بودند، کمال تشکر وقدردانی را دارم که طی طریق این تحقیق، مرهون راهنمایی‌ها و شکیبایی‌های ایشان است.

همچنین از جناب آقای دکتر سید محمد مهدی حسینی استاد مشاور بزرگوارم بخاطر راهنمایی‌های دلسوزانه‌شان تشکر می‌کنم.

از اساتید گرامی، جناب آقای دکتر محسن شاهرضایی و جناب آقای دکتر قاسم برید لقمانی نیز به خاطر قبول داوری این پایان نامه تشکر و قدردانی می‌نمایم.

همچنین از جناب آقای پروفسور محمد عبدالله عبدو، هیأت علمی دانشگاه اسکندریهٔ مصر، بخاطر راهنمایی‌ها و کمک‌های صمیمانه‌شان، تشکر می‌نمایم.

از دوستان عزیز و همکلاسی‌های گرانقدرم که خاطرات خوش و ارزنده‌ای از ایشان به یادگار دارم، کمال تشکر را می‌نمایم.

از برادران و خواهر خوبم نیز که همواره مشوق من در امر تحصیل بوده‌اند، بسیار ممنونم.

و در پایان از تنها سرمایه‌های زندگی‌ام، پدر و مادر عزیزم که هر چه امروز دارم از دعای ایشان است و حقیر خاک پای آنانم، با تمام وجود قدردانی می‌کنم.

عفت سلمانی

مهر ۱۳۸۵ — یزد

بسمه تعالی

| مدیریت تحصیلات تکمیلی | صورتجلسه دفاعیه پایان نامه دانشجوی<br>دوره کارشناسی ارشد | شناسه: ب/ک/۳ |
| --- | --- | --- |

جلسه دفاعیه پایان نامه تحصیلی خانم: عفت سلمانی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته/گرایش:

ریاضی کاربردی

تحت عنوان: حل عددی معادلات انتگرال ولترا - فردهلم نوع دوم با هسته‌های منفرد

و تعداد واحد: ۶ درتاریخ ۸۵/۸/۱۰ باحضور اعضای هیأت داوران (به شرح ذیل) تشکیل گردید.

پس از ارزیابی توسط هیأت داوران، پایان‌نامه با نمره: به عدد ۱۹/۲۵ به حروف نوزده و بیست و پنج صدم و

درجه عالی مورد تصویب قرارگرفت.

| عنوان | نام و نام خانوادگی | امضاء |
| --- | --- | --- |
| استاد/ استادان راهنما: | فرید(محمد) مالک | |
| استاد/ استادان مشاور: | سیدمحمدمهدی حسینی | |
| متخصص وصاحبنظرداخلی: | قاسم برید لقمانی | |
| متخصص و صاحبنظر خارجی: | محسن شاهرضایی | |

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر)

نام ونام خانوادگی: محمدعلی کریمی

امضاء:

# فهرست مندرجات

# لیست اشکال

# چکیده


در این پایان‌نامه معادله انتگرال فردهلم—ولترای نوع دوم

$$\mu\phi(x,t) - \lambda \int_{-1}^{1} K(x,y)\phi(y,t)\,dy - \lambda \int_{0}^{t} F(t,\tau)\phi(x,\tau)\,d\tau$$

$$= f(x,t) \quad (0 \leq t \leq T \ : |x| \leq 1),$$

را در نظر می‌گیریم، با این فرض که هستهٔ $K(x,y)$ در انتگرال فردهلم ناپیوسته است، درحالیکه هستهٔ $F(t,\tau)$ در انتگرال ولترا پیوسته است.

در ابتدا روش ماتریس توپلیتز و روش نیستروم ضربی برای حل معادلات انتگرال ترکیبی منفرد نوع دوم به کار گرفته می‌شود. سپس جواب به دست آمده با جواب دقیق معادله انتگرال مقایسه شده و خطای هر روش محاسبه می‌شود.

اگر در معادلهٔ فوق قرار دهیم: $\mu = 0, t = 0$ ، آنگاه خواهیم داشت:

$$\int_{-1}^{1} K(x,y)\phi_0(y)\,dy = f_0(x)$$

که $f_0(x) = f(x,0), \phi_0(y) = \phi(y,0)$ است، که یک معادله انتگرال فردهلم نوع اول با هستهٔ منفرد به دست می‌آید. سپس روش‌های مختلف زیر را برای حل این معادلات ارائه می‌کنیم: روش معادله انتگرال منفرد (روش کوشی)، روش تبدیلات دوتایی (روش فوریه)، روش چندجمله‌ای‌های متعامد(روش چبی‌شف)، روش نظریهٔ پتانسیل و روش کرین.

در پایان یکی از کاربردهای مهم معادلات انتگرال منفرد در نظریهٔ کشسانی بررسی می‌شود.

# فصل ۱

# تاریخچه و مقدمات

## ۱.۱ تاریخچه‌ای از معادلات انتگرال

نظریه معادلات انتگرال یکی از مهمترین شاخه‌های آنالیز ریاضی بوده و یکی از جنبه‌های مهم کاربرد آن در ارتباط با مسائل مقدار مرزی در نظریه معادلات با مشتقات جزئی است. معادلات انتگرال در بسیاری از مسائل فیزیکی و مهندسی ظاهر می‌شوند. در تحقیقات چند دههٔ اخیر در نظریه کشسانی، این معادلات و بخصوص دسته‌ای از آنها،یعنی معادلات انتگرال منفرد نقش مهمی را ایفا کرده‌اند.

در ابتدا حل معادله انتگرال، وارون کردن انتگرال تلقی می‌شد. لیکن اولین بار اصطلاح معادله انتگرال به‌وسیله دوبوآ ریموند[۱] پیشنهاد شد. لاپلاس [۲] در سال ۱۷۸۲ معادله انتگرالی را برای تابع $f$ به‌صورت زیر ارائه داد:

$$F(x)=\int_{\circ}^{\infty} e^{-xt} f(t)dt \qquad (۱.۱.۱)$$

که در آن $F(x)$ تابع داده شده‌ای است. فوریه[۳] در سال ۱۸۱۱ روی نظریه حرارت کار کرد و مقالاتی را در این زمینه ارائه داد. آبل[۴] در سال ۱۸۲۳ در مسأله خود که به مسأله مکانیکی آبل معروف است، کاربرد معادلات انتگرال را مطرح کرد. در سال ۱۸۲۶ پواسون[۵] در نظریه مغناطیس خود، نوعی معادله انتگرال را مطرح کرد. لیوویل[۶] مستقلاً معادلات انتگرال خاصی را از سال ۱۸۳۲ به بعد حل کرد. یک گام مهم در راه توسعه معادلات انتگرال توسط لیوویل برداشته شد و آن ابداع روش حل بعضی معادلات

[۱] De Bois – Reymond
[۲] Laplace
[۳] Fourier
[۴] Abel
[۵] Poisson
[۶] Liouville

دیفرانسیل به کمک معادلات انتگرال بود. بعد از وی در سال ۱۹۷۰ نویمان [۷] با تبدیل مسأله دیریکله [۸] به یک معادله انتگرال گام دیگری را در تکامل نظریه معادلات انتگرال برداشت.

اصطلاح معادلات نوع اول و دوم که امروزه در معادلات به‌کار می‌رود، اولین بار توسط هیلبرت[۹] پیشنهاد شد. البته قبل از هیلبرت معادلات آبل و لیوویل به فرم‌های زیر مطرح بود که هر دو از نمونه‌های مهم در معادلات انتگرال هستند:

$$g(x) = \int_a^x k(x,y) f(y)\, dy \qquad (۲.۱.۱)$$

$$f(x) = g(x) + \int_a^x k(x,y) f(y)\, dy \qquad (۳.۱.۱)$$

که در آن‌ها $k$ و $g$ توابعی معلوم می‌باشند و $f$ تابعی مجهول است. پوآنکاره [۱۰] در سال ۱۸۹۶ معادله انتگرال

$$u(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\; u(y) dy = f(x) \qquad (۴.۱.۱)$$

را که متناظر با معادله دیفرانسیل جزئی حرکت موج $u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = f(x,y)$ می‌باشد، به‌دست آورد. فردهلم [۱۱] ریاضیدان سوئدی، جهت به دست آوردن جواب این معادله، تحقیقاتی انجام داد. دانشمند ایتالیایی ولترا[۱۲] اولین کسی است که در سال ۱۸۹۶

[۷] Neuman

[۸] Dirichlet

[۹] Hilbert

[۱۰] Poincare

[۱۱] Eric Ivan Fredholm

[۱۲] Vito – Volterra

نظریه عمومی معادلات انتگرال را ارائه داد و در حدود سال‌های آغازین قرن بیستم (۱۹۳۰ − ۱۹۰۰) جهت حل مسأله دیریکله از معادلات انتگرال نوع دوم استفاده کرد. معادله انتگرال فردهلم به صورت زیر است:

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)f(y)\,dy \qquad (a \leq x \leq b) \tag{۵.۱.۱}$$

در سال ۱۹۰۱ ارائه یک سمینار توسط اریک هولمگرن [۱۳] بر روی کارهای فردهلم علاقه هیلبرت را به تحقیق روی معادلات انتگرال برانگیخت و او در بسیاری از مسائل ریاضی‌فیزیک از معادلات انتگرال کمک گرفت. هیلبرت بازهٔ انتگرال‌گیری را (۰,۱) و هسته را پیوسته فرض کرد. یکی از کارهای مهم هیلبرت، فرمول‌بندی مسائل مقدار مرزی معادلات دیفرانسیل به صورت معادلات انتگرال است. در اوایل نیمه دوم قرن بیستم، تحقیقات زیادی روی جواب معادله انتگرال بوسیله هرمن ویل [۱۴] در ارتباط با اینکه به ازای چه مقادیر $\lambda$، معادله انتگرال جواب دارد، صورت گرفته است. بعد از آن روش‌های عددی برای حل معادلات انتگرال به کار گرفته شدند.

## ۲.۱ طبقه‌بندی معادلات انتگرال

با توجه به توسعه معادلات انتگرال و کاربردهای وسیع آن یک طبقه‌بندی جامع برای آن‌ها، به وجود آمده است. بخصوص که از یک طرف در مسائل مختلف فیزیکی و مهندسی انواع خاصی از معادلات انتگرال ظاهر می‌شوند و از طرف دیگر راه‌هایی که برای حل آن‌ها ارائه شده است، متفاوت است. با توجه به مطالب فوق لازم است طبقه‌بندی این معادلات

[۱۳] *Eric Holmgern*

[۱۴] *Herman Weyl*

بر حسب منفرد بودن یا نبودن مسأله، نحوهٔ ظهور تابع مجهول زیر علامت انتگرال، نوع حدود انتگرال‌گیری، وجود یا عدم وجود مجهول خارج علامت انتگرال‌گیری، انجام گیرد:

(الف) معادلات انتگرالی که در آنها دامنه انتگرال‌گیری ثابت است، به معادلات انتگرال فردهلم معروف هستند. اما معادلاتی که حداقل یکی از حدود فاصله انتگرال‌گیری متغیر باشد، معادلات انتگرال ولترا نامیده می‌شوند و معمولا همان حد بالای انتگرال‌گیری به عنوان متغیر انتخاب می‌شود. معادلات انتگرال ولترا و فردهلم به دو نوع زیر تقسیم می‌شوند:

اگر در معادلهٔ

$$h(t)x(t) = f(t) + \lambda \int_a k(t,s)x(s)\,ds \qquad (۱.۲.۱)$$

$h(t) = 0$ باشد، معادله انتگرال حاصل را نوع اول می‌نامند، که در آن حد بالای انتگرال می‌تواند ثابت یا متغیر باشد.

و اگر در معادلهٔ (۱.۲.۱)، $h(t) \neq 0$ باشد، معادله انتگرال حاصل را نوع دوم می‌نامند.

(ب) به معادلات انتگرالی که در آن‌ها تابع مجهول زیر علامت انتگرال‌گیری، به صورت خطی ظاهر می‌شود، معادلات انتگرال خطی و به معادلات انتگرالی که در آن‌ها تابع مجهول زیر علامت انتگرال، به صورت غیرخطی ظاهر می‌شود، معادلات انتگرال غیر خطی می‌گویند. مثلاً معادلهٔ:

$$f(x) = \lambda \int_a^b F(x,y,f(y))dy \qquad (۲.۲.۱)$$

که در آن $F(x,y,z)$، نسبت به $z$ تابعی غیرخطی است.

(ج) اگر در معادله انتگرال نوع دوم، شرط $f(t) = 0$ برقرار باشد، آنگاه معادله حاصل را یک معادله همگن می‌نامند. در غیر این‌صورت معادله مورد نظر را یک معادله غیر همگن گویند.

(د) یک معادله انتگرال را منفرد می‌نامند اگر انتگرال‌گیری ناسره(مجازی) باشد. این معمولاً زمانی رخ می‌دهد که فاصله انتگرال‌گیری نامتناهی باشد یا اینکه هسته معادله در یک یا تعداد بیشتری از نقاط دامنه مورد نظر، یعنی $(a \leq x \leq b)$ بی‌کران باشد.

تعدادی از مهم‌ترین معادلات انتگرال منفرد عبارتند از:

۱– معادله آبل

$$f(x) = \int_a^x \frac{g(y)}{(x-y)^\alpha} dy, \qquad ۰ < \alpha < ۱.$$

۲– معادله انتگرال نوع کوشی

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \frac{g(y)}{(y-x)} dy.$$

۳– معادله کارلمن

$$\alpha(x) g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \frac{g(y)}{(y-x)} dy.$$

۴– معادله انتگرال با هسته لگاریتمی

$$\int_a^b \ln |x-y| g(y) dy = f(x).$$

۵– معادله انتگرال وینر–هوف

$$g(x) + \lambda \int_۰^\infty K(x-y) g(y) dy = f(x).$$

# فصل ۲

# تعاریف و پیش‌نیازها

## ۱.۲ مقدمه

در این فصل خلاصه‌ای از چندین تابع و چند جمله‌ای و دیگر عناوینی که در سراسر این پایان‌نامه استفاده می‌شود را ارائه می‌دهیم.

## ۲.۲ توابع بسل

در مسائل مقدار مرزی معادلات با مشتقات جزئی شامل عملگر لاپلاس $\nabla^2 u$ در مختصات استوانه‌ای فرآیند جداسازی متغیرها، اغلب معادله‌ای به صورت زیر را تولید می‌کند:

$$\rho^2 \frac{d^2 y}{d\rho^2} + \rho \frac{dy}{d\rho} + (\lambda^2 \rho^2 - \nu^2) y = 0 \qquad (1.2.2)$$

که در آن $y$ تابعی از شعاع قطبی $\rho$ است[۴۰]. در چنین مسائلی، $\lambda$– ثابت جداسازی است و مقادیر $\lambda$ که به ازای آن‌ها معادله جواب کراندار غیربدیهی داشته باشد، مقادیر ویژه مسأله اشتورم لیوریل مربوط به معادله (۱.۲.۲) نامیده می‌شوند. پارامتر $\nu$، یک عدد حقیقی نامنفی است که با دیگر وجوه مسأله مقدار مرزی تعیین می‌شود. معمولاً $\nu$، صفر یا یک عدد صحیح مثبت است.

با تبدیل $\lambda$ به $\lambda$– معادله تغییر نمی‌کند، پس بدون از دست رفتن کلیت همواره می‌توان فرض کرد $\lambda \geq 0$ است؛ وقتی $\lambda > 0$، جایگذاری $x = \sqrt{\lambda}\rho$ را می‌توان برای تبدیل معادله (۱.۲.۲) به شکل فاقد $\lambda$ به کار برد:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2) y(x) = 0 \qquad (2.2.2)$$