



پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

عنوان

روش حجم محدود برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی سهموی

استاد راهنما

دکتر علی ذاکری

استاد مشاور

دکتر عقیله حیدری

نگارش

مهشید کاظمی

شهریور ۱۳۸۸

و می خوانیم که از تاریکی های پندار پروتیمان آورد

به روشنایی فهم بزرگیمان بخشید

درهای مهربانی را به رویمان بگشود

و گنجینه های دانش را فرارویمان بگستراند.

هوالمع

تقدیم به

پدر و مادر بزرگوارم که وجود نازنینشان بزرگ‌ترین

منّت خداوند بلند مرتبه بر من است.

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس خداوندی را که خالق هستی و کائنات است. خداوندی که به ما ارزش داد و ما را از عالم نیستی به صحنه هستی درآورد، در زمره موجودات مخصوصاً اشرف مخلوقات جای داد. بر ما منت نهاد و بها بخشید و چند صباحی حیات داد تا ذره‌ای از عظمت بی‌کران او را دریابیم.

از پدر اندیشمند و دلسوزم جناب آقای محمدعلی کاظمی و مادر مهربانم سرکار خانم اکرم السادات دهقانی که در تمام مراحل زندگی و تحصیل همواره پشتیبان من بوده و مرا یاری نموده‌اند سپاسگذارم.

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر ذاکری که در کلیه مراحل انجام کار، راهنمایی‌ها و کمک‌های بی‌شائبه ایشان چراغ راه من در این مسیر بوده تشکر می‌کنم.

و نیز از سرکار خانم دکتر عقیده حیدری استاد مشاور گرامی که در تهیه این پایان نامه از مساعدت‌ها و همکاری ایشان بهره‌مند شده‌ام کمال سپاسگذاری را دارم.

چکیده

هدف از انجام عمل گسسته‌سازی تبدیل یک یا چند معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی به یک دستگاه معادلات جبری است. حل این دستگاه‌ها باعث تولید یک مجموعه از مقادیری می‌شود که متناظر با جواب معادلات دیفرانسیل جزئی در برخی از موقعیت‌های مکانی یا زمانی است. فرآیندهای گسسته‌سازی به دو گام گسسته‌سازی دامنه جواب و گسسته‌سازی معادله تقسیم می‌شوند. گسسته‌سازی دامنه جواب، یک توصیف عددی از دامنه محاسبه‌ای را نشان می‌دهد. این دامنه محاسبه‌ای شامل موقعیت‌هایی از نقاط است که جواب درون و روی کرانه‌های آن توصیف می‌شود. این فضا به تعداد متناهی از نواحی مجزا که حجم‌های کنترل یا سلول نام دارد تقسیم می‌شود. در حالت گسسته‌سازی گذرا، بازه زمانی به تعداد متناهی از گام‌های زمانی تفکیک می‌شود. در این نوشتار به گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل جزئی با روش حجم متناهی پرداخته‌ایم.

دقت الگوریتم‌های شبیه‌سازی عددی یکی از اصول مهم در دینامیک سیالات محاسبه‌ای پیشرفته است. توسعه مدل‌های ریاضی دقیق‌تر و جدید نیازمند دیدگاهی عمیق در مسأله خطاهای عددی است.

برای ساختن یک برآورد خطای جواب در محاسبات حجم محدود، لازم است که منابع آن را بیازماییم. خطاهای گسسته‌سازی به دو گروه تقسیم می‌شوند: خطاهایی که از گسسته‌سازی دامنه جواب حاصل می‌شود و خطاهایی که از گسسته‌سازی معادله نتیجه می‌شود. گروه اول شامل تفکیک مش ناکافی، چولگی و نامتعامدی مش است. در حالت روش حجم متناهی مرتبه دوم، خطاهای گسسته‌سازی معادله به صورت نفوذ عددی معرفی می‌شوند. ضرایب نفوذ عددی از گسسته‌سازی جمله همرفت و مشتق زمانی به دست می‌آیند. برای تقلیل نفوذ عددی از جمله همرفت، یک طرح تفاضلی مرتبه دوم کران‌دار شده و پایدار شده ارائه شده است.

فهرست مطالب

صفحه

مقدمه	۱
۱ مفاهیم اولیه	۷
۲ مدل سازی معادله انتقال	۱۹
۳ روش کنترل حجم محدود برای مساله انتقال	۲۴
۳ - ۱ مقدمه	۲۴
۳ - ۲ فرآیند گسسته سازی حجم محدود	۲۵
۳ - ۲ - ۱ گسسته سازی دامنه	۲۵
۳ - ۲ - ۲ گسسته سازی معادله دیفرانسیل	۲۷
۳ - ۳ گسسته سازی جملات مکانی	۲۸
۳ - ۳ - ۱ گسسته سازی جمله همرفت	۲۸
۳ - ۳ - ۲ گسسته سازی جمله نفوذ	۳۱
۳ - ۳ - ۳ گسسته سازی جمله منبع	۳۷
۳ - ۴ گسسته سازی جمله زمان با مشتق	۳۸

- ۳ - ۴ - ۱ روش کرانک - نیکلسون ۳۸
- ۳ - ۴ - ۲ گسسته‌سازی صریح ۴۱
- ۳ - ۴ - ۳ گسسته‌سازی ضمنی اویلر ۴۲
- ۳ - ۴ - ۴ روش تفاضلی پسرو ۴۳
- ۳ - ۵ - ۱ یک طرح تفاضلی همرفت جدید ۴۵
- ۳ - ۵ - ۱ دقت و کران‌داری ۴۵
- ۳ - ۵ - ۲ نقصان تغییرات سراسری (TVD) ۴۵
- ۳ - ۵ - ۳ معیار کران‌داری همرفت و نمودار *NVD* ۵۰
- ۳ - ۵ - ۴ همگرایی مسائل برای طرح شارهای محدودکننده ۵۸
- ۳ - ۵ - ۵ اصلاح معیار *NVD* برای شبکه‌های بدون ساختار ۵۸
- ۳ - ۶ - ۱ پیاده‌سازی شرایط کرانه‌ای ۶۲
- ۳ - ۷ - ۱ دستگاه معادلات حاصل از عمل گسسته‌سازی در روش حجم محدود ۶۷
- ۳ - ۷ - ۱ تکنیک‌های حل دستگاه معادلات جبری ۶۷
- ۳ - ۸ - ۱ خطاهای عددی در فرآیند گسسته‌سازی ۷۰
- ۳ - ۸ - ۱ نفوذ عددی برای طرح‌های تفاضلی همرفت ۷۰
- ۳ - ۸ - ۲ نفوذ عددی از گسسته‌سازی زمانی ۷۳
- ۳ - ۸ - ۳ خطاهای القایی شبکه ۷۸
- ۴ تحلیل خطا ۸۲

۸۲	۴ - ۱	مقدمه
۸۳	۴ - ۲	برآوردکننده‌های خطا و شاخص‌های خطا
۸۵	۴ - ۳	ملزومات برآورد خطا
۸۷	۴ - ۴	روش‌های مبتنی بر بسط سری تیلور
۸۹	۴ - ۴ - ۱	برونیاپی ریچاردسون
۹۲	۴ - ۴ - ۲	برآورد خطای سری تیلور مستقیم
۹۵	۴ - ۴ - ۳	اندازه‌گیری نفوذ عددی
۹۷	۴ - ۵	برآورد خطای گشتاور
۱۰۰	۴ - ۵ - ۱	نرمال‌سازی برآورد خطای گشتاور
۱۰۱	۴ - ۵ - ۲	سازگاری برآورد خطای گشتاور
۱۰۳	۴ - ۶	برآورد خطای باقیمانده
۱۰۸	۴ - ۶ - ۱	نرمال‌سازی برآورد خطای باقیمانده
۱۱۰	۴ - ۷	برآورد خطا برای محاسبات گذرا
۱۱۰	۴ - ۷ - ۱	باقیمانده در محاسبات گذرا
۱۱۲	۴ - ۷ - ۲	سهام خطای مکانی و زمانی
۱۱۴	۴ - ۷ - ۳	ریشه‌یابی معادله برای خطا
۱۱۶	۵	مثال عددی
۱۱۶	۵ - ۱	مقدمه

۵ - ۲ گسسته سازی معادله انتقال مانا..... ۱۲۱

۵ - ۲ - ۱ طرح های تفاضلی جمله همرفت ۱۲۴

۵ - ۳ گسسته سازی معادله انتقال لحظه ای..... ۱۲۸

منابع..... ۱۴۲

پیوست A برنامه های رایانه ای..... ۱۴۴

پیوست B واژه نامه فارسی به انگلیسی ۱۷۴

پیوست C واژه نامه انگلیسی به فارسی ۱۷۹

فهرست جداول

- ۵ - ۱ تبدیل بین اندیس مش و نقاط قطب‌نمایی ۱۱۸
- ۵ - ۲ نتایج حاصل از گسسته‌سازی معادله مثال (۵ - ۱) در زمان $t = 0.1$ با استفاده از روش تفاضل مرکزی ۱۳۵
- ۵ - ۳ نتایج حاصل از گسسته‌سازی معادله مثال (۵ - ۱) در زمان $t = 0.1$ با استفاده از روش تفاضلی *Upwind* ۱۳۶
- ۵ - ۴ نتایج حاصل از گسسته‌سازی معادله مثال (۵ - ۱) در زمان $t = 0.1$ با استفاده از روش تفاضلی آمیخته ۱۳۷
- ۵ - ۵ نتایج حاصل از گسسته‌سازی معادله مثال (۵ - ۲) با گام زمانی $h = 0.1$ با استفاده از روش تفاضل مرکزی ۱۳۹
- ۵ - ۶ نتایج حاصل از گسسته‌سازی معادله مثال (۵ - ۲) با گام زمانی $h = 0.1$ با استفاده از روش تفاضل *Upwind* ۱۴۰

فهرست علائم

علائم لاتین

۱, ۲, ۳	بردارهای اصلی اینرسی
a	خاصیت بردار عمومی
a_N	ضریب ماتریس مطابق با همسایه N
a_P	ضریب مرکزی
Co	عدد کرانت
D_C	بخش همرفتی خطای زمانی
D_D	بخش نفوذ خطای زمانی
D_S	بخش جمله منبع خطای زمانی
E_c	نفوذ عددی همرفتی
E_t	نفوذ عددی گسسته‌سازی زمانی
E_d	نفوذ عددی نامتعامدی مش
E_s	نفوذ عددی چولگی مش
e	خطای جواب
e_m	برآورد خطای گشتاور
e_r	برآورد خطای باقیمانده
e_t	برآورد خطای سری تیلور
e_{num}	خطای نفوذ عددی
F	جرم شار گذرا از رویه

ضریب انتقال همرفت	F_{conv}
ضریب انتقال نفوذ	F_{diff}
ضریب نرمال سازی باقیمانده	F_{norm}
رویه، نقطه‌ای در مرکز رویه	f
رویه سمت چپ رویه اصلی	f^+
رویه سمت راست رویه اصلی	f^-
نقطه درونیابی رویه رویه	f_i
ضریب درونیابی	f_x
اندازه مش	h
مقدار مرتبه بالاتر	HO
مقدار تفکیک پذیری بالاتر	HR
تانسور واحد	I
بردارهای واحد	i, j
بخش نامتعاملدی بردار مساحت رویه	k
تانسور گشتاور مرتبه دوم	M
بردار تصحیح چولگی	m
گشتاور دوم a	m_a
گشتاور دوم φ	m_φ
نقطه‌ای در مرکز همسایه حجم کنترل	N
نقطه‌ای در مرکز حجم کنترل	P
سطح منبع	Q_S

حجم منبع	Q_V
شار گرما	q
طرف راست معادله جبری	R_P
نمایشگر همواری طرح تفاضلی TVD	r
عدد رینولدز	Re
گشتاور متوازن	res_m
باقیمانده گذرا	res_F
باقیمانده مکانی	res_L
باقیمانده سلول	res_P
باقیمانده زمانی	res_T
بردار مساحت رویه	S_f
جمله منبع	S_ϕ
خطای جمله منبع	S_e
بخش خطی جمله منبع	S_P
بخش ثابت جمله منبع	S_u
دما، اسکالر زمان	T
زمان	t
شاخص گام زمانی	t_{ref}
بردار سرعت	\mathbf{U}
سرعت انتقال موثر	U_{tran}
حجم	V

V_P	حجم سلول
\mathbf{x}	بردار موقعیت

علائم یونانی

Γ_P	تانسور نفوذ عددی نامتعامدی مش
Γ_N	تانسور نفوذ عددی گسسته‌سازی همرفت
Γ_{num}	تانسور نفوذ عددی
Γ_S	تانسور نفوذ عددی چولگی مش
Γ_T	تانسور نفوذ عددی گسسته‌سازی زمانی
γ	ضریب آمیختگی
Δ	بخش متعامد بردار مساحت رویه
ρ	چگالی
ψ	محدودکننده TVD
Φ	جواب واقعی
φ	خاصیت اسکالر عمومی

بالانویس‌ها

\bar{q}	میانگین
q^n	سطح زمانی جدید
q^0	یک سطح زمانی قبل
q^{00}	دو سطح زمانی قبل

\hat{q} بردار واحد

\tilde{q} نرمال شده

زیر نویس ها

q_f مقدار روی رویه

q_b مقدار روی رویه کرانه‌ای

فهرست اشکال

۱۰.....	مکعب مستطیل دیفرانسیلی با حجم $dx dy dz$	۱ - ۱
۱۱.....	نمایش حذف dS روی سطوح درونی.....	۲ - ۱
۱۷.....	سه خط موازی گذرنده از دو خط ناموازی.....	۳ - ۱
۱۷.....	دو خط ناموازی گذرنده از سه خط موازی.....	۴ - ۱
۲۶.....	نمایش یک حجم کنترل چندضلعی.....	۱ - ۳
۳۰.....	درونیایی رویه در طرح تفاضلی جمله همرفت.....	۲ - ۳
۳۲.....	بردارهای S و d روی یک مش نامتعامل.....	۳ - ۳
۳۴.....	رفتار نامتعاملی در روند تصحیح مینیم.....	۴ - ۳
۳۵.....	رفتار نامتعاملی در روند تصحیح متعامد.....	۵ - ۳
۳۵.....	رفتار نامتعاملی در روند فوق ترمیم.....	۶ - ۳
۴۷.....	تغییرات ϕ اطراف رویه f	۷ - ۳
۴۷.....	نمودار سوئی برای تعیین نقصان تغییرات سراسری.....	۸ - ۳
۴۹.....	توابع محدودکننده شار در نمودار سوئی.....	۹ - ۳
۵۱.....	معیار کران‌داری همرفت در نمودار متغیر نرمال شده.....	۱۰ - ۳
۵۲.....	برخی طرح‌های تفاضلی در نمودار NVD	۱۱ - ۳

۵۴.....	معیار کران‌داری همرفت برای طرح اوشر.....	۱۲ - ۳ - الف
۵۴.....	تابع χ برای متغیر نرمال شده طرح اوشر.....	۱۲ - ۳ - ب
۵۶.....	معیار کران‌داری همرفت برای طرح <i>Smart</i>	۱۳ - ۳ - الف
۵۶.....	تابع χ برای متغیر نرمال شده طرح <i>Smart</i>	۱۳ - ۳ - ب
۵۷.....	معیار کران‌داری همرفت برای طرح گاما.....	۱۴ - ۳ - الف
۵۷.....	تابع χ برای متغیر نرمال شده طرح گاما.....	۱۴ - ۳ - ب
۵۹.....	تعریف اصلاح شده معیار کران‌داری برای شبکه‌های بدون ساختار.....	۱۵ - ۳
۶۳.....	یک حجم کنترل با یک رویه کرانه‌ای.....	۱۶ - ۳
۷۹.....	خطای چولگی روی رویه.....	۱۷ - ۳
۹۱.....	حجم کنترل شش وجهی در امتداد با دستگاه مختصات دکارتی.....	۱ - ۴
۱۰۴.....	ناسازگاری بین درونیابی رویه و انتگرال‌های حجم یک سلول در حالت یک بعدی.....	۲ - ۴
۱۰۷.....	سنجش خواص برآورد خطای باقیمانده در حالت یک بعدی.....	۳ - ۴
۱۰۸.....	برآورد انتقال نفوذ و همرفت.....	۴ - ۴
۱۱۷.....	گسسته‌سازی یک بعدی و دو بعدی در حجم‌های متناهی دکارتی.....	۱ - ۵
۱۱۹.....	هندسه یک سلول در مش یک بعدی.....	۲ - ۵
۱۱۹.....	هندسه یک سلول در مش دو بعدی.....	۳ - ۵
۱۳۴.....	جواب واقعی معادله انتقال مثال (۵ - ۱).....	۴ - ۵
۱۳۴.....	رویت نمودار شکل (۵ - ۴) از بالا.....	۵ - ۵
۱۳۵.....	جواب تقریبی معادله انتقال مثال (۵ - ۱) با روش تفاضل مرکزی.....	۶ - ۵

۱۳۵.....	رویت نمودار جواب تقریبی شکل (۵ - ۶) از بالا	۷ - ۵
۱۳۶.....	جواب تقریبی معادله انتقال مثال (۵ - ۱) با روش تفاضل <i>Upwind</i>	۸ - ۵
۱۳۶.....	رویت نمودار جواب تقریبی شکل (۵ - ۸) از بالا	۹ - ۵
۱۳۷.....	جواب تقریبی معادله انتقال مثال (۵ - ۱) با روش تفاضل آمیخته	۱۰ - ۵
۱۳۷.....	رویت نمودار جواب تقریبی شکل (۵ - ۱۰) از بالا	۱۱ - ۵
۱۳۸.....	جواب واقعی معادله انتقال مثال (۵ - ۲)	۱۲ - ۵
	جواب تقریبی معادله انتقال مثال (۵ - ۲) با گام زمانی $h=0/1$ با روش تفاضل	۱۳ - ۵
۱۳۹.....	مرکزی	
	جواب تقریبی معادله انتقال مثال (۵ - ۲) با گام زمانی $h=0/1$ با روش تفاضل	۱۴ - ۵
۱۴۰.....	<i>Upwind</i>	

مقدمه

در طبیعت و صنعت به موارد بسیاری برمی خوریم که در قالب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مطرح می شوند. از جمله این مسائل می توان به موج برهای دی الکتریک چندلایه، توصیف تحول حالت یک ذره، چگونگی رفتار شارها و مسائل الکترومغناطیس اشاره کرد که در ریاضیات به صورت معادلات هلمهولتز^۱، شرودینگر^۲ و لاپلاس^۳ بیان می شوند.

مکانیک سیالات یا شارها دانشی است که به بررسی شارهای ساکن و متحرک و برهم کنش میان آن ها و اجسام ساکن یا متحرک واقع در داخل یا پیرامون آن ها می پردازد. با توجه به این که استاتیک و تحرک شارها در طبیعت، صنعت و زندگی روزمره انسان کاربرد فراوان دارد، لذا دانشمندان آزمایش های گسترده ای را در این زمینه انجام داده اند.

دینامیک سیالات محاسبه ای^۴ (CFD) شاخه جدیدی از دینامیک سیالات می باشد که به حل معادلات حاکم بر دینامیک شارها و انتقال حرارت می پردازد. تا اواخر جنگ جهانی دوم بیشتر شیوه های مربوط به حل مسائل دینامیک سیالات از طبیعتی تحلیلی یا تجربی برخوردار بود. همچون تمامی نوآوری های برجسته علمی که در این مورد هم اشاره به زمان دقیق آغاز دینامیک سیالات محاسبه ای میسر نیست. نخستین کار با اهمیت در این رشته را به ریچاردسون^۵ نسبت می دهند که در سال ۱۹۱۰ میلادی محاسبات مربوط به نحوه توزیع تنش^۶ (نیروی وارد بر سطح) در یک سد ساخته شده از مصالح بنایی را به انجام رساند. در این کار ریچاردسون از روش تازه موسوم به رهاسازی^۷ برای حل معادله لاپلاس استفاده نمود. در این روش با تبدیل معادلات مشتقات جزئی حاکم بر دینامیک سیالات محاسبه ای به معادلات جبری، امکان حل عددی این معادلات فراهم می شود.

اکنون روش دینامیک سیالات محاسبه ای جای خود را در میان روش های آزمایشگاهی و تحلیلی برای مسائل سیالات و انتقال حرارت باز کرده است و استفاده از این روش ها برای انجام

¹ Helmholtz

² Schrodinger

³ Laplace

⁴ Computational Fluid Dynamic(CFD)

⁵ Richardson

⁶ Stress

⁷ Relaxation

تحلیل‌های مهندسی امری عادی شده است. دینامیک سیالات محاسبه‌ای به صورت گسترده در زمینه‌های مختلف صنعتی مرتبط با سیالات، انتقال حرارت و انتقال مواد به کمک سیال به کار گرفته می‌شود. از جمله این موارد می‌توان به صنایع خودروسازی، صنایع هوا فضا، توربوماشین‌ها، صنایع هسته‌ای، صنایع نظامی، صنایع نفت و گاز و انرژی و بسیاری موارد گسترده صنعتی دیگر اشاره نمود. خصوصیات فیزیکی جریان یک سیال به وسیله سه اصل اساسی بقای جرم، بقای ممنتوم^۸ و بقای انرژی کنترل می‌شود. این سه اصل اساسی فیزیکی را می‌توان بر حسب معادلات پایه ریاضی بیان کرد که در عمومی‌ترین حالت معادلات انتگرالی یا معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هستند. هنر، جایگزین کردن انتگرال‌ها یا مشتقات جزئی در این معادلات با عبارات ساده جبری است. این معادلات در فرم جدید قابل حل بوده و جواب‌های عددی برای مشخصه‌های میدان جریان را در نقاط معینی از زمان و مکان ارائه می‌دهند.

روش‌های مورد استفاده در CFD عبارتند از:

- روش المان‌های محدود (FEM)^۹
- روش احجام محدود (FVM)^{۱۰}
- روش تفاضلات محدود (FDM)^{۱۱}
- روش المان‌های طیفی (SEM)^{۱۲}.

در میان این روش‌ها روش حجم‌های محدود دارای کاربرد بیشتری به خصوص در مدل‌سازی جریان‌های تراکم‌ناپذیر^{۱۳} می‌باشد. این روش یک روش بسیار قوی و مناسب در روش‌های دینامیک سیالات محاسبه‌ای است، به طوری که از شبکه‌بندی ناحیه مورد نظر، یک تابع تقریب را به جای تابع اصلی جایگزین نموده و با حل دستگاه معادلات به دست آمده مقادیر گره‌ای تابع را مستقیماً به دست می‌دهد.

همان‌طور که می‌دانیم روش‌های انتقال حرارت به صورت‌های رسانایی^{۱۴}، تابش^{۱۵} و همرفت^{۱۶} صورت می‌پذیرد. روش انتقال حرارت در مورد سیالات با پدیده همرفتی همراه است.

⁸ Momentum

در مکانیک سیالات حاصل ضرب جرم و سرعت، $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ ، را اندازه حرکت یا ممنتوم گویند.

⁹ Finite Element Method (FEM)

¹⁰ Finite Volume Method (FVM)

¹¹ Finite Difference Method (FDM)

¹² Spectral Element Method (SEM)

¹³ Incompressible

جریانی که در آن چگالی شار ثابت و مستقل از x و t باشد، جریان تراکم‌ناپذیر نام دارد.

¹⁴ Conduction