۱۳۷۸ /۴/ ۳۰

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم - گروه فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی خواص هلیوم مایع و خاصیت ابر شارگی

نگارش : فرشاد نوروزی درازکلا

استاد راهنما: دکتر محمد ابراهیم زمردیان

استاد مشاور: دکتر ناصر شاه طهماسبی

سال تحصیلی : ۷۶-۱۳۷۵

2547/2

بسم الله الرحمن الرحیم

سپاس بی حد و ستایش بی قیاس ، ذات بی‌مثالی را سزاست که همه اشیاء به تسبیحش ناطقند و دست اوهام از دامن فهمش کوتاه

از اساتید محترم اقایان دکتر ناصر شاه طهماسبی و دکتر محمد ابراهیم زمردیان بی‌نهایت متشکرم که با دقت فراوان و زحمت زیاد اینجانب را در نگارش پایان نامه یاری کردند . امیدوارم که خداوند منان بر موفقیت شان بیفزاید.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

مقدمه

در این پایان نامه خواص هلیوم مایع را بررسی می‌کنیم . هلیوم مایع را بصورت گاز در نظر می‌گیریم و با استفاده از آمار مکانیک کوانتومی یا به عبارتی مکانیک آماری خواص ترمودینامیکی وهمچنین کمیات ترمودینامیکی از قبیل دما ، فشار ، ظرفیت گرمایی و آنتروپی را بدست می‌آوریم . پس از آن با استفاده از آمار بوز - اینشتین مدلهای روتونی و فوتونی را پیشنهاد می‌کنیم . این مدلها سبب می‌شوند تا بتوان خواص ویژهٔ هلیوم مایع II که ترکیبی ازمایع معمولی و ابر شاره است‌را مورد مطالعه قرارداد.

در دستگاههای بوز کامل از برهم کنش بین ذرات چشم پوشی می‌شود اما در واقع باید نیروی واندروالس بین ذرات را در نظر گرفت زیرا نیروی واندروالس بین ذرات دستگاه بوز را تغییر میدهد و در واقع برای تصحیح گاز کامل این نیرودخیل است. بهمین منظور در فصل سوم با استفاده از روش شبه پتانسیل کمیات ترمودینامیکی دستگاه بوزحقیقی‌را بدست می‌آوریم. این کمیات را باکمیات بدست آمده از طریق مدل مکانیک آماری مقایسه میکنیم. هر موجی از نوع S , P ,F,D و .... شبه پتانسیل مربوط به خود را داراست. در این‌فصل‌حضورتأثیرات شبه پتانسیل مربوط به موج P را در این تصحیحات وارد می کنیم یعنی ابتدا شبه پتانسیل مربوط به موج P را بصورت اختلال در نظر میگیریم و تصحیح انرژی این دستگاه را بدست می‌آوریم . با در نظر گرفتن این تصحیحات کمیات ترمودینامیکی دستگاه بوزحقیقی را بدست می‌آوریم

مشاهده می‌شود که در دمای صفر مطلق فشار دستگاه بوز حقیقی برخلاف گاز بوز ایده‌آل مخالف صفر است که این خود دلیلی‌است بر اینکه چرا هلیوم تا دمای صفر مطلق به صورت مایع باقی می‌ماند.

با توجه به‌آنکه انتشار امواج در هلیوم II دارای ویژگیهای خاصی است در آخر بمطالعه این امواج می‌پردازیم. در هلیوم II نه تنها امواج ایستاده حاصل از تغییرات فشار انتشار مییابند بلکه تغییرات دما سبب نوع جدیدی از امواج ایستاده میشود که در نوع خود جالب توجه است. علاوه بر انتشار صوت معمولی،صورتهای دیگر صوت هم در هیلوم II منتشر می‌شوند. این صوتها به صوتهای دوم ، سوم و چهارم معروفند.

با آزمایشهای تجربی خصوصیات هلیوم II رامی‌توان بررسی کرد. این بررسی در فصل چهارم آمده است:کشف خواص ابر شارگی ، صفر بودن انتروپی ابرشاره ، کشف صوتهای دوم ، سوم و چهارم ، اثر مکانوگرمایی ، اثر گرمامکانیکی یا فواره‌ای ، نظریه دو شاره‌ای هلیوم II ، چگونگی هدایت گرمایی در هلیوم II.

در ادامه فصل چهارم با استفاده ازساختار اتمی هلیوم مایع شکل ریاضی چگالی هلیوم مایع را با برازش نمودن بدست می آوریم وسرانجام انرژی پتانسیل دستگاه را با استفاده از روش مونت کارلوحساب می‌کنیم .

فصل اول

مروری بر مکانیک آماری و آمار بوز-اینشتین

در این فصل ابتدا نظریه مکانیک آماری را برای رابطه آماری بین ساختمان اتمی ماده و رفتار ماکروسکوپیکی مطرح میکنیم . سپس با استفاده از آمار بوزاینشتین رابطهٔ میان کمیات ترمودینامیکی را بررسی خواهیم کرد .

۱-۱) مجتمع ریز بندادی ، مجتمع بندادی ، مجتمع بزرگ بندادی

قبل از بررسی این مجتمعها یک تعریف ازمیکروحالت و مجتمع ضروری بنظر می‌رسد . حالتی که در آن مکان ، سرعت و حالت کوانتمی تک تک ذرات دستگاه معلوم باشد را میکروحالت آن دستگاه می‌نامند . هرگاه مجموعه‌ای ازمیکرو حالتهایی داشته باشیم که هرکدام از این میکروحالتها کمیات ترمودینامیکی یکسانی را بدهند به این مجموعه از میکرو حالتها مجتمع دستگاه گفته میشود .

اگر p اندازه حرکت خطی ، q مکان ذره و t زمان باشند چگالی نقاط در فضای فاز یا تعداد نقاط در واحد حجم فضای فاز تابعی از q,p و t میباشد . یعنی $\rho(q,p,t)$ ، چگالی نقاط در فضای فاز را نشان می‌دهد.

هرگاه ناظری با نقاط فضای فاز حرکت کند بطوریکه چگالی نقاط $\rho(q,p,t)$ با گذشت زمان نسبت به این ناظر تغییر نکند ، در آن صورت

$$\frac{d\rho}{dt} = ۰ \qquad (۱-۱)$$

یعنی تمامی میکروحالتهای دستگاه با احتمال مساوی در مجتمع شرکت می‌کنند یا $\rho(q,p,t)$ در سراسر فضای فاز یکنواخت می‌باشد . پس :

$$<f> = \frac{\int f(q,p)\ \rho\ (q,p,t)\ d^{۳N}qd^{۳N}p}{\int \rho(q,p,t)\ d^{۳N}qd^{۳N}p}$$

$$= \frac{\int f(q,p) d^{۳N}qd^{۳N}p}{w} \qquad (۲-۱)$$

$$w = \int d^{۳N}qd^{۳N}p \qquad (۳-۱)$$

که در آن $d^{۳N}qd^{۳N}p$ عنصر فضای فاز و w حجم فضای فاز را نشان میدهد .

رابطه بالا میگوید که مقدار چشمداشتی کمیت فیزیکی f از چگالی نقاط فضای فاز مستقل است.

این مجتمع را **ریزبندادی می‌نامند**

اگر $\rho(p,q)$ تنها تابعی از هامیلتونی دستگاه باشد داریم .

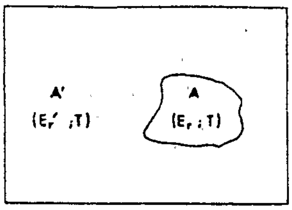
$$\frac{d\rho(p,q)}{dt} = ۰ \qquad (۴-۱)$$

در **مجتمع بندادی** $\rho(p,q)$ را به صورت زیر در نظر میگیریم .

$$\rho(p,q)\ \alpha\ exp(\frac{-H}{KT}) \qquad (۵-۱)$$

در مجتمع بندادی انرژی E دستگاه متغیر و تعداد ذرات آن ثابت میباشد . حال میخواهیم احتمال یافتن دستگاه در انرژی E_r را پیداکنیم . برای این منظور یک دستگاه A را در داخل منبع A' در نظر می‌گیریم که هردو در تعادل گرمایی هستند . E_r انرژی دستگاه ، E'_r انرژی منبع میباشند . بطوریکه :

$$E_r + E'_r = const = E^{(۰)} \qquad (۶-۱)$$



شکل ۱ـ۱) دستگاه A در منبع A' قرار داده‌شده‌است، که باهم در حال تعادل گرمایی در دمای T می‌باشند.

البته فرض می‌کنیم که

$$\frac{E_r}{E^{(\circ)}} = (1- \frac{E'_r}{E^{(\circ)}}) << 1 \qquad (۷-۱)$$

باشد . هرگاه $\Omega'(E'_r)$ تعداد حالات منبع گرمایی با انرژی E'_r باشد احتمال یافتن دستگاه با انرژی E_r متناسب با $\Omega'(E'_r)$ است . یعنی

$$P_r \quad \alpha \quad \Omega'(E'_r) = \Omega'(E^{(\circ)} - E_r) \qquad (۸-۱)$$

با استفاده از شرط (۱-۷) می‌توان نوشت .

$$Ln\ \Omega'(E'_r) = Ln\ \Omega'(E^{(\circ)}) + (\frac{\partial}{\partial E'_r} Ln\Omega')_{E'_r=E^{(\circ)}} (-E_r) + ...$$

$$= Ln\ \Omega'(E^{(\circ)}) - \beta E_r \qquad (۹-۱)$$

که در آن β بدین صورت تعریف می‌شود

$$\beta = [\frac{\partial}{\partial E} Ln\ \Omega(E)]_{N,V} \qquad (۱۰-۱)$$

از (۱-۸) و (۱-۱۰) نتیجه زیر بدست میآید .

$$P_r \ \alpha \ \ exp\ (-\beta E_r) \qquad (۱۱-۱)$$

با توجه به شرط بهنجارش

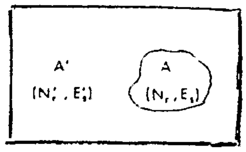
$$\sum_r P_r = 1 \qquad (۱۲-۱)$$

داریم؛

$$P_r = \frac{exp(-\beta E_r)}{\sum_r exp\ (-\beta E_r)} \quad (۱۳-۱)$$

همانطوریکه دیدیم در مجتمع بندادی بین دستگاه و منبع گرمایی تنها انرژی مبادله میشود . اما در مجتمع **بزرگ‌بندادی**، علاوه بر مبادله انرژی ، مبادله ذرات بین دستگاه و منبع را در حال تعادل گرمایی داریم . در این مجتمع ، دما و پتانسیل شیمیایی دستگاه و منبع در حال تعادل هستند .

با توجه به شکل (۱-۲)



شکل ۱-۲) دستگاه آماری A در منبع انرژی ـ ذرات A' قرار دارد .

داریم :

$$N_r + N'_r = N^{(\circ)} \quad (۱۴-۱)$$

$$E_s + E'_s = E^{(\circ)} \quad (۱۵-۱)$$

در رابطه‌های (۱-۱۴) و (۱-۱۵) ، N_r تعداد ذرات دستگاه ، N'_r تعداد ذرات منبع گرمایی ، E_s انرژی دستگاه ، E'_s انرژی منبع گرمایی میباشند و تمام این پارامترها متغیر هستند.اما $N^{(\circ)}$ و $E^{(\circ)}$ که تعداد ذرات کل و انرژی کل مجموعه میباشند ثابت می‌مانند .

با توجه به فرضیات

$$۱ - \frac{E'_s}{E^{(\circ)}} = \frac{E_s}{E^{(\circ)}} << ۱ \quad (۱۶-۱)$$

$$۱ - \frac{N'_r}{N^{(\circ)}} = \frac{N_r}{N^{(\circ)}} << ۱ \quad (۱۷-۱)$$

میتوانیم کاری شبیه به معادله (۱-۹) انجام دهیم . بدین ترتیب که هرگاه تعداد میکرو حالتهای منبع گرمایی با احتمال یافتن دستگاه درانرژی E_s و تعداد ذرات Nr متناسب باشد یعنی

$$P_{r,s}\alpha\,\Omega'(N^{(\circ)}-N_r,E^{(\circ)}-E_s)=\Omega'(\mathbf{E'_s},\mathbf{N'_r}) \qquad (۱۸-۱)$$

میتوانیم $Ln\,\Omega'(E_s',N_r')$ را پیرامون $E_s'=E(\circ)$ و $N_r'=N(\circ)$ بسط دهیم

$$Ln\,\Omega(E'_s,N'_r)=Ln\Omega'(E^{(\circ)},N^{(\circ)})+\left(\frac{\partial Ln\,\Omega'}{\partial N'}\right)_{N'=N^{(\circ)}}(-N_r)+\left(\frac{\partial Ln\,\Omega'}{\partial E'}\right)_{E'=E^{(\circ)}}(-E_s)+\ldots$$

$$=\;Ln\,\Omega'\left[E^{(\circ)},N^{(\circ)}\right]-\alpha N_r-\beta E_s+\ldots \qquad (۱۹-۱)$$

در (۱-۱۸) ، $P_{r,s}$ احتمال اینست که دستگاه دارای: انرژی E_s. وتعداد ذرات N_r باشد.

از (۱-۱۸) و (۱-۱۹) ، $P_{r,s}$ بدست می‌آید.

$$P_{r,s}\;\propto\;exp(-\alpha N_r-\beta E_s) \qquad (۲۰-۱)$$

که در آن α , β به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial N}Ln\,\Omega\right)_{V,E}$$

$$\beta=\left(\frac{\partial}{\partial E}Ln\,\Omega\right)_{N,V} \qquad (۲۱-۱)$$

با توجه به شرط بهنجارش

$$\sum_{r,s}P_{r,s}=۱ \qquad (۲۲-۱)$$

$P_{r,s}$ برابر است با

$$P_{r,s}=\frac{exp(-\alpha N_r-\beta E_s)}{\sum_{r,s}exp(-\alpha N_r-\beta E_s)} \qquad (۲۳-۱)$$

۱-۲) دستگاهی با ذرات تمییز ناپذیر

قبل از بررسی آمار بوز-اینشتین توضیح اجمالی در مورد ذرات بوزون ارائه خواهیم کرد . بوزونها ذراتی با اسپین صحیح میباشند.تمام این ذرات یکسان بوده و با تابع موج متقارن توصیف میشوند.

همچنین از آمار بوز-اینشتین پیروی می‌کنند .

با حل معادلهٔ شرودینگر تابع موج کل یا میکروحالت دستگاه بوزونی را بدست میآوریم . باتوجه به این نکته که هامیلتونی ذرات مستقل از هم بوزون با حاصل جمع هامیلتونی تک تک ذرات برابر است

$$H(p,q) = \sum_{i=۱}^{N} H_i(q_i, p_i) \tag{۲۴-۱}$$

معادلهٔ شرودینگر چنین دستگاهی عبارتست از .

$$H(p,q) \quad \Psi_E(q) = E\Psi_E(q) \tag{۲۵-۱}$$

در رابطه (۱-۲۴) ، $H_i(p_i,q_i)$ هامیلتونی تک ذره آزاد میباشد که برابر است با

$$H_i(q_i, p_i) = \frac{P_i^{۲}}{۲m} \tag{۲۶-۱}$$

پس معادله شرودینگر برای تک ذره عبارتست از

$$H_i U_{\varepsilon_i}(q_i) = \varepsilon_i U_{\varepsilon_i}(q_i) \tag{۲۷-۱}$$

باتوجه به (۱-۲۷) و (۱-۲۴) و (۱-۲۵) ، $\Psi_E(q)$ بدست می‌آید

$$\Psi_E(q) = \prod_{i=۱}^{N} U_{\varepsilon_i}(q_i) \tag{۲۸-۱}$$

که در آن

$$E = E_۱ + \dots + E_N \tag{۲۹-۱}$$

همچنین داریم

$$E = \sum n_i \varepsilon_i \tag{۳۰-۱}$$

$$\sum n_i = N \tag{۳۱-۱}$$

در رابطه (۱-۳۰) و (۱-۳۱) ، n_i عبارتست از تعداد ذرات با انرژی ε_i؛ با قراردادن i و n بجای q_n و ε_i، ویژه تابع $U_{\varepsilon_i}(q_n)$ بدین بصورت نوشته میشود.

$$U_i(n) = U_{\varepsilon_i}(q_n) \tag{۳۲-۱}$$

$$\Psi_E(q)=\prod_{m=۱}^{n_۱} U_۱(m) \prod_{m=n_۱+۱}^{n_۱+n_۲} U_۲(m)\ \ldots \qquad (۳۳-۱)$$

باتوجه به اینکه تابع موج کل دستگاه بوزونی متقارن است و همچنین این ذرات تمیز ناپذیرند ، با تعویض مکان دوذره تابع موج کل دستگاه بدون تغییر میماند . در نتیجه برای دستگاه بوزونی تابع موج بولتزمن یا تابع موج (۱-۳۳) مناسب نیست زیرا در این تابع موج ، ذرات تمیز پذیر بوده و از اینرو با جابجایی مکان ذرات تابع موج تغییر میکند .

حال عملگر جایگشتی P را در نظر میگیریم که هربار روی تابع موج دستگاه عمل میکند. جایگشتهای مختلف تابع موج را بدست میدهد . مثلاً اگر عملگر P روی حاصلضرب توابع موج دوذره عمل کند مختصات این دو ذره عوض خواهد شد . پس می‌توان گفت در دستگاهی با N بوزون میتوان تعداد $N!$ جمله را طوری باهم جمع کرد که این جمع متقارن بماند . زیرا این جملات همان $N!$ جایگشت مختصات مربوط به N ذره تمیز پذیر میباشد.

در نوشتن تابع موج متقارن با استفاده از تابع موج بولتزمن میتوان از جمع بندی روی تمام Pها کمک گرفت و تابع موج بوزونی را نوشت . همانطوریکه میدانیم تعداد این جملات $N!$ میباشد.در نتیجه بعلت متقارن بودن تابع موج بوزونها داریم

$$P\Psi=\Psi \qquad (۳۴-۱)$$

اما در نوشتن تابع موج پاد متقارن مربوط به فرمیونها ، اگر تعداد جایگشتها زوج باشد داریم

$$P\Psi=\Psi \qquad (۳۵-۱)$$

در غیراینصورت

$$P\Psi=-\Psi \qquad (۳۶-۱)$$

خواهد شد

تابع موج متقارن Ψ_S و تابع موج پاد متقارن Ψ_A بصورت زیر نوشته میشوند .

$$\Psi_s(q)\ =const \sum_{p=۱}^{N_1} P\Psi_{Boltz}(q) \qquad (۳۷-۱)$$

$$\Psi_A(q) = const \sum_{P=1}^{N!} \delta_p P \Psi_{Boltz}(q) \qquad (۱-۳۸)$$

که درآن

$$\Psi_{Boltz}(q) = \prod_{i=1}^{N} U_i(q_i) = \prod_{m=1}^{n_1} U_1(m) \prod_{m=n_1+1}^{n_1+n_2} U_2(m) \ldots$$

$$\delta_P = \begin{cases} 1 & \text{اگر } P \text{ زوج باشد} \\ -1 & \text{اگر } P \text{ فرد باشد} \end{cases} \qquad (۱-۳۹)$$

شکل دیگر تابع موج Ψ_A به صورت دترمینان اسلاتر نوشته میشود.

$$\Psi_A = const \begin{vmatrix} U_1(1) & U_1(2) & \ldots & U_1(N) \\ U_2(1) & U_2(2) & \ldots & U_2(N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_N(1) & \ldots & \ldots & U_N(N) \end{vmatrix} \qquad (۱-۴۰)$$

حاصلضرب عناصر قطر دترمینان بالا همان تابع موج بولتزمن میباشد .

با تعویض جای دو ستون ازدترمینان بالا علامت جبری Ψ_A تغییر میکند.همچنین در (۱-۴۰) اگر دو ذره دارای تابع موج یکسان باشند Ψ_A صفر میشود که این اصل طرد پائولی را تأیید میکند.

۱-۳) ماتریس چگالی ، تابع پارش ذرات آزاد

تابع توزیع احتمال (۱-۱۳) را به شکل دیگر هم میتوان نوشت

$$P_r = \frac{exp\ (-\ \beta\ E_r)}{Q_N\ (V\ ,\ T)} \qquad (۱-۴۱)$$

که در آن $Q_N\ (V,T)$ تابع پارش دستگاه است و به صورت زیر تعریف میشود .

$$Q_N\ (V,\ T)\ =\ \sum_r exp\ (-\beta\ E_r)$$

علت نامگذاری $Q_N\ (V,T)$ به تابع پارش آن است که $Q_N\ (V,T)$ به صورت حاصلضرب عوامل مستقل از هم نوشته میشود. یعنی

$$Q_N\ (V,T) = q_1\ (V,T)\ q_2\ (V,T) \ldots \qquad (۱-۴۳)$$

در ترمودینامیک بجای استفاده مستقیم از $Q_N(V,T)$ از لگاریتم آن استفاده میشود.

$$Ln\ Q_N\ (V, T) = \sum_i Lnq_i (V,\ T) \qquad (۴۴-۱)$$

حال مجتمعي را در نظر میگیریم که داری Mدستگاه مساوی میباشد. برای تمام این دستگاهها عملگر هامیلتونی $\hat{H}$ دارای شکل یکسانی است .

تابع موج دستگاه kام عبارتست از

$$\Psi^k(\vec{r}_i ,t) \quad , \quad k = 1, \ldots , M \qquad (۴۵-۱)$$

که درآن r_iمکان دستگاه و tزمان آنرا نشان میدهد . $\Psi^k\ (\vec{r}_i,t)$ جواب معادله وابسته به زمان شرودنیگر است

$$\hat{H}\,\Psi^k(t) = i\hbar\,\dot{\Psi}^k\,(t)$$

هرگاه φ_nها تشکیل مجموعه کاملی رابدهند ، در آن صورت :

$$\Psi^{(k)}(t) = \sum_n a_n^{(k)}\ (t)\ \varphi_n \qquad (۴۷-۱)$$

$$a_n^{(k)}(t) = \int \overset{*}{\varphi}_n\ \Psi^k\ (t)dv \qquad (۴۸-۱)$$

$$\int \overset{*}{\varphi}_m \varphi_n\ dv = \delta mn \qquad (۴۹-۱)$$

در روابط بالا $\dot{\Psi}^{(k)}(t)$ مشتق زمانی $\Psi^k(t)$ و dvعنصر حجم در فضای مکان میباشند . حال اگر از رابطهٔ(۱-۴۸) نسبت به زمان مشتق بگیریم . خواهیم داشت

$$i\hbar\,\dot{a}_n^{(k)}\ (t) = i\hbar \int \overset{*}{\varphi}_n \dot{\Psi}^{(k)}\ (t)\ dv$$

$$= \int \varphi_n^* \hat{H}\,\Psi^{(k)}\ (t)\ dv$$

$$= \int \varphi_n^*\ \hat{H}[\sum_m a_m^k (t)\ \varphi_n\ ]\ \ dv$$

$$= \sum H_{nm}\ a_n^{(k)}\ \ (t) \qquad (۵۰-۱)$$