دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

مترهای فینسلری با انحنای لندزبرگی خاص

استاد راهنما

دکتر بهزاد نجفی

استاد مشاور

دکتر اکبر طیبی

نگارش

عادل جرفی

تیر ماه ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم

به دو محمدم

حسین و امین

و همسر عزیزم

تقدیر و تشکر

منت خدای را عزوجل که به من نعمت آموختن ارزانی داشت، و همیشه با الطاف بی‌کران خویش مرا مورد عنایت قرار داد.

در آغاز از پدر و مادرم و از همسر مهربانم که رنج و مشقت دو سال تحصیل مرا تحمل کرد بی‌اندازه سپاس گزاری می‌نمایم.

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر بهزاد نجفی به دلیل راهنمایی‌های ارزشمندشان در طول این دوره به ویژه در نگارش این پایان نامه تشکر و قدردانی می‌نمایم. همچنین از اساتید گرانقدر جناب آقایان دکتر اکبر طیبی استاد مشاور، دکتر اسماعیل پیغان و دکتر رحیم علیزاده به خاطر قبول داوری این مجموعه کمال تشکر را دارم.

در پایان از کلیه دوستان وعزیزانی که مرا یاری و همراهی کرده‌اند سپاس گزاری می‌نمایم.

چکیده

در این پایان نامه به مطالعه دسته‌هایی از مترهای فینسلری شامل P–کاهشی و لندزبرگی ایزوتروپیک نسبتاً عمومی به عنوان حالت خاص می‌پردازیم، و نشان می‌دهیم روی منیفلد فینسلری فشرده، این دسته از مترهای فینسلری همان مترهای راندرزی هستند. سپس دسته‌ای از این مترها را که دارای انحنای پرچمی اسکالر بوده بررسی کرده و شرایطی را بیان می‌کنیم که تحت آنها دسته مذکور به مترهای راندرزی تبدیل شوند.

کلمات کلیدی: مترهای راندرزی، انحنای پرچمی، مترهای لندزبرگی، P–کاهشی

فهرست مطالب

مقدمه

هندسه‌ی فینسلری یکی از شاخه‌های مهم ریاضیات است که نخستین بار در سال ۱۹۱۸ توسط پائل فینسلر آلمانی [۱] معرفی شد. بعد از فینسلر در اواسط سال ۱۹۲۰ بروالد [۲]، سینژ [۳]و تیلور [۴]نظریه‌ی فضای فینسلری را به عنوان تعمیم طبیعی فضای ریمانی گسترش دادند. در سال‌های اخیر شاهد پیشرفت‌های چشمگیری در مطالعات فضای فینسلری می‌باشیم. بخشی از این پیشرفت‌ها در زمینه‌ی فضای فینسلری با انحنای ثابت، انحنای اسکالر، انحنای ایزوتروپیک و انحنای لندزبرگ است.

مترهای فینسلری علاوه بر دوری از فضاهای اقلیدسی از فضاهای ریمانی نیز دوری دارند. برای سنجش میزان دوری فضاهای فینسلری از فضاهای ریمانی کمیت‌هایی موسوم به انحناهای غیر ریمانی، یعنی کمیت‌هایی که برای فضاهای ریمانی صفر می گردند، تعریف شده‌اند.

پایان نامه حاضر براساس مقاله زیرنوشته شده است.

Tayebi, A. Peyghan, E., *Finsler metric with special Landsberg curvature*, IJST, Trans. A. (2009), 241-248.

چارچوب پایان نامه به شرح زیر می‌باشد:

در فصل اول به بیان مفاهیم مقدماتی می‌پردازیم. در فصل دوم تعاریفی از بعضی کمیت‌های غیر ریمانی و ریمانی آورده شده است. در فصل سوم متر راندرزی و برخی خواص آن توضیح داده می‌شود. فصل چهارم به بررسی انحنای لندزبرگی خاص اختصاص یافته است.

[۱] Paul Finsler
[۲] Berwald
[۳] Synge
[۴] Taylor

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

قراردادهای زیر در پایان نامه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۱) قرارداد جمع بندی اینشتین به این معنا که اگر در فرمولی اندیس بالا و پایین برابر باشد جمع بستن روی آن اندیس در دامنه تغییرات آن اندیس است. به طور مثال $y^iF_{y^i} = \Sigma_{i=1}^{n} y^iF_{y^i}$.

۲) در این پایان نامه از التصاق بروالد[1] استفاده شده است. همچنین "|" و "." به ترتیب نمایش مشتق های کواریان افقی و عمودی نسبت به این التصاق می‌باشد.

۱.۱ مترهای فینسلری

هندسه فینسلری خانواده‌ای از نرم‌های مینکوفسکی روی یک فضای مماس است که فضایی کلی‌تر از فضای ضرب داخلی(هیلبرت) تشکیل می‌دهد.

تعریف ۱.۱. یک نرم مینکوفسکی روی فضای برداری V با بعد متناهی یک تابع $F : V \to [0, +\infty)$ با ویژگی‌های زیر می‌باشد:

۱) $\forall y \in V,\ \ F(y) = 0 \Longleftrightarrow y = 0$.

۲) F همگن از درجه یک نسبت به y باشد. $\forall y \in V, \forall \lambda > 0 \quad F(\lambda y) = \lambda F(y)$.

[1] Berwald connection

۳) F روی $V_0 = V - \{0\}$، C^{∞} است و برای هر بردار $y \in V_0$ فرم دو خطی و متقارن $g_y : V \times V \to \mathbb{R}$ مثبت معین باشد.

$$g_y(u,v) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}[F^2(y+su+tv)]_{s=t=0}.$$

این ضرب داخلی g_y فرم اساسی در جهت y نامیده می‌شود. (V,F) را یک فضای مینکوفسکی می‌گوییم.

نرم اقلیدسی استاندارد $|.|$ روی $\mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|y| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y^i)^2}, \quad y = (y^i) \in \mathbb{R}^n.$$

مثال ۲.۱. *روی $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌کنیم $F(y) := |y| + \langle a, y \rangle$ که در آن $a \in \mathbb{R}^n$ یک بردار ثابت با طول کمتر از واحد است و $|.|$ نرم استاندارد روی $\mathbb{R}^n$ است. دراین صورت F یک نرم مینکوفسکی روی $\mathbb{R}^n$ می باشد.*

تذکر: در مثال بالا برای بررسی شرط $|a| < 1$ کافی است $y = -a$ قرار دهیم، در این صورت: $F(-a) = |-a| + \langle a, -a \rangle = a - |a|^2$. از طرفی طبق تعریف داریم: $F(y) > 0$ بنابراین $a > |a|^2$ پس $|a| < 1$.

طبیعی است که علاوه بر نرم اقلیدسی، نرم‌های غیراقلیدسی نیز روی یک فضای برداری وجود دارند. گیریم $\alpha = \sqrt{a_{ij}y^iy^j}$ یک نرم اقلیدسی روی فضای برداری V و $\beta = b_iy^i \in V^*$ یک تابعک خطی روی V باشد. قرار می‌دهیم:

$$F := \alpha(y) + \beta(y). \tag{1.1}$$

این نرم، نرم راندرزی نامیده می‌شود که در فصل سوم نیز به آن اشاره شده است.

با استفاده از نرم اقلیدسی $\alpha = \sqrt{a_{ij}y^iy^j}$ و یک فرم $\beta = b_iy^i$ روی یک فضای برداری V

می‌توان نرم‌های مینکوفسکی بسیاری را ساخت و تعریف کرد. به عنوان مثال (α, β)-نرم‌ها را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$F = \alpha\phi(\frac{\beta}{\alpha}).$$

که در آن تابع $\phi = \phi(s)$ یک تابع C^∞ مثبت روی بازه متقارن $I = [-r, r]$ است و $r \geq \frac{\beta}{\alpha}$. تابع $F = \alpha\phi(\frac{\beta}{\alpha})$ همگن از درجه یک و مثبت می‌باشد. فرض کنیم $b := \|\beta\|_\alpha < r$(شرط مثبت معین بودن) و ماتریس g_{ij} برابر است با:

$$g_{ij} = \rho a_{ij} + \rho_0 b_i b_j + \rho_1(b_i\alpha_j + b_j\alpha_i) - s\rho_1\alpha_i\alpha_j,$$

که در آن $\alpha_i = \alpha_{y_i}$ و $\rho = \phi^2 - s\phi\phi', \ \ \rho_0 = \phi\phi'' + \phi'\phi', \rho_1 = -s(\phi\phi'' + \phi'\phi') + \phi'\phi'$
که در آن $s := \frac{\beta}{\alpha}$ و $|s| \leq b < r$.
فرمول زیر را برای $\det(g_{ij})$ بدست می‌آوریم:

$$\det(g_{ij}) = \phi^{n+1}(\phi - s\phi')^{n-2}[(\phi - s\phi') + (b^2 - s^2)\phi''] \det(a_{ij}).$$

تذکر: درحالت خاص اگر $\varphi(s) = 1 + s$، آنگاه $F = \alpha + \beta$ همان نرم راندرزی است.
حال متر فینسلر را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳. یک متر فینسلر روی منیفلد M یک تابع $F : TM \to [0, \infty)$ با ویژگی‌های زیر می‌باشد:

۱) F روی $TM_0 = TM - \{0\}$، C^∞ است.

۲) در هر نقطه $x \in M$، تحدید F به T_xM یعنی، $F_x := F|_{T_xM}$ یک نرم مینکوفسکی روی T_xM است. تانسور اساسی متر فینسلری F به صورت زیر است:

$$g_{ij}(x, y) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^j} \qquad (۲.۱)$$

بنابراین متر فینسلر F روی منیفلد M خانواده‌ای از نرم‌های مینکوفسکی $F_x := F(x, \circ)$ روی T_xM است، که به صورت هموار روی M تغییر می‌کند.

تعریف ۴.۱. متر فینسلری F را ریمانی گویند هرگاه g_{ij} ها توابعی فقط بر حسب x باشند.

مثال ۵.۱. *ساده ترین متر فینسلری، متر اقلیدسی است؛ که به صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$\alpha_\circ(x,y) := |y| \qquad , y = (y^i) \in T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$$

مثال ۶.۱. *ساده ترین مترهای فینسلر غیر ریمانی مترهای راندرزی می‌باشند که به صورت $F := \alpha + \beta$ بیان می‌شوند که در آن $\alpha = \sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ یک متر ریمانی و $\beta = b_i(x)y^i$ یک ۱-فرم می‌باشد که $\|\beta\|_\alpha < ۱$.*

تعریف ۷.۱. اگر دستگاه مختصات موضعی (x) روی M به طوری که بر حسب مختصات موضعی مستقل (x, y) روی TM، $F(x, y)$ تابعی فقط برحسب y باشد، در این صورت فضای حاصل را فضای موضعاً مینکوفسکی می‌نامیم. به عبارت دیگر:

$$F = \sqrt{g_{ij}y^iy^j} = |y|.$$

۱.۱.۱ قضیه اویلر

قضیه ۱.۱. *(قضیه اویلر [۲]) فرض کنیم V یک فضای برداری و $H : V \longrightarrow \mathbb{R}$ مثبت همگن از درجه r باشد؛ به عبارت دیگر:*

$$H(\lambda y) = \lambda^r H(y) \quad \forall \lambda > \circ, \tag{۳.۱}$$

[۲] Euler's theorem

آنگاه $y^iH_{y^i}(y)=rH(y)$ *که در آن* $(y^1,...,y^n)$ *مختصات* $y\in V$ *می‌باشد و*

$$H_{y^i}:=\frac{\partial H}{\partial y^i}.$$

اثبات. با فرض اینکه H در رابطه (۳.۱) صدق می‌کند y را ثابت می‌گیریم. با مشتق‌گرفتن از رابطه (۳.۱) نسبت به λ بدست می‌آوریم:

$$y^iH_{y^i}(\lambda y)=r\lambda^{r-1}H(y).$$

با قرار دادن $\lambda=1$ نتیجه مورد نظر بدست می‌آید.حال بلعکس؛ فرض‌کنیم

$$H(\lambda y)=\lambda^rH(y)\quad\forall\lambda>0,$$

با ثابت در نظرگرفتن y و $\lambda>0$ به‌کمک قاعده زنجیری داریم:

$$\frac{d}{d\lambda}H(\lambda y)=\frac{dH(\lambda y)}{d(\lambda y)}.\frac{d(\lambda y}{d\lambda}=H_{\lambda y}(\lambda y)y=\frac{1}{\lambda}\lambda yH_{\lambda y}(\lambda y)=\frac{1}{\lambda}rH(\lambda y).$$

لذا به معادله دیفرانسیل زیر می‌رسیم:

$$\frac{d}{d\lambda}H(\lambda y)-\frac{r}{\lambda}H(\lambda y)=0.$$

می‌توان معادله اخیر را به صورت زیر نوشت:

$$(\frac{d}{d\lambda})(\frac{H(\lambda y)}{\lambda^r})=0.$$

با حل این معادله خواهیم داشت:

$$H(\lambda y) = c\lambda^r,$$

که در آن c مقداری ثابت است. با فرض ۱ $= \lambda$ مقدار $c = H(y)$ به دست می‌آید. بنابراین $H(\lambda y) = \lambda^r H(y)$ که همگن بودن H را نتیجه می‌دهد. $\square$

نتیجه ۸.۱. *فرض کنیم (M, F) یک منیفلد فینسلری باشد. آنگاه*

$$y^i F_{y^i} = F, \tag{۴.۱}$$

$$y^i F_{y^i y^j} = 0, \tag{۵.۱}$$

$$y^i F_{y^i y^j y^k} = -F_{y^j y^k}. \tag{۶.۱}$$

اثبات. همگن بودن F از درجه یک رابطه اول را نتیجه می‌دهد. با مشتق‌گیری از رابطه اول نسبت به y^j داریم:

$$\delta^i_j F_{y^i} + y^i F_{y^i y^j} = F_{y^j}.$$

لذا رابطه دوم نیز به دست می‌آید. رابطه سوم نیز با مشتق‌گیری از رابطه دوم نسبت به y^k نیز به همین صورت به دست می‌آید. $\square$

تعریف ۹.۱. برای بردار ناصفر $y \in T_xM_0$، F ازیک ضرب داخلی روی T_xM القا می‌شود، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g_y(u, v) := g_{ij}(x, y)u^i v^j, \tag{۷.۱}$$

که g_y فرم اساسی روی T_pM، فرم دو خطی متقارن است و

$u = (u^1, ..., u^n) \in T_pM$ و $v = (v^1, ..., v^n) \in T_pM.$

با انقباض(۲.۱) در y^i و y^j خواهیم داشت:

$$g_{ij}y^iy^j = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial^j}y^iy^j$$

حال چون F^2 همگن از درجه دو است، $\dfrac{\partial F^2}{\partial y^j}$ همگن از درجه یک خواهد بود و بنابر قضیه اویلر نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\partial}{\partial y^i}(\frac{\partial F^2}{\partial y^j})y^i = \frac{\partial F^2}{\partial y^j},$$

و $\dfrac{\partial F^2}{\partial y^j}y^j = 2F^2$. بنابراین:

$$F^2 = g_{ij}y^iy^j. \tag{۸.۱}$$

اگر در رابطه (۷.۱) قرار دهیم $u = v = y$ آنگاه:

$$g_y(y,y) = g_{ij}y^iy^j = F^2.$$

گیریم:

$$l^i = \frac{y^i}{F}, \tag{۹.۱}$$

که $l^i = l^i(x,y)$ میدان های برداری روی TM_0 می‌باشند. در این صورت از رابطه (۸.۱) نتیجه می‌شود که $g_{ij}l^il^j = 1$. حال گیریم:

$$l_i = F_{y^i} = \frac{\partial F}{\partial y^i}, \tag{۱۰.۱}$$

آنگاه بنابر قضیه اویلر داریم: $l_i y^i = \frac{\partial F}{\partial y^i} y^i = F$. لذا از (۹.۱) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$l_i l^i = 1. \tag{۱۱.۱}$$

گیریم $y_i = g_{ij} y^j$، آنگاه از (۲.۱) خواهیم داشت:

$$g_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial^j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^i}(\frac{\partial F^2}{\partial y^j}) = \frac{\partial}{\partial y^i}(F\frac{\partial F}{\partial y^j}) = \frac{\partial F}{\partial y^i}\frac{\partial F}{\partial y^j} + F\frac{\partial F^2}{\partial y^i \partial y^j}, \tag{۱۲.۱}$$

حال با انقباض g_{ij} با y^j و استفاده از خاصیت همگنی F داریم: $g_{ij} y^j = F\frac{\partial F}{\partial y^i}$.
از طرفی $y_i = g_{ij} y^j$، لذا

$$y_i = F F_{y^i} = F\frac{\partial F}{\partial y^i}. \tag{۱۳.۱}$$

از (۱۰.۱) نتیجه می‌شود که: $l_i = \frac{y_i}{F}$؛ علاوه بر این:

$$y_i y^i = F^2. \tag{۱۴.۱}$$

مثال ۱۰.۱. *روی $\mathbb{R}^n$ تابع $F(x,y) := |y| + \langle x,y \rangle$ را در نظر می‌گیریم که در آن $|.|$ نرم استاندارد و $\langle , \rangle$ ضرب داخلی اقلیدسی روی $\mathbb{R}^n$ است. در این صورت F یک متر فینسلر روی $\mathbb{R}^n$ می‌باشد.*

مثال ۱۱.۱. *فرض کنیم $\mathbb{B}^n$ گوی واحد نسبت به نرم استاندارد روی $\mathbb{R}^n$ است. تعریف می‌کنیم*

$$F := \frac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - \langle x,y \rangle^2)} + \langle x,y \rangle}{1 - |x|^2} \quad y \in T_x\mathbb{B}^n \cong \mathbb{R}^n,$$

که در آن $\langle . \rangle$ ضرب داخلی اقلیدسی روی $\mathbb{B}^n$ می‌باشد. $F = F(x,y)$ یک متر فینسلر روی $\mathbb{B}^n$ است. F را متر فانک روی $\mathbb{B}^n$ می‌نامیم.

تذکر: اکادا در سال ۱۹۸۳ برای متر فانک ثابت کرد که:

$$F_{x^i} = F F_{y^i}. \tag{۱.۱۵}$$

از طرف دیگر:

$$F_{x^k y^i} y^k = F_{x^i}. \tag{۱.۱۶}$$

می‌توان به هر متر فینسلر F یک تابع فاصله d_F با ویژگی‌های زیر نظیر کرد:

$$d_F : M \times M \longrightarrow \mathbb{R},$$

۱) $d_F(p,q) = 0 \Longleftrightarrow p = q$ ، $\forall p,q,r \in M$

۲) $d_F(p,q) \leq d_F(p,r) + d_F(r,q)$.

اگر $F : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ یک مترفینسلر باشد، آنگاه می‌توانیم طول منحنی ها و در نتیجه فاصله نقاط را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\pounds(c) := \int_a^b F(c(t), \dot{c}(t))dt,$$
$$d_F(p,q) := \inf\{\pounds(c) | c : [a,b] \longrightarrow M\}.$$

حال طول منحنی هموار $C \subseteq M$ که با نگاشت $c = c(t)$ و $a \leq t \leq b$ پارامتری شده است را

در یک منیفلد فینسلری (M,F) به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\pounds_F(C) := \int_a^b F(c(t),\dot{c}(t))dt.$$

تعریف ۱۲.۱. متر فینسلر F را برگشت پذیر می‌نامیم هر گاه برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $F(\lambda y) = |\lambda| F(y)$ که معادل است با اینکه برای هر $y \in V$، $F(-y) = F(y)$.

مثال ۱۳.۱. *مترهای ریمانی همه برگشت پذیرند.*

مثال ۱۴.۱. *فرض‌کنیم $a \in \mathbb{R}^n$ یک بردار ثابت با طول کمتر از واحد است. قرار می‌دهیم:*

$$F_a(x,y) := \frac{\sqrt{|y|^۲ - (|x|^۲|y|^۲ - \langle x,y\rangle^۲)}}{۱ - |x|^۲} + \frac{\langle x,y\rangle}{۱ - |x|^۲} + \frac{\langle a,y\rangle}{۱ + \langle a,x\rangle}.$$

F_a را متر فانک تعمیم یافته می‌نامیم. اگر $a = ۰$ آنگاه F_a همان متر فانک خواهد بود. این متر برگشت پذیر نیست.

تعریف ۱۵.۱. فرض‌کنیم (V,F) یک فضای مینکوفسکی باشد. قرار می‌دهیم:

$$S_F := \{y \in V | F(y) = ۱\}.$$

S_F یک ابررویه حول مبدأ است که دیفئومورف با کره استاندارد $S^{n-۱} \subset \mathbb{R}^n$ می‌باشد. S_F شاخص [۳] F نامیده می‌شود.

مثال ۱۶.۱. *برای نرم مینکوفسکی $F = \sqrt{(y^۱)^۲ + (y^۲)^۲} - \frac{۱}{۲} y^۱$ شاخص F را بررسی*

[۳] Indicatrix

می‌کنیم. با محاسبه مشاهده می‌کنیم که:

$$S_F = \left\{ (y^۱, y^۲) \in \mathbb{R}^۲ | \frac{(y^۱ - \frac{۲}{۳})^۲}{\frac{۱۶}{۹}} + \frac{(y^۲)^۲}{\frac{۴}{۳}} = ۱ \right\}.$$

حال اگر (M, F) منیفلد فینسلری باشد و به ازای $x \in M$ قرار دهیم:

$$(S_F)_x := \{y \in T_xM | F(y) = ۱\}.$$

در اینجا $(S_F)_x$ یک ابررویه دیفئومورف با کره استاندارد $S^{n-۱} \subset \mathbb{R}^n$ است که آن را شاخص F در $x \in M$ می‌نامیم و $S_F := \cup_{x \in M}(S_F)_x$ را شاخص F می‌نامیم.

تعریف ۱.۱۷. به ازای بردار ناصفر $y \in T_pM$ و بردارهای دلخواه $u, v \in T_pM$ تعریف می‌کنیم:

$$h_y(u, v) := g_y(u, v) - F^{-۲}(y) g_y(y, u) g_y(y, v), \tag{۱.۱۷}$$

و $h = \{h_y\}$ را متر زاویه‌ای F می‌نامیم.
در مختصات موضعی، متر زاویه‌ای به صورت زیر است:

$$h_{ij} = g_{ij} - l_i l_j. \tag{۱.۱۸}$$

لم ۱.۲. *شرایط زیر برای متر زاویه‌ای برقرار است:*

$$h_{ij} = FF_{ij}, \tag{۱۹.۱}$$

$$h_i^i = n - ۱, \tag{۲۰.۱}$$

$$h_i^k = \delta_i^k - l_i l^k. \tag{۲۱.۱}$$

اثبات. فقط رابطه اول را ثابت می‌کنیم، اثبات بقیه روابط بدیهی است. با قراردادن روابط (۱۰.۱) و (۱۲.۱) در (۱۸.۱) بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} h_{ij} &= FF_{y^iy^j} + F_{y^i}F_{yj} - F_{y^i}F_{yj} \\ &= FF_{y^iy^j}. \end{aligned}$$

□

تعریف ۱۸.۱. فرض کنیم M یک منیفلد $n-$بعدی باشد. یک اسپری روی M یک میدان برداری C^∞ روی $TM_\circ$ است که در دستگاه مختصات موضعی (x^i, y^i) به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - ۲G^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \tag{۲۲.۱}$$

که در آن توابع G^i همگن مثبت از درجه دو می‌باشند و ضرایب اسپری G نامیده می‌شوند.

مثال ۱۹.۱. *هر متر فینسلر $F = F(x,y)$ روی منیفلد M، یک اسپری القا می‌کند که ضرایب آن عبارتند از:*

$$G^i = \frac{۱}{۴} g^{il} \left\{ [F^۲]_{x^m y^l} y^m - [F^۲]_{x^l} \right\}. \tag{۲۳.۱}$$

تعریف ۲۰.۱. فرض کنیم $F = F(x,y)$ یک متر فینسلر روی یک زیر مجموعه باز $U \subset R^n$