بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

مجتمع فنی مهندسی

دانشکده مکانیک

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک

عنوان: ترسیم محدوده های پایداری سیستمهای خطی دارای سه تأخیر زمانی نامعین

استاد راهنما: دکتر سید محمد بزرگ

پژوهش و نگارش: الهام الحسینی المدرسی

زمستان ۱۳۸۶

## تقدیر و تشکر:

سپاس و ستایش بی حد خدایی را سزاست که انسانی را به زیور هستی بیاراست، آن هم در عالی ترین و نیکوترین نمود هستی. شنوا و بینایش کرد و به او آموخت آنچه را که بی خبر بود. به نعمت هدایت مفتخرش فرمود و به انسان کرامتی خاص بخشید.

## با سپاس فراوان ازاستاد محترم :

جناب آقای دکتر سید محمد بزرگ که مشوق و راهنمای من در انجام این پروژه بودند.

۱۳۸۷ /۹/ ۲۳

**تقدیم به:**

پدر و مادر عزیزم

و

همسر مهربانم

۱۳۸۷/۹/۲۳

## چکیده

وجود تأخیرات زمانی نامعین در برخی سیستمها، تحلیل پایداری آن سیستمها را پیچیده می‌کند. از سویی بیشتر تحلیلهای ارائه شده در زمینه‌ی سیستمهای با تأخیر زمانی نامعین مربوط به سیستمهایی با تأخیرهای وابسته به هم یا با حداکثر دو تأخیر زمانی مستقل هستند. بیشتر این روشها تحلیلی بوده، دید دقیقی از مناطق تأخیر زمانی که سیستم در آنها پایدار است، ارائه نمی‌کنند. بهمین دلیل هدف اصلی انجام این تحقیق ارائه‌ی راه حلی برای ترسیم مرزهای پایداری در فضای سه تأخیر زمانی، برای دسته‌ای از سیستمهای خطی تغییر ناپذیر با زمان، با سه تأخیر زمانی مستقل است.

روش محاسبه‌ی بازه‌های تأخیر زمانی که سیستم به ازای آنها پایدار است، مدل سازی هندسی معادله مشخصه بر روی مرز پایداری در صفحه‌ی مختلط است. پس از مدل سازی هندسی با در نظر داشتن معادلات ریاضی حاکم بر شکل هندسی مبین معادله مشخصه، مقادیر فرکانس و تأخیرهای قرار گرفته بر روی مرزهای پایداری در فضای تأخیرها، محاسبه شده‌اند.

نتایج اصلی این پروژه را می‌توان در دو بخش اصلی بصورت زیر بیان کرد:

۱. ارائه‌ی روشی برای محاسبه‌ی محدوده‌های پایداری در فضای سه تأخیر زمانی نامعین برای سیستمهای خطی تغییر ناپذیر با زمان و با سه تأخیر زمانی مستقل و نامعین. روش ارائه شده علاوه بر محاسبه‌ی بازه‌ی مجاز تغییرات تأخیرهای زمانی نامعین برای حفظ پایداری سیستمهای با سه تأخیر نامعین مستقل، در محاسبه‌ی محدوده‌ی مجاز تغییرات تأخیرها برای پایداری سیستمهای با سه تأخیر زمانی بصورت ترکیب خطی از سه پارامتر مستقل، نیز قابل استفاده است. نتایج بدست آمده از این روش، نواحی پایداری را در فضای تأخیرهای زمانی به تصویر می‌کشد و امکان تجسم محدوده‌های مجاز تغییرات تأخیرهای زمانی را فراهم می‌سازد.

۲. محدوده‌های پایداری سیستمهای با دو تأخیر زمانی نامعین در صفحه‌ی دو تأخیر زمانی با تقریب زدن ترم نمایی محاسبه، با دیگر نتایج موجود مقایسه و نشان داده شده که در فرکانسهای پایین استفاده از این تقریبها دارای دقت خوبی است.

مهمترین کار انجام شده در این تحقیق، ترسیم محدوده‌های پایداری دسته‌ای از سیستمهای با سه تأخیر زمانی نامعلوم است.

با وجود استفاده از روشهای عددی درقسمتهایی از محاسبات روش ارائه شده، مزیت مهم این روش در تعیین محدوده‌های پایداری سیستمهای با سه تأخیر زمانی، ترسیم کردن این محدوده‌ها در فضای سه تأخیر زمانی نامعین است. مقایسه‌ی برشهای نتایج ترسیم شده با نتایج روشهای ارائه شده برای سیستمهای با دو تأخیر زمانی نامعین، دقت بالای این روش را تأیید می‌کند.

بسمه تعالی

| مدیریت تحصیلات تکمیلی | **صورتجلسه دفاعیه پایان‌نامه دانشجوی**<br>**دوره کارشناسی‌ارشد** | شناسه: ب/ک/۳ |
|---|---|---|

جلسه دفاعیه پایان‌نامـه تحصیلی آقای/ خانم: الهام الحسینی المدرسی ط. س. دانشجوی کارشناسی‌ارشد

رشتـه/گرایش: مهندسی مکانیک- طراحی کاربردی

تحت عنوان: ترسیم محدوده‌های پایداری سیستمهای خطی با سه تأخیر زمانی نامعین

و تعداد واحد: ۶ در تاریخ ۱۶ / ۱۲ / ۱۳۸۶ با حضور اعضای هیأت داوران (به شرح ذیل) تشکیل گردید.

پس از ارزیابی توسط هیأت داوران، پایان‌نامه با نمره: به عدد ۱۹٫۵ به حروف نوزده و نیم

و درجه عالی مورد تصویب قرار گرفت.

| عنوان | نام و نام خانوادگی | امضاء |
|---|---|---|
| استاد/ استادان راهنما: | آقای دکتر سیدمحمد بزرگ | |
| استاد/استادان مشاور: | آقای دکتر منصور رفیعیان | |
| متخصص و صاحبنظر داخلی: | آقای دکتر محمدرضا تابان | |
| متخصص و صاحبنظر خارجی: | آقای دکتر محمدجواد یزدان‌پناه | |

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر)

نام و نام خانوادگی: آقای دکتر سیدمنصور بیدکی

امضاء:

# فهرست مطالب

# فصل اول – مقدمه

## ۱-۱- پیشگفتار

یکی از عوامل مهم ایجاد ناپایداری در سیستمها وجود نامعینی در سیستم است. یکی از انواع نامعینی در سیستمهای دارای تأخیر زمانی، نامعینی در مقدار تأخیر زمانی است. ترم تأخیر زمانی در معادله مشخصه‌ی سیستمهای تأخیر زمانی خطی به فرم تابع نمایی ظاهر می‌شود. به همین دلیل بررسی پایداری این سیستمها هنگامیکه دارای تعداد زیادی تأخیرهای زمانی نامعین و مستقل باشند، دشوار است. در بیشتر کارهای پژوهشی انجام شده، سیستمهای دارای تأخیرهای زمانی وابسته یا سیستمهای دارای تعداد محدودی تأخیرهای زمانی مستقل بررسی شده‌اند.

سیستم‌های دارای تأخیر زمانی نامعین گاهی به طور ذاتی در دینامیک خود دارای تأخیر زمانی هستند و یا تأخیر زمانی بر اثر عملکرد عناصر کنترلی، مانند عملگرها[۱] و حسگرها[۲] بوجود می‌آید. وجود این تأخیرهای زمانی، بعضی اوقات معادلات پیچیده‌ای با تعداد زیادی تأخیرهای

---

[1] Actuators
[2] Sensors

زمانی مستقل ایجاد می‌کند که صرفنظر کردن از آنها باعث ناپایداری و یا ایجاد عملکرد نامطلوب در سیستم می‌شود.

یک سیستم دارای تأخیرهای زمانی نامعین ممکن است در محدوده‌هایی از تأخیرهای نامعلوم خود پایدار باشد. هرگاه بتوان به نحوی مناطق پایدار سیستم را در فضای تأخیرهای زمانی تعیین کرد، به طراحی و کنترل مناسب سیستم کمک شایانی می‌شود. اما در بیشتر روشهای موجود برای تعیین پایداری سیستمهای با تأخیر زمانی نامعین دقت مطلوب برای تعیین مناطق پایدار وجود ندارد. زیرا این روشهای تحلیلی مشخص نمی‌کنند، هر نقطه‌ی پایدار در فضای تأخیرهای زمانی چقدر از مرز پایداری فاصله دارد. بر این اساس سؤالی که در این تحقیق به آن پاسخ داده می‌شود، مطرح شده است. آیا می‌توان روشی ارائه داد که محدوده‌های پایداری سیستمهای با چند تأخیر زمانی مستقل را در فضای تأخیرهای نامعین ترسیم کند؟ قبل از پرداختن به این موضوع سیستمهای نامعین و سیستمهای تأخیر زمانی و تاریخچه‌ای از کارهای ارائه شده برای تحلیل پایداری این سیستمها، در ادامه بررسی می‌شود.

## ۱-۲- روشهای کنترل مقاوم

معادله مشخصه‌ی زیر می‌تواند بیانگر رفتار پایداری یک سیستم خطی نامعین باشد:

$$p(s,\boldsymbol{q}) = p_0(\boldsymbol{q}) + p_1(\boldsymbol{q})s + \cdots + p_n(\boldsymbol{q})s^n \quad ,$$

که در آن $\boldsymbol{q}=[q_1,q_2,\ldots,q_r]^T$ بردار نامعینی، دارای پارامترهای نامعین سیستم است. هر پارامتر نامعین $q_i$ ، $1 \le i \le r$ ، دارای مقادیر حداقل و حداکثر تغییرات است، یعنی:

$$q_i \in [q_i^-, q_i^+] \,,$$

اگر دامنه‌ی مجاز تغییرات پارامترهای نامعین، به منظور حفظ پایداری سیستم محاسبه شود، محدوده‌ی محصور به این تغییرات مجاز، محدوده‌ای در فضای پارامترهای تشکیل می‌دهد که در حالت $n$ پارامتری، یک ابرحجم[1] $n$ بعدی تشکیل می‌دهد. با تغییر دادن این پارامترها در

---

[1] Hyper volume

فضای نامعینی‌ها، ابرحجم نامعینی بصورت زیر قابل تعریف است:

$$Q = \{q_i \in [q_i^-, q_i^+]\}\ ,\ i = 1,2,\ldots,r\ .$$

با برقرار کردن یک ارتباط ریاضی بین ریشه‌های معادله مشخصه و پارامترهای نامعین ممکن است مرزهای پایداری را در فضای پارامترهای نامعین ترسیم کرد. این روش نمایش گرافیکی مناطق پایداری در فضای پارامترها را روش فضای پارامتری[۱] گویند. در ابتدا روش صفحات پارامتری توسط [۱] پیشنهاد شد و بسط آن به روش فضاهای پارامتری توسط [۲] انجام گرفت.

مطالعات زیادی برای طراحی کنترل کننده‌ی مناسب و تعیین محدوده‌های مجاز پایداری برای سیستمهای نامعین انجام شده است [۳-۷]. همچنین قضایای متعددی برای تعیین پایداری سیستمهای نامعین مانند قضیه خاریتانوف[۲]، قضیه لبه[۳]، قضیه جعبه[۴] و قضیه‌ی نگاشت[۵] ارائه شده است.

از روشهای کنترل مقاوم در حوزه‌ی فرکانس می‌توان روشهای تئوری $H_\infty$، تئوری $\mu$ و تئوری فیدبک کمی QFT[۶] را نام برد. در روشهای $H_\infty$ و $\mu$ از نرمهای ماتریس‌های توابع انتقال استفاده می‌شود و در بررسی سیستمهای با نامعینی دینامیکی به صورت مؤثری عمل می‌کنند. ولی این روشها قادر به بررسی مستقیم سیستمها با نامعینی‌های پارامتری نیستند و معمولاً به نتایج محافظه‌کارانه‌ای منجر می‌شوند. در این روشها، نامعینی‌های پارامتری باید به نامعینی‌های غیر پارامتری تبدیل شوند [۸].

روش QFT یکی از روشهایی است که سیستمهای دارای نامعینی‌های پارامتری را به صورت مستقیم در حوزه‌ی فرکانس بررسی می‌کند. در این روش اطلاعات قدرمطلق و فاز همزمان به کار گرفته می‌شوند و در مرحله‌ی طراحی کنترل کننده مورد استفاده قرار می‌گیرند. تئوری فیدبک

---

1 Parameter space approach
2 Kharitonov theorem
3 Edge theorem
4 Box theorem
5 Mapping theorem
6 Quantitative feedback theorem

کمی که توسط هورویتز[1] ارائه شده، روشی برای طراحی کنترل کننده برای سیستمهای با نامعینی است، که اولین بار در [۹] مطرح شد.

[۱۰] مروری کلی بر روشهای موجود برای طراحی فرایندهای مقاوم، بررسی کاربرد آنها و توضیح تفاوت و تشابه روشهای موجود انجام داده است.

## ۱-۳- مروری بر سیستمهای با تأخیر زمانی نامعین

دسته‌ای از سیستمهای خطی تغییر ناپذیر با زمان دارای تأخیر زمانی نامعین توسط معادله دیفرانسیل زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\sum_{i=o}^{m}\sum_{k=0}^{n} p_{ik}\frac{d^k x(t-\tau_i)}{dt^k}=0 \quad , \qquad (۱-۱)$$

ضرایب $p_{ik}$، $i=0,1,\ldots,m$، $k=0,1,\ldots,n$ اعداد حقیقی‌اند و $\tau_0=0$ و $\tau_i \geq 0$ تأخیرهای زمانی هستند. این دسته معادلات معمولا در سیستمهای خطی نامتغیر با زمان که تنها دارای تأخیر زمانی نامعین هستند، ظاهر می‌شود. معادله مشخصه‌ی چنین سیستمی بصورت

$$p(s,\boldsymbol{\tau}) = p_0(s) + p_1(s)e^{-\tau_1 s} + \cdots + p_m(s)e^{-\tau_m s} \quad , \qquad (۲-۱)$$

است که:

$$p_i(s)=\sum_{k=0}^{n} p_{ik}s^k \; , \; p_{0n}\neq 0 \quad . \qquad (۳-۱)$$

ریشه‌های معادله‌ی (۱-۲) تعیین کننده‌ی پایداری یا ناپایداری سیستم (۱-۱) هستند اما معادله مشخصه‌ی سیستم نامعین (۱-۱) بصورت یک چندجمله‌ای قابل بیان نیست و وجود ترمهای غیرجبری[2] به فرم $e^{-\tau s}$، آن را به یک شبه چند جمله‌ای[3] تبدیل کرده است.

ظهور سیستم‌های دارای تأخیر زمانی در مسائل متفاوتی از شاخه‌های مختلف علوم توجه محققین را به خود جلب کرده است. بطور نمونه در مدلسازی و کنترل یک موتور احتراق داخلی

---

[1] Horowitz feedback theorem
[2] Transcendental term
[3] Quasipolynomial

[۱۱]، در کنترل سیستمهای زیر آب[1] [۱۲] و در کنترل سیستمهای نورد فولاد [۱۳]، مدلهای دارای تأخیر زمانی بررسی شده‌اند. تألیفات بسیاری در زمینه‌ی روشهای کنترل سیستمهای دارای تأخیرهای زمانی انجام شده است [۱۴-۱۶]. همچنین مطالعات متعددی در زمینه‌ی محاسبه‌ی دامنه‌های مجاز پایداری برای سیستم‌های دارای تأخیرهای زمانی نامعین انجام شده است [۱۷-۲۴].

تحلیل پایداری سیستمهای خطی یا سیستمهای تغییر ناپذیر با زمان دارای تأخیر نامعین، بسیار راحتتر از تحلیل سیستمهای غیرخطی یا سیستمهای متغیر با زمان است. همچنین، هرچه تعداد تأخیرها کمتر باشد بررسی پایداری سیستم آسانتر است. برای سیستمهای با تأخیرهای *غیر تناسبی*[2] که دارای چند تأخیر مستقل از هم هستند، تحلیل پایداری دشوارتر است [۱۷، ۱۸، ۲۳, ۲۴]، اما در مورد سیستمهایی که در آنها تأخیرها بصورت ضریبی از یک ثابت باشند، مطالعات پایداری ساده‌تر و نتایج بیشتری بدست آمده است [۲۰، ۲۱، ۲۵, ۲۶]. به سیستم‌های اخیر سیستم‌های *تأخیر تناسبی*[3] گفته می‌شود.

اگر بالاترین مرتبه مشتق در (۱-۱) دارای ترم تأخیر زمانی نباشد، به سیستم *پسگرا*[4] گفته می‌شود و اگر بالاترین مرتبه‌ی مشتق (۱-۱) حاوی ترم تأخیر زمانی باشد، سیستم *خنثی*[5] نامیده می‌شود. تحلیل پایداری سیستمهای پسگرا ساده‌تر و نسبت به حالت خنثی، تحقیقات بیشتری در مورد آنها انجام شده است [۲۰-۲۹]. یکی از گسترده‌ترین روشهایی که برای تحلیل پایداری و کنترل سیستمهای تأخیر زمانی توسط محققین ارائه شده است، روشهای بر پایه *نامساویهای ماتریس خطی*[6] هستند. [۳۲۳۱۳۰]. این روشها بر اساس محاسبه‌ی ماتریسهای ثابت و یا ماتریسهای وابسته به پارامترهای نامعین سیستم هستند و بیان محدوده‌های پایداری در قالب نامساویهایی از این ماتریسهاست.

---

[1] Underwater vehicle
[2] Non commensurate delays
[3] Commensurate delays
[4] Retarded
[5] Neutral
[6] Linear matrix inequality (LMI)

اغلب روشهای ارائه شده برای تعیین پایداری سیستم‌های خنثی، روشهای ماتریس خطی هستند. اما روشهای دیگری نیز برای تحلیل سیستمهای خنثی ارائه شده‌اند مانند [۱۷، ۱۸, ۲۲-۲۴] که این روشها بر پایه‌ی استفاده از بهینه سازی و معادلات لاگرانژ، ابزارهای هندسی و یا استفاده از نگاشتهایی برای تبدیل ترم نمایی به توابع خطی هستند. مقاله‌ی [۳۳] مروری کلی بر سیستم‌های تأخیر زمانی، نکات و مسائل مربوط به آنها و برخی کارهای انجام شده در این زمینه را ارائه کرده است.

همان طور که گفته شد افزایش بعد مسئله و تعداد تأخیرهای مستقل با میزان پیچیدگی تحلیل پایداری رابطه‌ی مستقیم دارد. به همین دلیل مطالعات محدودی بر روی سیستمهای با چند تأخیر زمانی انجام شده است. در این رابطه [۲۳, ۲۴] مرزهای پایداری یک سیستم پسگرای دارای دو تأخیر زمانی مستقل و یا ترکیب‌های خطی دو تأخیر را با بکارگیری تبدیل رکاسیوس[۱] [۲۹]، ترسیم کرده‌اند. مقاله‌ی [۱۸] نیز با بهره‌گیری از کار انجام شده در [۱۹] مدل هندسی معادله مشخصه‌ی یک سیستم پسگرا یا خنثی با دو تأخیر را به هنگام عبور ریشه‌های آن از مرز پایداری در صفحه‌ی مختلط بصورت یک مثلث ترسیم کرده و با در نظر گرفتن شرایط حاکم بر آن مثلث، پایداری سیستم را بررسی و مرزهای پایداری را در صفحه‌ی دو تأخیر زمانی ترسیم نموده است. همچنین در این تحقیق روشی برای محاسبه‌ی جهت عبور ریشه‌ها از مرزهای پایداری ارائه شده که با استفاده از این روش مناطق پایدار و ناپایدار در صفحه‌ی دو تأخیر زمانی تعیین شده‌اند.

در بین فعالیتهای محدودی که در زمینه‌ی تعیین پایداری سیستمهای دارای چند تأخیر غیر تناسبی انجام شده، [۱۷] برای یک سیستم در حالت پسگرا و خنثی با سه تأخیر مستقل، شعاع کره‌ی پایداری را حول یک نقطه‌ی پایدار معلوم در فضای تأخیرها محاسبه کرده است و بر پایه‌ی حل عددی یک مسئله‌ی بهینه سازی خطی و بکارگیری ابزار ضرایب لاگرانژ، روشی برای محاسبه‌ی شعاع کره‌ی پایداری در فضای تأخیرهای زمانی ارائه داده است.

---

[1] Rekasius substitution

## ۱-۴- کارهای انجام شده در این پایان‌نامه

با توجه به مقدمه‌ی فوق می‌توان دریافت که نتایج کمی در زمینه‌ی تحلیل سیستمهای خطی تغییر ناپذیر با زمان با تأخیر زمانی مجهول وجود دارد. به صورت خاص در تحلیل سیستمهای با تعداد بیش از دو تأخیر زمانی غیر تناسبی نتایج محدودی وجود دارد. با توجه به این موضوع هدف اصلی این پروژه ارائه‌ی روشی است برای محاسبه‌ی مرزهای پایداری سیستمهای خطی تغییر ناپذیر با زمان به فرم پسگرا و خنثی که دارای سه ترم تأخیر زمانی نامعلوم باشند. قسمت‌هایی از روش پیشنهادی می‌تواند بعنوان بسط تحلیل پایداری ارائه شده در [۱۸] به حالت سیستمهای سه تأخیری، در نظر گرفته شود. مهمترین مزیتهای کار انجام شده در این پروژه عبارتند از:

۱. بنابر بررسیهای نویسنده، محاسبه‌ی سطوح مرزی پایداری در فضای سه تأخیر نامعلوم، برای اولین بار در این کار ارائه شده است.

۲. در بیشتر کارهای ارائه شده، سیستمهای دارای تأخیر زمانی نامعین غیر تناسبی بررسی شده‌اند و کمتر به سیستمهای دارای تأخیر زمانی متناسب پرداخته شده است. ضمن اینکه در کارهای محدود ارائه شده برای محاسبه‌ی محدوده‌ی پایداری سیستمهای تأخیر متناسب، تنها به ارائه‌ی یک یا چند معیار پایداری بسنده شده که با بکارگیری این معیارها نمی‌توان تمام مناطق پایدار را در فضای بین تأخیرها تعیین کرد، در حالیکه بوسیله‌ی روش ارائه شده در اینجا، منظره‌ی سه بعدی از فضاهای پایدار و ناپایدار، دید هندسی خوبی فراهم کرده و فضاهای محدود به سطوح مرزی بطور کامل مشخص می‌شوند. همچنین می‌توان در مقادیر ثابت تأخیر زمانی، برشهایی از این فضا تهیه و مرزهای پایداری را در صفحه‌ی دو تأخیر زمانی دیگر مشاهده کرد.

۳. محدوده‌های پایداری برای سیستمهای دارای سه تأخیر زمانی که بصورت ترکیب خطی از پارامترهای مستقل در معادله مشخصه ظاهر می‌شوند نیز قابل ترسیم

است.

۴. با استفاده از این روش می‌توان به سادگی نحوه‌ی اتصال سطوح مرزی پایداری را در فضای تأخیرها محاسبه کرد.

علاوه بر محاسبه‌ی محدوده‌ی پایداری به روش هندسی فوق برای سیستمهای با سه تأخیر زمانی نامعین، در قسمت دوم پروژه نتایج استفاده از تقریبهای خطی مناسب بجای ترم نمایی بررسی و ضمن انجام مقایسه‌ی نتایج این کار با برخی روشهای ارائه شده، برای سیستمهای خطی با دو تأخیر زمانی نامعین، شرایط داشتن نتایج مطلوب حاصل از این تقریبها بحث شده است.

## ۱-۵- مروری بر فصلهای پروژه

در ادامه‌ی این پایان نامه، در فصل دوم مروری بر سیستمهای دارای تأخیر زمانی نامعین، فعالیت‌های انجام شده در این زمینه و مقایسه‌ی نتایج آنها انجام شده است. در فصل سوم، برخی از مهمترین فعالیت‌های انجام شده در زمینه‌ی تحلیل پایداری سیستم‌های غیر تناسبی دارای دو تأخیر زمانی معرفی شده‌اند [۱۸] و [۲۳, ۲۴]، که روش [۱۸] بدلیل کاربرد آن در این پروژه بطور کامل توضیح داده شده است. در فصل چهارم، روشی برای محاسبه‌ی محدوده‌ی پایداری سیستم-های غیر تناسبی سه تأخیری ارائه شده است. با بدست آوردن فرکانس‌های محل عبور ریشه‌ها از منطقه‌ی پایدار به ناپایدار، منحنی‌هایی در فضای تأخیرهای زمانی متناظر با هر نقطه ترسیم شده و سطوح پایداری در فضای تأخیرها محاسبه شده‌اند. همچنین نحوه‌ی اتصال سطوح پایداری در فضای تأخیرهای زمانی تشریح شده است. روش به کار رفته اگرچه بسط روش [۱۸] برای سیستمهای سه تأخیری است، اما بدلیل افزایش یک تأخیر نامعلوم تفاوتهای بسیاری بوجود آمده که باعث پیچیدگی بیشتر مسأله شده است. در ادامه‌ی این فصل نتایج تقریب ترم نمایی بصورت توابع خطی درجه یک و دو، در سیستمهای با دو تأخیر زمانی نامعین، با نتایج [۱۷, ۱۸] مقایسه و شرایط استفاده‌ی مناسب از این تقریب‌ها تعیین شده است. در فصل پنجم نتایج ارائه شده، برای چند سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان و با سه تأخیر زمانی نامعین مستقل، استفاده شده است.

نتایج این تحقیق در فصل ششم جمع بندی شده است.

# فصل دوم- آشنایی با سیستم‌های تأخیر زمانی

## ۲-۱- مقدمه

معادله مشخصه‌ی یک سیستم تأخیر زمانی متعلق به دسته‌ی معادلات دیفرانسیل تابعی[1] است [۱۴]. این معادلات دارای بعد بینهایت، یعنی دارای بینهایت ریشه هستند [۳۳]. زیرا شامل ترم نمایی بصورت $e^{-\tau s}$ هستند، که یک تابع تناوبی است. در فصل بعد نشان داده می‌شود، هرگاه $s=\alpha+\beta j$، ریشه‌ی $e^{-\tau s}$ باشد، که $\alpha,\beta\in\Re$ و $\tau$ تأخیر زمانی معلوم است، تمام نقاط $\alpha+(\beta+2k\pi/\tau)j$، که $k\in I$، نیز ریشه‌ی $e^{-\tau s}$ هستند. بنابراین $e^{-\tau s}$ در صفحه‌ی مختلط بینهایت ریشه دارد. کتابها و مقالات بسیاری در زمینه‌ی طراحی کنترل کننده، پایدارسازی، محاسبه‌ی مرزهای پایداری و سایر مسائل مربوط به سیستم‌های تأخیر زمانی نوشته شده است.

دلایل اصلی وجود انگیزه فراوان برای بررسی و بحث بسیار پیرامون مسائل تأخیر زمانی نکات

[1] Functional differential equations (FDES)