۸۷/۱۲/۱۰/۱۴۱۵
۸۷-۱۰-۵۵

دانشگاه تبریز

پژوهشکده فیزیک کاربردی و ستاره‌شناسی

گروه فوتونیک

پایان‌نامه

جهت دریافت درجه کارشناسی‌ارشد در رشته فیزیک

عنوان

طراحی و شبیه‌سازی تقسیم‌کنندهٔ تمام نوری با استفاده از کریستال‌های فوتونیکی

دانشگاه تبریز

اساتید راهنما

دکتر علی رستمی - دکتر حبیب تجلی

استاد مشاور

دکتر عباس ظریف‌کار

پژوهشگر

علی‌اکبر کتیرایی

۱۳۸۷/۱۰/۵

۱۰۴۳۶

شهریور ۸۶

نام خانوادگی دانشجو: کتیرایی **نام:** علی‌اکبر

عنوان پایان‌نامه: طراحی و شبیه‌سازی تقسیم‌کننده‌های تمام نوری با استفاده از کریستال‌های فوتونیکی

استاد راهنما: آقای دکتر علی رستمی و آقای دکتر حبیب تجلی

استاد مشاور: آقای دکتر عباس ظریف‌کار

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** فیزیک **گرایش:** فوتونیک **دانشگاه:** تبریز

دانشکده: فیزیک **تاریخ فارغ التحصیلی:** **تعداد صفحه:** ۱۱۸

کلید واژه‌ها: کریستال‌های فوتونیکی، باند گاف نوری، تقسیم‌کننده‌های نوری، FDTD

چکیده:

کریستال‌های فوتونیکی، کریستال‌هایی هستند که برای بازهٔ مشخصی از فرکانس‌ها قابلیت عبور ندارند لذا می‌توان از این کریستال‌ها برای کنترل نور و هدایت آن در مدارات مجتمع نوری استفاده کرد. در این پایان‌نامه یک کریستال دو بعدی که رادهای آن دایره‌ای شکل، جنس آن از سیلیسیم (Si) و ساختار آن مربعی شکل است را طراحی می‌کنیم. حال اگر یک ردیف از رادها را برداریم یک نقصان خطی ایجاد کرده‌ایم که منجر به ساخت یک موجبر اصلی خواهد شد. سپس این موجبر اصلی را به ۵ قسمت تقسیم می‌کنیم که شعاع رادهای حاشیهٔ هر قسمت از این موجبر دارای اندازهٔ معینی می‌باشد و متفاوت با قسمت‌های دیگر، با تغییر شعاع رادهای حاشیه در هر قسمت فرکانس قطع برای موجبر تغییر می‌کند. سپس با ساختن موجبرهای فرعی بوسیلهٔ نقصان‌های کوپل شده (CCW) که عمود بر موجبر اصلی می‌باشد می‌توان کاری کرد که از هر موجبر فرعی فقط یک طول موج عبور بکند و لذا عمل جداسازی صورت می‌پذیرد تمامی مراحل این کار با روش عددی FDTD انجام و شبیه‌سازی شده است.

فهرست مطالب

عنوان — صفحه

مقدمه ٦

فصل اول (بررسی منابع) ٨

١-١- محاسبهٔ ساختار باند ١٢

١-٢- روش عددی P.W.E ٢٢

١-٣- دی‌الکتریک کره‌ای ٢٦

١-٤- دی‌الکتریک دایره‌ای ٢٨

١-٥- نقصان ٣٠

١-٥-١- نقصان‌های جایگزیده (Substitution defects) ٣١

١-٥-٢- نقصان‌های جاافتاده (Lacunar defects) ٣١

١-٥-٣- نقصان‌های جابجا شده (Interstitial defects) ٣٢

١-٦- روش عددی (FDTD) ٣٩

١-٧- الگوریتم Yee ٤٧

١-٧-١- تقلیل از حالت سه بعد به دو بعدی (مدهای TMz و TEz) ٦٣

١-٧-٢- برای مد TMz ٦٣

١-٧-٣- برای مدل TEz ٦٤

فصل دوم (مواد و روشها) ٦٥

٢-١- نحوهٔ توزیع انرژی در موجبرهای کریستال فوتونیکی ٧٢

٢-٢- موجبر با کوپل در نقصان ٧٦

عنوان صفحه

۲-۳- موج تخت فرودی به یک محیط که تحت شرایط مرزی PML قرار گرفته باشد..... ۸۶

۲-٤- حالت دوبعدی برای مد TEz ۸۷

۲-٤-۱- جداسازی میدان برای معادلات ماکسول مد TEz..... ۸۷

۲-۵- حل موج تخت در درون محیط برنگر ۹۱

۲-٦- شرط تطبیق عدم انعکاس ۹۲

۲-۷- حالت سه بعدی ۹٦

فصل سوم (نتایج و بحث) ۱۰۱

فهرست منابع و مراجع ۱۱۲

چکیده انگلیسی..... ۱۱۸

فهرست اشکال

عنوان

صفحه

فصل اول (بررسی منابع)

شکل ۱-۱: نمای واقعی کریستال‌های فوتونیکی یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی ۹

شکل ۱-۲: نمای واقعی صفحهٔ کریستال فوتونیکی ۱۲

شکل ۱-۳: یک کریستال تک بعدی در راستای X را نشان می‌دهد ۱۳

شکل ۱-٤: سلول واحد در یک کریستال فوتونیکی بدون نقصان که ساختاری مربعی دارد ۲۰

شکل ۱-۵: نوع مسیرهای موجود در درون سلول پایه برای محاسبهٔ ساختار باند ۲۰

شکل ۱-٦: نوع مسیرهایی که برای محاسبهٔ ساختار باند کریستال‌های یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی در نظر می‌گیرند ۲۱

شکل ۱-۷: ایجاد نقصان با بزرگ کردن شعاع راد مرکزی ۳۱

شکل ۱-۸: ایجاد نقصان با برداشتن راد از درون کریستال فوتونیکی ۳۲

شکل ۱-۹: ایجاد نقصان با جابجایی یک راد و شکسته شدن ثابت شبکه ۳۳

شکل ۱-۱۰: با برداشتن یک ردیف از رادها یک نقصان خطی به وجود آورده‌ایم که منجر به موجبر شده است ۳٤

شکل ۱-۱۱: با کوچک کردن شعاع یک ردیف از رادها یک موجبر ایجاد شده است ۳۵

شکل ۱-۱۲: نشان‌دهندهٔ یک سلول واحد است که در برگیرندهٔ نقصان و تعدادی از رادها می‌باشد ۳٦

شکل ۱-۱۳: یک سلول واحد در یک ساختار هگزاگونال که در آن نقصان ایجاد شده است ۳۷

شکل ۱-۱٤: یک سلول واحد که به صورت یک بلوک می‌باشد و در برگیرندهٔ نقصان درون موجبر است ۳۸

شکل ۱-۱۵: نمایی از الگوریتم Yee برای محاسبهٔ معادلات FDTD ٤۸

شکل ۱-۱٦: نشان‌دهندهٔ نحوهٔ محاسبهٔ مؤلفه‌های میدان در درون شبکهٔ FDTD ٤۹

عنوان صفحه

فصل دوم (مواد و روشها)

شکل ۲-۱: شمای کلی یک تقسیم‌کنندهٔ نوری ٦٦

شکل ۲-۲: شمای واقعی یک کریستال فوتونیکی دو بعدی با ساختار هگزاگونال و رادهای دایره‌ای شکل ٦٨

شکل ۲-۳: نمونهٔ واقعی یک موجبر که با برداشته شدن یک ردیف راد ایجاد شده است ۷۰

شکل ۲-٤- الف: نمای کلی از تقسیم‌کنندهٔ تمام نوری که طراحی شده است ۷۱

ب: نمای کلی تقسیم‌کنندهٔ نوری که در آن نقصان‌ها بصورت واضح‌تری به نمایش گذاشته شده است ۷۱

شکل ۲-۵: نحوهٔ توزیع چگالی انرژی الکتریکی در درون موجبری که با برداشته شدن راد ایجاد شده است ... ۷۳

شکل ۲-٦: نحوهٔ توزیع چگالی انرژی الکتریکی در درون موجبری که با کوچک کردن شعاع راد ایجاد شده است ۷٤

شکل ۲-۷: قیاس توزیع چگالی انرژی الکتریکی میان راد برداشته شده و راد کاهش‌یافته ۷۵

شکل ۲-۸: با کوچک و بزرگ کردن شعاع رادها یک موجبر با کوپل در نقصان ایجاد کرده‌ایم.

در شکل نوع سلول پایه بصورت یک بلوک نشان داده شده است ۷٦

شکل ۲-۹: نمای کلی شرط مرزی PML در یک محیط متعارف ۹٤

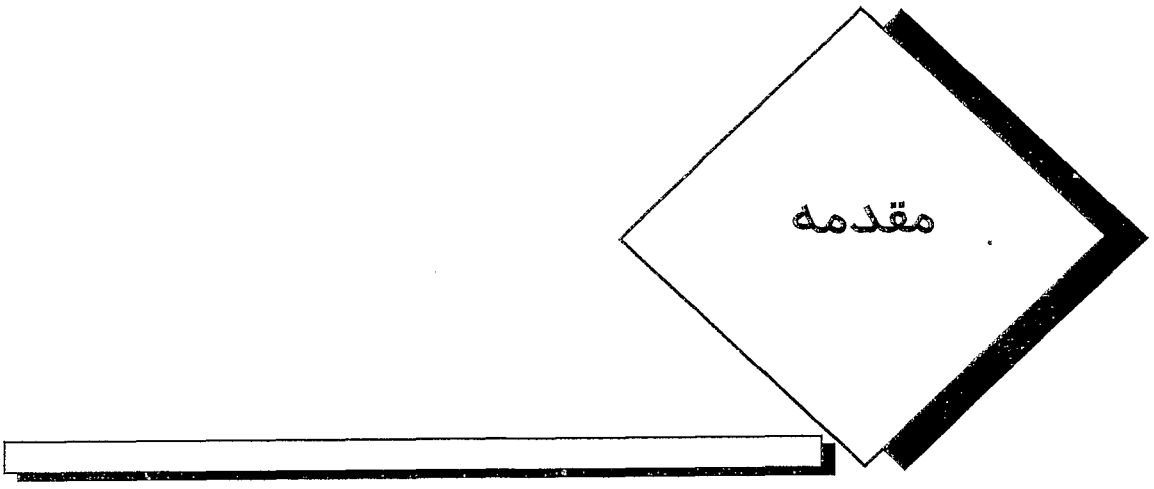
فصل سوم (نتایج و بحث)

شکل ۳-۱: جداسازی فرکانس‌ها که توسط موجبرهای فرعی صورت گرفته است ۱۰۵

شکل ۳-۲: جداسازی طول موج‌ها که توسط موجبرهای فرعی صورت گرفته است ۱۰٦

شکل ۳-۳: پاسخ‌دهی سیستم را نشان می‌دهد ۱۰۸

شکل ۳-٤: پروفایل توزیع میدان الکتریکی برای مد TE_z در ساختار اصلی ۱۰۹


مقدمه

کریستال‌های فوتونیکی، کریستال‌هایی هستند که می‌توان از آنها برای کنترل نور استفاده کرد این کریستال‌ها قابلیت دارند که ناحیهٔ بخصوصی از طول موج نور را از خود عبور بدهند و برای بعضی از نواحی مربوط به طول موج نور تابشی کدر می‌باشند و عبوری انجام نمی‌گیرد که به این ناحیه باند گاف نوری می‌گویند [۱۱] . از کریستال‌های فوتونیکی می‌توان برای تهیهٔ قطعات نوری استفاده کرد. قطعاتی که در الکترونیک نوری و مخابرات نوری جای پای خود را باز کرده‌اند [۳] .

با توجه به نیاز صنعت مخابرات نوری به سرعت‌های بالا و عرض باند بالا استفاده از الگوریتم‌های ارسال عرضی باند بالا مثل تقسیم‌کننده‌های نوری رایج شده است از بلوک‌های اساسی این روش MUX، DeMUX می‌باشد [۱۲] . تولید تقسیم‌کننده‌های تمام نوری بسیار حائز اهمیت است تا بتواند با سرعت و عرض باند بالا امکان جداسازی طول موج‌ها را داشته باشد. با توجه به اهمیت بالای تقسیم‌کننده‌های نوری در صنعت مخابرات نوری در این پایان‌نامه می‌خواهیم نحوهٔ تحقق این بلوک‌های مهم را از طریق کریستال‌های فوتونیکی که قابلیت جمع شدن نیز دارند تحلیل و بررسی نماییم. ابتدا با ساختارهای ارائه شده قبلی آشنا می‌شویم و سپس با استفاده از معرفی نقصان‌ها در ساختار پریودیک کریستال فوتونیکی جدا شدن طول موج‌های متفاوت در محل‌های متفاوت موجبر اصلی را شاهد خواهیم بود. شبیه‌سازی ایده مطرح شده از طریق روش عددی FDTD که شرح آن نیز در این پایان‌نامه داده می‌شود، انجام خواهد شد.

فصل اول

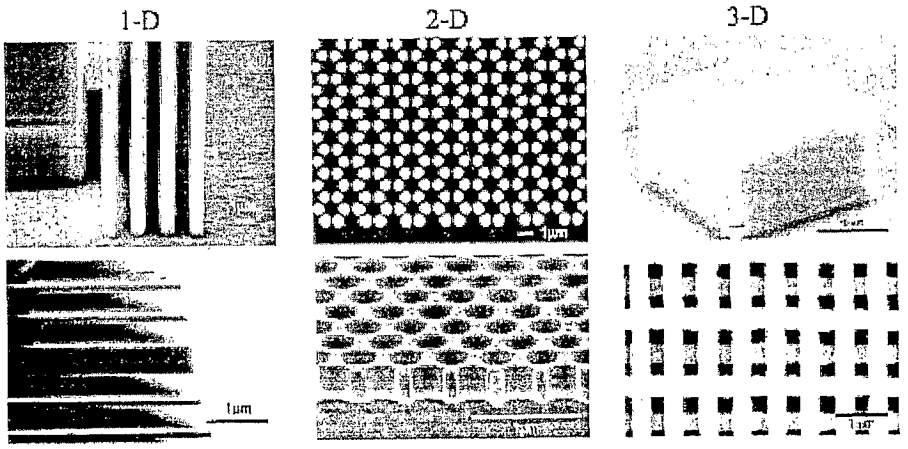
بررسی منابع (پایه‌های نظری و پیشینهٔ پژوهش)

همانطور که می‌دانیم میان فرکانس (ν)، سرعت نور (C) و طول موج (λ_0) برای تابش میدان در یک فضای آزاد[1] رابطهٔ زیر برقرار می‌باشد [۱] :

$$C = \lambda_0 \nu \qquad (۱-۱)$$

و اگر بردار موج K را بصورت $K = 2\pi/\lambda_0$ در نظر بگیریم در آن صورت رابطهٔ بالا را می‌توان بصورت $\omega = ck$ نوشت به این رابطه، رابطهٔ پاشندگی گفته می‌شود این رابطه در بسیاری از مواد نوری از آن جمله کریستالهای فوتونیکی بسیار کاربرد دارد [۱۲] . حال باید پرسید که کریستال‌های فوتونیکی چه هستند؟

کریستال‌های فوتونیکی چینشی منظم و با قاعده از موادی با ضرایب شکست متفاوت می‌باشند [۱۳] . همانطور که در شکل (۱-۱) دیده می‌شود کریستال‌های فوتونیکی معمولاً از دو ماده با ضریب شکست‌های متفاوت ساخته شده‌اند که این دو ماده به صورت متناوب و پریودیکی در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند.



شکل ۱-۱: نمای واقعی کریستال‌های فوتونیکی یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی

1- Free Space

پریود فضایی که در این کریستال‌های فوتونیکی وجود دارد را اغلب ثابت شبکه می‌گویند.

معمولاً ما از ثابت شبکه برای کریستال‌هایی استفاده می‌کنیم که مواد با ضریب شکست‌های متفاوت بصورت متناوب و منظم در کنار یکدیگر قرار گرفته باشند. میان کریستال‌های معمولی و کریستال‌های فوتونیکی (نوری) شباهت‌های بسیاری وجود دارد اما در یکسری از موارد نیز با یکدیگر اختلاف اساسی دارند یکی از این اختلاف‌ها، اختلاف در اندازهٔ ثابت شبکه می‌باشد. در کریستال‌های معمولی ثابت شبکه از مرتبهٔ (A^o) است در صورتیکه در کریستال‌های فوتونیکی ثابت شبکه در محدودهٔ امواج الکترومغناطیسی مثلاً برای محدودهٔ نور مرئی در حدود (mm ۱) و برای امواج مایکروویو در حدود (cm) می‌باشد کریستال‌های فوتونیکی در سه دستهٔ اصلی طبقه‌بندی می‌شوند کریستال‌های فوتونیکی ۱ بعدی، ۲ بعدی و ۳ بعدی (شکل ۱-۱) [۱۹].

ساختن کریستال‌های فوتونیکی در محدودهٔ امواج فروسرخ دور و مایکروویو کاری نسبتاً راحت و آسان می‌باشد اما ساختن کریستال‌های فوتونیکی در محدودهٔ امواج مرئی بخصوص برای حالت سه بعدی بسیار سخت و پیچیده است [۲۰]. علت اصلی آن نیز کوچک بودن ثابت شبکه است بنابراین تکنولوژی‌های متفاوتی برای ساختن این نوع از کریستال‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد این پیشرفت‌ها سبب شده است که کریستال‌های فوتونیکی مناسبی با ثابت شبکهٔ mm ۱ و کمتر ساخته و مورد بهره‌برداری قرار بگیرد وقتی کریستال‌های فوتونیکی دو بعدی و یا بخصوص ۳ بعدی را بسازیم متوجه می‌شویم که این کریستال‌ها بخشی از امواج الکترومغناطیسی را از خود عبور می‌دهند و یک بخشی را عبور نمی‌دهند درواقع این کریستال‌ها برای یک ناحیهٔ طول موجی شفاف هستند و برای

یک ناحیهٔ طول موجی کدر می‌باشند. بنابراین آن ناحیه از طیف الکترومغناطیسی که از کریستال عبور نمی‌کند را باند گاف نوری یا باند ممنوعهٔ نوری[1] می‌نامند [۷].

می‌توان با قرار دادن اختلال یا بی‌نظمی[2] در درون ساختار شبکهٔ منظم کریستال فوتونیکی، که به آن نقصان[3] می‌گویند، مدهایی را در ناحیهٔ گاف نوری بدست آورد یعنی مدهایی که قبلاً از کریستال عبور نمی‌کردند ولی به سبب ایجاد نقصان اکنون می‌توانند از کریستال فوتونیکی عبور بکنند [۷]. حال باید بدانیم مد چیست؟

به هر موجی که دارای طول موج مشخص و راستای مشخصی باشد یک مد می‌گویند. یعنی اگر دو موج دارای طول موجهای یکسان باشند ولی در راستاهای متفاوت انتشار یابند دو مد متفاوت می‌باشند درواقع راستای انتشار موج و طول موج (λ_0) دو پارامتر عمده برای شناسایی مدها هستند [۱].

به مدهایی که توسط نقصان ایجاد شده در کریستال بوجود می‌آیند، مدهای جایگزین شده توسط نقصان[4] گفته می‌شود [۱۰].

می‌توان گفت اگر فرکانس گسیل شده از اتم یا مولکولی که در درون کریستال فوتونیکی قرار گرفته است در محدودهٔ باند گاف نوری باشد در آن صورت فوتون ایجاد شده از گسیل خود به خود، که در اتم یا مولکول برانگیخته شده بوجود آمده، اجازهٔ انتشار ندارد و به همین روی اصلاً گسیل خود به خودی صورت نمی‌گیرد. حال اگر فوتون ایجاد شده از گسیل خود به خود در اتم یا مولکول منطبق با مدهایی که می‌توانند در کریستال منتشر شوند باشد، در آن صورت اگر اتم یا مولکول موردنظر در نزدیکی نقصان باشد میزان گسیل خود به خودی افزایش می‌یابد [۲۱].

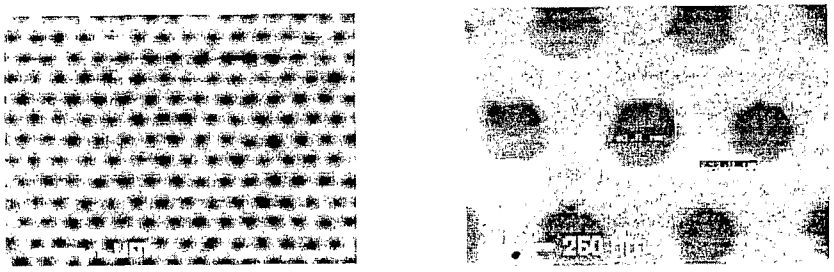
1- Photonic Band Gap = PBG

2- Disorder

3- Defect

4- Localized Defect Mode

نوع دیگری از کریستال‌های فوتونیکی نیز وجود دارند که به آنها صفحهٔ کریستال فوتونیکی[1] می‌گویند که در شکل (۱-۲) نیز نشان داده شده است [۲۲] . این نوع از کریستال‌ها معمولاً بر روی یک پایه از جنس نیمه رسانا یا عایق ساخته می‌شوند این نوع کریستال‌های فوتونیکی که دو بعدی نیز هستند به سرعت طی سالهای اخیر موقعیت خود را تثبیت کرده‌اند و رَو به پیشرفت هستند.

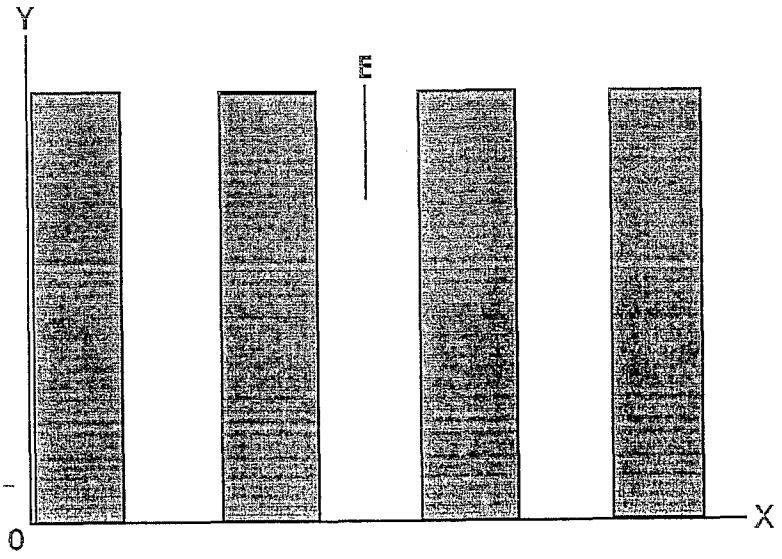


شکل ۱-۲: نمای واقعی صفحهٔ کریستال فوتونیکی

۱-۱- محاسبهٔ ساختار باند

اما چیزی که در کریستال‌های نوری حائز اهمیت می‌باشد مسأله باند گاف نوری و بدست آوردن باند گاف کریستال‌ها است. برای اینکه بدانیم این کریستال‌ها در چه نواحی از طول موج عبور دارند و در چه نواحی عبور ندارند می‌توان از کریستال نوری ۱ بعدی که معمولاً به آنها چند لایهٔ دی‌الکتریک گفته می‌شود، شروع کرد (شکل ۱-۳).

1- Photonic Crystal Slab



شکل ۱-۳: یک کریستال تک بعدی در راستای X را نشان می‌دهد

اما قبل از اینکه به سراغ محاسبهٔ باند گاف برویم لازم است که یکسری از مطالب را بصورت مقدمه یادآوری بکنیم تا بهتر بتوان مسأله را تجزیه و تحلیل کرد. می‌دانیم برای اینکه بتوانیم از یک فضا به فضای دیگر برویم مثلاً از فضای مختصات به فضای K برویم یا از ω به K و بالعکس. بایستی از تبدیلات فوریه استفاده بکنیم یعنی برای اینکه بتوانیم هر نقطهٔ متناظر در فضای حقیقی را در فضای K بدست بیاوریم باید از این تبدیل استفاده بکنیم. برای مشخص کردن هر نقطه در فضای حقیقی از بردار $\vec{R}$ استفاده می‌کنیم [۱۹].

$$\vec{R}_n = \sum_{i=1}^{N} n_i \vec{a}_i$$

$\vec{a}_i$: بردارهای پایه در فضای حقیقی می‌باشد.

همچنین از قضیهٔ بلاخ در مورد محیط‌های پریودیک داشتیم که

$$\psi(r+R) = \psi(r)e^{i\vec{K}.\vec{R}}$$

در اینجا $\psi(r)$ تابع موج بلاخ می‌باشد و بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\psi(r) = U(r)e^{i\vec{K}.\vec{r}}$$

حال اگر بخواهیم از فضای حقیقی به فضای معکوس برویم بایستی از تبدیل زیر استفاده بکنیم

$$\vec{K} \to \vec{K} + \vec{G}$$

که در اینجا $\vec{G}$ برداری در فضای معکوس می‌باشد که هر نقطه در فضای معکوس را به ما نشان می‌دهد.

$$e^{i(\vec{K}+\vec{G}).\vec{R}} = e^{i\vec{K}.\vec{R}}\, e^{i\vec{G}.\vec{R}} = e^{i\vec{K}.\vec{R}} \Rightarrow$$
$$e^{i\vec{G}.\vec{R}} = 1 \;\Rightarrow\; \vec{G}.\vec{R} = 2\pi N \quad , \quad \vec{G} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{b}_i \qquad (۱-۲)$$

b_i: بردارهای پایه در فضای معکوس یا برداری می‌باشند.

$$\vec{G}.\vec{R} = 2\pi N \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{N} m_i b_i . \sum_{i,j} n_i a_j = 2\pi N$$
$$\Rightarrow \sum_{i,j} m_i n_i \; \vec{b}_i.\vec{a}_j = 2\pi N \qquad (۱-۳)$$
$$\Rightarrow \sum_{i,j} b_i.a_j = 2\pi\delta_{ij}$$

می‌توان $\vec{b}_i$ را بصورت روبرو تعریف کرد:

$$\vec{b}_i = c\vec{a}_j \times \vec{a}_k$$

بایستی $i = j$ باشد یعنی $a_j = a_i$ باشد.

$$\Rightarrow (b_i.a_j) = C\,\vec{a}_i.(\vec{a}_j \times \vec{a}_k) = 2\pi \;\Rightarrow$$
$$C = \frac{2\pi}{\vec{a}_i.(\vec{a}_j \times \vec{a}_k)} \;\Rightarrow\; b_i = \frac{2\pi(\vec{a}_j \times \vec{a}_k)}{\vec{a}_i.(\vec{a}_j \times \vec{a}_k)} \qquad (۱-۴)$$

که در اینجا $|b_i|$ بردارهای پایه در شبکه معکوس است که مقادیر بزرگی هستند زیرا بردارهای پایه در محدودهٔ آنگستروم می‌باشد بدین وسیله می‌توان بردارهای پایه در فضای معکوس را بدست آورد. حال اگر به سراغ تبدیلات فوریه برویم این تبدیلات بصورت زیر می‌باشند:

$$f(K)=\frac{1}{L^3}\int f(r)e^{i\vec{K}.\vec{r}}\,d^3r \quad , \quad f(r)=\sum f(q)e^{i\vec{q}.\vec{r}} \qquad (۱-۵)$$

می‌توان بجای q مقادیر $\vec{G}$ یا $\vec{R}$ را قرار داد در اینصورت می‌توان از فضای حقیقی به فضای معکوس یا بالعکس رفت. حال به سراغ کریستال فوتونیکی ۱ بعدی می‌رویم در کریستال فوتونیکی یک بعدی راستای محور x را عمود بر صفحهٔ دی‌الکتریک‌ها در نظر می‌گیریم همچنان که در شکل (۱-۳) نشان داده شده است و فرض می‌کنیم راستای انتشار موج الکترومغناطیسی در راستای محور x و دارای پلاریزاسیون خطی در راستای محور y موازی با صفحهٔ دی‌الکتریک‌ها باشد.

میدان الکتریکی منتشر شده در محیط پریودیک را بصورت تابعی از x و t در نظر می‌گیریم E (x,t) و می‌توان آن را مختلط نیز در نظر گرفت. البته میدان الکتریکی واقعی یک کمیت حقیقی می‌باشد که بصورت قسمت حقیقی E (x,t) نوشته می‌شود. بنابراین می‌توان معادلهٔ موج را برای حالت E (x,t) در حالت یک بعدی بصورت روبرو نوشت:

$$\frac{C^2}{\varepsilon(x)}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad (۱-۶)$$

در این رابطه ε(x) نشان‌دهندهٔ وابستگی ضریب دی‌الکتریک به x می‌باشد که به آن تابع دی‌الکتریک[1] می‌گویند. چون محیط ما یک محیط پریودیک می‌باشد، بنابراین تابع دی‌الکتریک ما یک تابع متناوب و دارای شرط زیر است.

$$\varepsilon(x)=\varepsilon(x+a) \qquad (۱-۷)$$

1- Dielectric Function

که در اینجا مقدار a ثابت شبکه می‌باشد همچنین $\frac{1}{\varepsilon(x)}$ نیز پریودیک می‌باشد و ما می‌توانیم تابع $\frac{1}{\varepsilon(x)}$ را از فضای حقیقی به فضای معکوس ببریم که برای این کار آن را برحسب سری فوریه بصورت زیر بسط می‌دهیم و در این رابطه K_m همان ضرایب فوریه می‌باشد.

$$\varepsilon^{-1}(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} K_m \exp(i\frac{2\pi m}{a}x) \qquad (۱-۸)$$

در این قسمت فرض ما بر این است که $\varepsilon(x)$ کمیتی حقیقی می‌باشد.

همچنان که از نظریهٔ بلاخ می‌دانیم انرژی پتانسیلی که هر الکترون در درون کریستال‌های معمولی احساس می‌کند ناشی از آرایهٔ متناوبی از هستهٔ اتم‌ها می‌باشد و بصورت $V(x) = V(x + a)$ تعریف می‌شود یعنی تابع پتانسیل تابعی متناوب می‌باشد. برای کریستال‌های فوتونیکی تابع دی‌الکتریک این نقش را بازی می‌کند. حال می‌توان هر مدی را که در درون کریستال فوتونیکی یک بعدی منتشر می‌شود را برحسب بردار موج K بصورت زیر نوشت:

$$E(x,t) = E_K(x,t) = U_K(x)\exp\{i(K_x - \omega_K t)\} \qquad (۱-۹)$$

که در اینجا ω_K نشان‌دهندهٔ فرکانس‌های زاویه‌ای ویژه می‌باشد و $U_K(x)$ نیز یک تابع پریودیک می‌باشد.

حال می‌توان تابع $E_K(x,t)$ را برحسب جملات فوریه بسط داد. این بسط در فضای معکوس یا فضای برداری K می‌باشد.

$$E_K(x,t) = \sum E_m \exp\{i(K + \frac{2\pi m}{a})x - i\omega_K t\} \qquad (۱-۱۰)$$

که در اینجا E_m ضرایب بسط فوریه می‌باشد برای سادگی محاسبه عبارت بالا را برای حالت m = 0, ±1 بسط می‌دهیم لذا خواهیم داشت:

$$\varepsilon^{-1}(x) \cong K_o + K_1 \exp(i\frac{2\pi}{a}x) + K_{-1}\exp(-i\frac{2\pi}{a}x) \qquad (۱-۱۱)$$

حال اگر رابطهٔ بدست آمده و رابطهٔ (۱-۱۰) را در معادلهٔ اصلی موج برای حالت یک بعد قرار بدهیم داریم:

$$K_1\{K+\frac{2(m-1)\pi}{a}\}^2 E_{m-1} + K_{-1}\{K+\frac{2(m+1)\pi}{a}\}^2 E_{m+1} \approx \{\frac{\omega_K^2}{C^2} - K_o(K+\frac{2m\pi}{a})^2\}E_m \qquad (۱-۱۲)$$

برای $m=0$ $\quad E_o \approx \dfrac{C^2}{\omega_K^2 - K_o C^2 K^2}\{K_1(K-\frac{2\pi}{a})^2 E_{-1} + K_{-1}(K+\frac{2\pi}{a})^2 E_1\}$

برای $m=-1$ $\quad E_{-1} \approx \dfrac{C^2}{\omega_K^2 - K_o C^2 (K-2\pi/a)^2}\{K_1(K-\frac{4\pi}{a})^2 E_{-2} + K_{-1}K^2 E_o\}$

حال اگر $K \approx |K-\frac{2\pi}{a}|$ و اگر $\omega_K^2 \approx K_o C^2 K^2$ در آنصورت E_o و E_{-1} باقی می‌مانند و با چشم‌پوشی از سایر جمله‌های E یک جفت معادلهٔ کوپل شده بصورت زیر خواهیم داشت:

$$(\omega_K^2 - K_o C^2 K^2)E_o - K_1 C^2 (K-\frac{2\pi}{a})^2 E_{-1} = 0$$
$$-K_{-1}C^2K^2E_o + \{\omega_K^2 - K_o C^2(K-\frac{2\pi}{a})^2\}E_{-1} = 0 \qquad (۱-۱۳)$$

برای اینکه معادلات بالا جواب داشته باشد باید دترمینان ضرایب برابر صفر باشد:

$$\begin{vmatrix} \omega_K^2 - K_o^2C^2K^2 & -K_1C^2(K-\frac{2\pi}{a})^2 \\ -K_{-1} - C^2K^2 & \omega_K^2 - K_oC^2(K-\frac{2\pi}{a})^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (۱-۱٤)$$

اگر $h = K - \frac{\pi}{a}$ را معرفی بکنیم جواب بصورت زیر درمی‌آید:

$$\omega \pm = \frac{\pi C}{a}\sqrt{K_o \pm |K_1|} \pm \frac{aC}{\pi |K_1|}(K_o^2 - \frac{|K_1|^2}{2})h^2 \qquad (۱-۱٥)$$

و اگر $h \ll \frac{\pi}{a}$ باشد در آن صورت هیچ مدی در حد فاصل زیر وجود نخواهد داشت:

$$\frac{\pi C}{a}\sqrt{K_o - |K_1|} \quad < \omega < \frac{\pi C}{a}\sqrt{K_o - |K_1|} \qquad (۱-۱٦)$$

در حالت یک بعدی تمامی بردارهای موج با یکدیگر موازی هستند یعنی هم راستا هستند ولی ممکن است هم جهت نباشند $(K = \pm\frac{\pi}{a})$ این باند گاف اگر $|K_1| = 0$ باشد از بین می‌رود. در فضای برداری K بردارهای پایه برای حالت مکعب ساده بصورت $|b_i| = \frac{2\pi}{|a_i|}$ می‌باشد که محاسبهٔ آن را در صفحات قبل آورده بودیم. بنابراین هر بردار K بصورت مضربی از $\frac{2\pi}{|a_i|}$ می‌باشد. بدلیل متناوب بودن ثابت دی‌الکتریک و تابع دی‌الکتریک شکل باند گاف نوری نیز مدام تکرار می‌شود یعنی برای بردارهای موج متفاوت که همگی ضریبی از $(\frac{2\pi}{a})$ می‌باشد شکل باند گاف ما نیز برای این بردارهای موج یکسان می‌باشد. به همین دلیل ما فقط منطقه‌ای را در نظر می‌گیریم که به آن منطقهٔ بریلوئن می‌گویند. زمانی که ساختار فضایی شبکهٔ متناوب ما بسیار کوچک باشد رابطهٔ پاشندگی از رابطهٔ اصلی $\omega = vK$ فاصلهٔ زیادی ندارد ولی باز هم در منطقهٔ اول بریلیون بیان می‌شود $(\frac{-\pi}{a}, \frac{+\pi}{a})$

کریستال‌های فوتونیکی ۱ بعدی یا دی‌الکتریک‌های چند لایه دارای کاربردهای مهمی می‌باشند. آنها می‌توانند بصورت آینه‌های چند لایه با انعکاس بسیار بالا مورد استفاده قرار بگیرند اما در سالهای اخیر کریستال‌های فوتونیکی ۲ بعدی و ۳ بعدی برای کنترل میدان تابیده شده در آنها، مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای بدست آوردن روابط پاشندگی در کریستال‌های دو بعدی به علت اینکه در منطقهٔ اول بریلیون تمامی بردارهای موج با یکدیگر موازی نیستند دیگر نمی‌توان از روابط گذشته استفاده کرد و بایستی از روشهای عددی بهره جست. یکی از روشهای عددی بسیار مناسب برای بدست آوردن روابط پاشندگی و ساختار باند P.W.E[1] می‌باشد که بصورت مفصل به آن خواهیم پرداخت.

در یک کریستال دو بعدی باز هم ثابت شبکه را a در نظر می‌گیریم و بردارهای پایه در فضای معکوس را b_1 و b_2 و بردارهای پایه در فضای حقیقی را a_1 و a_2 در نظر می‌گیریم که بصورت زیر خواهند بود [۱]:

$$a_1 = (a,0) \quad ; \quad b_1 = (\frac{2\pi}{a},0)$$
$$a_2 = (0,a) \quad ; \quad b_2 = (0,\frac{2\pi}{a}) \qquad (۱-۱۷)$$

همانطور که در شکل (۱-٤) یک سلول پایه در فضای شبکهٔ وارون برای یک کریستال مربعی را می‌بینید.

1- Plane Wave Expansion