پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی(آنالیز عددی)

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

عنوان

روش حجم محدود برای حل معادلات دیفرانسیل جزیی سهموی

استاد راهنما

دکتر علی ذاکری

استاد مشاور

دکتر عقیله حیدری

نگارش

مهشید کاظمی

شهریور ۱۳۸۸

و می خوانیمش که از تاریکی های پندار برونمان آورد

به روشنایی فهم بزرگیمان بخشید

درهای مهربانی را به رویمان بگشود

و گنجینه های دانش را فرارویمان بگستراند.

هوالحق

تقدیم به

پدر و مادر بزرگوارم که وجود نازنینشان بزرگترین

منّت خداوند بلند مرتبه بر من است.

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس خداوندی را که خالق هستی و کائنات است. خداوندی که به ما ارزش داد و ما را از عالم نیستی به صحنه هستی درآورد، در زمره موجودات مخصوصاً اشرف مخلوقات جای داد. بر ما منت نهاد و بها بخشید و چند صباحی حیات داد تا ذره‌ای از عظمت بی‌کران او را دریابیم.

از پدر اندیشمند و دلسوزم جناب آقای محمدعلی کاظمی و مادر مهربانم سرکار خانم اکرم السادات دهقانی که در تمام مراحل زندگی و تحصیل همواره پشتیبان من بوده و مرا یاری نموده‌اند سپاسگذارم.

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر ذاکری که در کلیه مراحل انجام کار، راهنمایی‌ها و کمک‌های بی-شائبه ایشان چراغ راه من در این مسیر بوده تشکر می‌کنم.

و نیز از سرکار خانم دکتر عقیله حیدری استاد مشاور گرامی که در تهیه این پایان نامه از مساعدت‌ها و همکاری ایشان **بهره‌مند شده‌ام کمال سپاسگذاری را دارم.**

چکیده

هدف از انجام عمل گسسته‌سازی تبدیل یک یا چند معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی به یک دستگاه معادلات جبری است. حل این دستگاه‌ها باعث تولید یک مجموعه از مقادیری می‌شود که متناظر با جواب معادلات دیفرانسیل جزیی در برخی از موقعیت‌های مکانی یا زمانی است. فرآیندهای گسسته سازی به دو گام گسسته‌سازی دامنه جواب و گسسته‌سازی معادله تقسیم می‌شوند. گسسته-سازی دامنه جواب، یک توصیف عددی از دامنه محاسبه‌ای را نشان می‌دهد. این دامنه محاسبه‌ای شامل موقعیت‌هایی از نقاط است که جواب درون و روی کرانه‌های آن توصیف می‌شود. این فضا به تعداد متناهی از نواحی مجزا که حجم‌های کنترل یا سلول نام دارد تقسیم می‌شود. در حالت گسسته-سازی گذرا، بازه زمانی به تعداد متناهی از گام‌های زمانی تفکیک می‌شود. در این نوشتار به گسسته-سازی معادلات دیفرانسیل جزیی با روش حجم متناهی پرداخته‌ایم.

دقت الگوریتم‌های شبیه‌سازی عددی یکی از اصول مهم در دینامیک سیالات محاسبه‌ای پیشرفته است. توسعه مدل‌های ریاضی دقیق‌تر و جدید نیازمند دیدگاهی عمیق در مسأله خطاهای عددی است.

برای ساختن یک برآورد خطای جواب در محاسبات حجم محدود، لازم است که منابع آن را بیازماییم. خطاهای گسسته‌سازی به دو گروه تقسیم می‌شوند: خطاهایی که از گسسته‌سازی دامنه جواب حاصل می‌شود و خطاهایی که از گسسته‌سازی معادله نتیجه می‌شود. گروه اول شامل تفکیک مش ناکافی، چولگی و نامتعامدی مش است. در حالت روش حجم‌متناهی مرتبه دوم، خطاهای گسسته‌سازی معادله به صورت نفوذ عددی معرفی می‌شوند. ضرایب نفوذ عددی از گسسته‌سازی جمله همرفت و مشتق زمانی به‌دست می‌آیند. برای تقلیل نفوذ عددی از جمله همرفت، یک طرح تفاضلی مرتبه دوم کران‌دارشده و پایدارشده ارائه شده است

فهرست مطالب صفحه

فهرست جداول

فهرست علائم

علائم لاتین

۱, ۲, ۳	بردارهای اصلی اینرسی
$\mathbf{a}$	خاصیت بردار عمومی
a_N	ضریب ماتریس مطابق با همسایه N
a_P	ضریب مرکزی
Co	عدد کرانت
D_C	بخش همرفتی خطای زمانی
D_D	بخش نفوذ خطای زمانی
D_S	بخش جمله منبع خطای زمانی
E_c	نفوذ عددی همرفتی
E_t	نفوذ عددی گسسته‌سازی زمانی
E_d	نفوذ عددی نامتعامدی مش
E_s	نفوذ عددی چولگی مش
e	خطای جواب
e_m	برآورد خطای گشتاور
e_r	برآورد خطای باقیمانده
e_t	برآورد خطای سری تیلور
e_{num}	خطای نفوذ عددی
F	جرم شار گذرا از رویه

F_{conv}	ضریب انتقال همرفت
F_{diff}	ضریب انتقال نفوذ
F_{norm}	ضریب نرمال‌سازی باقیمانده
f	رویه، نقطه‌ای در مرکز رویه
f^+	رویه سمت چپ رویه اصلی
f^-	رویه سمت راست رویه اصلی
f_i	نقطه درونیابی رویه رویه
f_x	ضریب درونیابی
h	اندازه مش
HO	مقدار مرتبه بالاتر
HR	مقدار تفکیک‌پذیری بالاتر
$\mathbf{I}$	تانسور واحد
$\mathbf{i}, \mathbf{j}$	بردارهای واحد
$\mathbf{k}$	بخش نامتعامدی بردار مساحت رویه
$\mathbf{M}$	تانسور گشتاور مرتبه دوم
$\mathbf{m}$	بردار تصحیح چولگی
m_a	گشتاور دوم a
m_φ	گشتاور دوم φ
N	نقطه‌ای در مرکز همسایه حجم کنترل
P	نقطه‌ای در مرکز حجم کنترل
Q_S	سطح منبع

Q_V حجم منبع

q شار گرما

R_P طرف راست معادله جبری

r نمایشگر همواری طرح تفاضلی *TVD*

Re عدد رینولدز

res_m گشتاور متوازن

res_F باقیمانده گذرا

res_L باقیمانده مکانی

res_P باقیمانده سلول

res_T باقیمانده زمانی

$\mathbf{S}_f$ بردار مساحت رویه

S_φ جمله منبع

S_e خطای جمله منبع

S_P بخش خطی جمله منبع

S_u بخش ثابت جمله منبع

T دما، اسکالر زمان

t زمان

t_{ref} شاخص گام زمانی

$\mathbf{U}$ بردار سرعت

U_{tran} سرعت انتقال موثر

V حجم

V_P	حجم سلول
$\mathbf{x}$	بردار موقعیت

علائم یونانی

Γ_P	تانسور نفوذ عددی نامتعامدی مش
Γ_N	تانسور نفوذ عددی گسسته‌سازی همرفت
Γ_{num}	تانسور نفوذ عددی
Γ_S	تانسور نفوذ عددی چولگی مش
Γ_T	تانسور نفوذ عددی گسسته‌سازی زمانی
γ	ضریب آمیختگی
$\boldsymbol{\Delta}$	بخش متعامد بردار مساحت رویه
ρ	چگالی
ψ	محدودکننده *TVD*
Φ	جواب واقعی
φ	خاصیت اسکالر عمومی

بالانویس‌ها

$\bar{q}$	میانگین
q^n	سطح زمانی جدید
q^0	یک سطح زمانی قبل
q^{00}	دو سطح زمانی قبل

$\hat{q}$	بردار واحد
$\tilde{q}$	نرمال‌شده

زیرنویس‌ها

q_f	مقدار روی رویه
q_b	مقدار روی رویه کرانه‌ای

فهرست اشکال

مقدمه

درطبیعت و صنعت به موارد بسیاری برمی‌خوریم که در قالب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی مطرح می‌شوند. از جمله این مسائل می‌توان به موج‌برهای دی‌الکتریک چندلایه، توصیف تحول حالت یک ذره، چگونگی رفتار شاره‌ها و مسائل الکترومغناطیس اشاره کرد که در ریاضیات به صورت معادلات هلمهولتز[1]، شرودینگر[2] و لاپلاس[3] بیان می‌شوند.

مکانیک سیالات یا شاره‌ها دانشی است که به بررسی شاره‌های ساکن و متحرک و برهم کنش میان آن‌ها و اجسام ساکن یا متحرک واقع در داخل یا پیرامون آن‌ها می‌پردازد. با توجه به این که استاتیک و تحرک شاره‌ها در طبیعت، صنعت و زندگی روزمره انسان کاربرد فراوان دارد، لذا دانشمندان آزمایش‌های گسترده‌ای را در این زمینه انجام داده‌اند.

دینامیک سیالات محاسبه‌ای[4] (CFD) شاخه جدیدی از دینامیک سیالات می‌باشد که به حل معادلات حاکم بر دینامیک شاره‌ها و انتقال حرارت می‌پردازد. تا اواخر جنگ جهانی دوم بیشتر شیوه-های مربوط به حل مسائل دینامیک سیالات از طبیعتی تحلیلی یا تجربی برخوردار بود. همچون تمامی نوآوری‌های برجسته علمی که در این مورد هم اشاره به زمان دقیق آغاز دینامیک سیالات محاسبه‌ای میسر نیست. نخستین کار با اهمیت در این رشته را به ریچاردسون[5] نسبت می‌دهند که در سال ۱۹۱۰ میلادی محاسبات مربوط به نحوه توزیع تنش[6] (نیروی وارد بر سطح) در یک سد ساخته شده از مصالح بنایی را به انجام رساند. در این کار ریچاردسون از روش تازه موسوم به رهاسازی[7] برای حل معادله لاپلاس استفاده نمود. در این روش با تبدیل معادلات مشتقات جزیی حاکم بر دینامیک سیالات محاسبه‌ای به معادلات جبری، امکان حل عددی این معادلات فراهم می‌شود.

اکنون روش دینامیک سیالات محاسبه‌ای جای خود را در میان روش‌های آزمایشگاهی و تحلیلی برای مسائل سیالات و انتقال حرارت باز کرده است و استفاده از این روش‌ها برای انجام

---

[1] *Helmholtz*
[2] *Schrodinger*
[3] *Laplace*
[4] *Computational Fluid Dynamic(CFD)*
[5] *Richardson*
[6] *Stress*
[7] *Relaxation*

تحلیل‌های مهندسی امری عادی شده است. دینامیک سیالات محاسبه‌ای به صورت گسترده در زمینه-های مختلف صنعتی مرتبط با سیالات، انتقال حرارت و انتقال مواد به کمک سیال به کار گرفته می-شود. از جمله این موارد می‌توان به صنایع خودروسازی، صنایع هوا فضا، توربوماشین‌ها، صنایع هسته‌ای، صنایع نظامی، صنایع نفت و گاز و انرژی و بسیاری موارد گسترده صنعتی دیگر اشاره نمود.

خصوصیات فیزیکی جریان یک سیال به وسیله سه اصل اساسی **بقای جرم**، **بقای ممنتوم**[۸] و **بقای انرژی** کنترل می‌شود. این سه اصل اساسی فیزیکی را می‌توان بر حسب معادلات پایه ریاضی بیان کرد که در عمومی‌ترین حالت معادلات انتگرالی یا معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی هستند. هنر، جایگزین کردن انتگرال‌ها یا مشتقات جزیی در این معادلات با عبارات ساده جبری است. این معادلات در فرم جدید قابل حل بوده و جواب‌های عددی برای مشخصه‌های میدان جریان را در نقاط معینی از زمان و مکان ارائه می‌دهند.

روش‌های مورد استفاده در CFD عبارتند از:

- روش المان‌های محدود(FEM)[۹]
- روش احجام محدود (FVM)[۱۰]
- روش تفاضلات محدود (FDM)[۱۱]
- روش المان‌های طیفی (SEM)[۱۲] .

در میان این روش‌ها روش حجم‌های محدود دارای کاربرد بیشتری به خصوص در مدل-سازی جریان‌های تراکم‌ناپذیر[۱۳] می‌باشد. این روش یک روش بسیار قوی و مناسب در روش‌های دینامیک سیالات محاسبه‌ای است، به طوری که از شبکه‌بندی ناحیه مورد نظر، یک تابع تقریب را به جای تابع اصلی جایگزین نموده و با حل دستگاه معادلات به دست آمده مقادیر گره‌ای تابع را مستقیماً به دست می‌دهد.

همان‌طور که می‌دانیم روش‌های انتقال حرارت به صورت‌های رسانایی[۱۴]، تابش[۱۵] و همرفت[۱۶] صورت می‌پذیرد. روش انتقال حرارت در مورد سیالات با پدیده همرفتی همراه است.

---

[8] *Momentum*

در مکانیک سیالات حاصل ضرب جرم و سرعت، $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$، را اندازه حرکت یا ممنتوم گویند.

[9] *Finite Element Method (FEM)*
[10] *Finite Volume Method (FVM)*
[11] *Finite Difference Method (FDM)*
[12] *Spectral Element Method (SEM)*
[13] *Incompressible*

جریانی که در آن چگالی شار ثابت و مستقل از x و t باشد، جریان تراکم‌ناپذیر نام دارد.

[14] *Conduction*