

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک
پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

شبیه سازی مستقیم عددی جریان اختلاطی با شرایط مرزی آزاد خروجی با استفاده از روش تفاضل محدود فشرده

استاد راهنما:

دکتر محمد جواد مغربی

دانشجو:

امیر محمدی ویسرودی

زمستان ۱۳۸۸



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مکانیک

گروه تبدیل انرژی

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای امیر محمدی ویسرودی

تحت عنوان:

شبیه سازی مستقیم عددی جریان اختلاطی با شرایط مرزی آزاد خروجی با استفاده از روش تفاضل محدود فشرده

در تاریخ ۸۸/۱۲/۱۸ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه عالی مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی: دکتر محمد جواد مغربی
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی: دکتر محمد محسن شاه مزرگان
	دکتر مجتبی قطعی		نام و نام خانوادگی: دکتر علی جباری مقدم
			نام و نام خانوادگی:

حقیقت انسان به آنچه اظهار می کند نیست بلکه
حقیقت او، نهفته در آن چیزی است که از اظهار آن
عاجز است، بنابراین اگر خواستی او را بشناسی نه به
گفته هایش بلکه به ناگفته هایش گوش کن!

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

که در تمامی این سالها حامی من بودند.

تقدیر و تشکر

ضمن سپاس بیکران خداوند، لازم می‌دانم از تمامی اساتیدی که در این مدت افتخار شاگردی ایشان را داشتم، بویژه استاد محترم جناب آقای دکتر محمد جواد مغربی که با ارائه راهنمایی‌های مدبرانه، نظارت و سرپرستی این پایان‌نامه را به عهده داشتند، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. همچنین جای دارد از دوستان گرامی خود، آقایان مهندس حمید رضا سنندجی، مهندس احد ضرغامی، مهندس بابک حقیقی و مهندس داود رجبی ویسرودی نیز تشکر نمایم و از درگاه خداوند طلب موفقیت در تمامی مراحل زندگی را برای ایشان خواستارم.

امیر محمدی ویسرودی

a.visroodi@gmail.com

زمستان ۱۳۸۸

چکیده

جریان اختلاطی صفحه‌ای در نتیجه یکی شدن دو جریان موازی سیال، که دارای سرعت‌های مختلف می‌باشند بوجود می‌آید. این دو جریان در انتهای یک صفحه جداکننده، که فرض می‌شود دارای ضخامت ناچیزی می‌باشد با هم مخلوط می‌شوند. در پایین دست این تلاقی، انتقال مومنوم بین دو جریان سیال صورت می‌گیرد. لایه اختلاطی در واقع به ناحیه‌ای که در آن فرایند یکی شدن اتفاق می‌افتد اطلاق می‌گردد.

در این تحقیق معادله بی بعد شده ناویر-استوکس در فرم چرخشی برای جریان اختلاطی دو بعدی و تراکم ناپذیر با شرط مرزی آزاد خروجی به روش مستقیم عددی شبیه سازی (DNS) شده است. معادلات دیفرانسیل حاکم با استفاده از روش اختلاف محدود فشرده لایه [5] در جهات جریان (x) و عمود بر جریان (y) گسسته شده اند.

از نگاشت $y = -\beta \cot(\pi\zeta)$ جهت مرتبط نمودن دامنه فیزیکی $-\infty \leq y \leq +\infty$ به دامنه محاسباتی $0 \leq \zeta \leq 1$ استفاده شده است. برای توسعه محاسبات در دامنه زمان نیز از روش رانج کوتای فشرده مرتبه سوم استفاده شده است. در مرز خروجی از شرط مرزی آزاد استفاده کرده ایم بدین صورت که معادلات حاکم بر جریان در مرز خروجی نیز صدق می‌کند.

در این تحقیق هر دو جریان اختلاطی آرام و مغشوش مورد بررسی قرار گرفته است. برای مغشوش کردن جریان، یک اغتشاش زمانی بر مولفه سرعت v اعمال شده است. از جواب های تحلیلی غیر ویسکوز (استوارت) و معادله نفوذ وابسته به زمان برای ارزیابی صحت نتایج شبیه سازی استفاده گردیده است. مشخصه های جریان لایه اختلاطی به دست آمده و با نرمال کردن مولفه های سرعت لحظه ای و گردابه های جریان، به وسیله اختلاف سرعت جریان های آزاد و نصف عرض پروفیل سرعت، خاصیت خود تشابهی بررسی شده است.

فهرست مطالب

فصل اول: تاریخچه جریان اختلاطی

- ۱-۱- مقدمه ۱
- ۲-۱- مروری بر تحقیقات انجام شده ۳

فصل دوم: شبیه سازی مستقیم عددی

- ۱-۲- مقدمه ۹
- ۲-۲- تاریخچه ۱۰
- ۳-۲- روش طیفی ۱۱
- ۴-۲- شرایط مرزی ۱۲

فصل سوم: شرایط مرزی آزاد

- ۱-۳- مقدمه ۱۴
- ۲-۳- بررسی چند نمونه از کار های انجام گرفته با شرایط مرزی آزاد ۱۵
- ۱-۲-۳- بررسی جریان سیال در داخل یک کانال با شرط مرزی خروجی ۱۵
- ۲-۲-۳- اعمال شرط مرزی آزاد در مرز های دلخواه خروجی ۱۹
- ۳-۲-۳- جریان های با سطح آزاد ناپایدار ۲۲

فصل چهارم: فرمول بندی ریاضی

- ۱-۴- مقدمه ۲۴
- ۲-۴- معادلات حاکم ۲۵
- ۳-۴- شرایط مرزی ۲۸

۳۱	۴-۴- شرایط اولیه
	فصل پنجم: الگوریتم حل و روش های عددی
۳۳	۱-۵- مقدمه
۳۴	۲-۵- الگوریتم حل
۳۵	۳-۵- محاسبه مشتقات مادی
۴۰	۴-۵- روش محدود کردن γ
۴۲	۵-۵- انتگرال گیری
۴۴	۶-۵- پیشروی در زمان
۴۷	۷-۵- حل معادله پواسون
۴۸	۸-۵- ارزیابی کد و شبیه سازی عددی
۴۸	۱-۸-۵- معادله نفوذ وابسته به زمان
۵۰	۲-۸-۵- گردابه های استوارت
	فصل ششم: جریان لایه اختلاطی آرام
۵۳	۱-۶- مقدمه
۵۶	۲-۶- شبیه سازی جریان لایه اختلاطی آرام
	فصل هفتم: جریان لایه اختلاطی مغشوش
۶۲	۱-۷- مقدمه
۶۴	۲-۷- نتایج شبیه سازی
۷۱	۳-۷- بررسی خود تشابهی و توزیعات تنش رینولدز
۷۹	نتیجه گیری
۸۰	پیشنهادات



۸۱

ضمیمه

۱۰۲

مراجع

فهرست نمودارها

- شکل ۱-۱- شکل شماتیک لایه اختلاطی دو بعدی ۲
- شکل ۱-۳- هندسه جریان داخل کانال و شرایط مرزی آن [6] ۱۵
- شکل ۲-۳- مقایسه سرعت ها با سرعت استاندارد [6] ۱۷
- شکل ۳-۳- پروفیل های سرعت بر حسب ارتفاع کانال [6] ۱۸
- شکل ۴-۳- خطوط جریان داخل کانال وقتی که $x_{end} = 8, 11, 16, 30$ ، به ترتیب، از بالا به پایین [17] ۲۰
- شکل ۵-۳- پروفیل های سرعت U و V در مکان $x = 7$ با x_{end} های مختلف و مقایسه با جواب استاندارد [17] ۲۱
- شکل ۶-۳- سرعت در دیواره های بالایی و پایینی با x_{end} های مختلف و مقایسه با جواب استاندارد [17] ۲۲
- شکل ۷-۳- سه نمونه از جریان با سطح آزاد غیر یکنواخت [8] ۲۳
- شکل ۱-۴- شکل شماتیک لایه اختلاطی دو بعدی توسعه یافته مکانی ۲۵
- شکل ۲-۴- محدوده دامنه محاسباتی و شرایط مرزی ۳۲
- شکل ۱-۵- تقریب مشتق اول تابع $y = 2 \cos(3x) + x^3$ ۳۶
- شکل ۲-۵- مرتبه دقت برای مشتق اول با بکار بردن طرح اختلاف محدود استاندارد [7] ۳۷
- شکل ۳-۵- تقریب مشتق دوم تابع $y = 2 \cos(3x) + x^3$ ۳۹
- شکل ۴-۵- مرتبه دقت برای مشتق دوم با بکار بردن طرح اختلاف محدود استاندارد [7] ۳۹
- شکل ۵-۵- تقریب مشتق اول تابع $f(y) = e^{-y^2}$ با توجه به فشردگی سازی در جهت y با $\gamma = 5, \beta = 1$ ۴۱
- شکل ۶-۵- تقریب مشتق دوم تابع $f(y) = e^{-y^2}$ با توجه به فشردگی سازی در جهت y با $\gamma = 5, \beta = 1$ ۴۲
- شکل ۷-۵- تقریب انتگرال تابع $f'(y) = -2ye^{-y^2}$ با شرایط مرزی $f(y(0)) = f(y(1)) = 0$ که به صورت $f(y) = e^{-y^2}$ می باشد ۴۳
- شکل ۸-۵- حل عددی معادله $\frac{du}{dt} = -u(t)$ با $u(0) = 1$ ۴۶
- شکل ۹-۵- مرتبه دقت طرح پیشروی در زمان برای $\frac{du}{dt} = -u(t)$ با $u(0) = 1$ [7] ۴۶

- شکل ۵-۱۰- ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از زمان ۴۹
- شکل ۵-۱۱- ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از تعداد گره در جهت x ۴۹
- شکل ۵-۱۲- ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از تعداد گره در جهت y ۵۰
- شکل ۵-۱۳- ماکزیمم خطا در u و v برای تست گردابه های استوارت به صورت تابعی از زمان ۵۲
- شکل ۶-۱- پروفیل سرعت در لایه اختلاطی ۵۴
- شکل ۶-۲- هندسه لایه اختلاطی توسعه یافته مکانی [2] ۵۵
- شکل ۶-۳- توزیع سرعت در جریان اختلاطی در دستگاه مختصات خود تشابه در ایستگاههای مختلف [2] ۵۵
- شکل ۶-۴- گذر زمانی U در ۵ فاصله مساوی در طول L_x برای شبیه سازی لایه اختلاطی بدون اغتشاش ورودی ۵۷
- شکل ۶-۵- گذر زمانی V در ۴ فاصله مساوی در طول L_x برای شبیه سازی لایه اختلاطی بدون اغتشاش ورودی ۵۷
- شکل ۶-۶- پروفیل سرعت U در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی لایه اختلاطی بدون اغتشاش ورودی ۵۸
- شکل ۶-۷- پروفیل سرعت U برای نگاشت $y = -\beta \cot(\pi\xi)$ ۵۹
- شکل ۶-۸- پروفیل گردابه ω در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی لایه اختلاطی بدون اغتشاش ورودی ۵۹
- شکل ۶-۹- رشد ضخامت ورتیسیتته در جهت x برای جریان لایه اختلاطی بدون اغتشاش ورودی ۶۰
- شکل ۶-۱۰- نمایش سرعت خط مرکزی U_m در جهت x ۶۱
- شکل ۷-۱- گذر زمانی U در $x = 50$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی همراه با اغتشاش ورودی ۶۵
- شکل ۷-۲- گذر زمانی U در $x = 100$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی همراه با اغتشاش ورودی ۶۵
- شکل ۷-۳- گذر زمانی U در $x = 150$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی همراه با اغتشاش ورودی ۶۶
- شکل ۷-۴- گذر زمانی U در $x = 200$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی همراه با اغتشاش ورودی ۶۶
- شکل ۷-۵- گذر زمانی V در $x = 50$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی همراه با اغتشاش ورودی ۶۷
- شکل ۷-۶- گذر زمانی V در $x = 100$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی همراه با اغتشاش ورودی ۶۷
- شکل ۷-۷- گذر زمانی V در $x = 150$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی همراه با اغتشاش ورودی ۶۸
- شکل ۷-۸- گذر زمانی V در $x = 200$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی همراه با اغتشاش ورودی ۶۸
- شکل ۷-۹- گذر زمانی U در $(x_1, y_1) = (200, 7.8802)$ و $(x_2, y_2) = (20, 7.8802)$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی همراه با اغتشاش ورودی ۶۹
- شکل ۷-۱۰- گذر زمانی V در $(x_1, y_1) = (200, 7.8802)$ و $(x_2, y_2) = (20, 7.8802)$ برای شبیه سازی لایه ۶۹

- ۷۰ شکل ۷-۱۱- نمودار سرعت متوسط برای جریان اختلاطی با اغتشاش ورودی در $y = 0$
- ۷۱ شکل ۷-۱۲- پروفیل سرعت U در مختصات خود تشابه برای شبیه‌سازی لایه اختلاطی همراه با اغتشاش ورودی
- ۷۲ شکل ۷-۱۳- پروفیل سرعت U در مختصات خود تشابه برای شبیه‌سازی لایه اختلاطی همراه با اغتشاش ورودی
- ۷۳ شکل ۷-۱۴- پروفیل سرعت V در مختصات خود تشابه برای شبیه‌سازی لایه اختلاطی همراه با اغتشاش ورودی
- ۷۳ شکل ۷-۱۵- پروفیل گردابه ω در مختصات خود تشابه برای شبیه‌سازی لایه اختلاطی همراه با اغتشاش ورودی
- ۷۴ شکل ۷-۱۶- پروفیل $\sqrt{u'^2} / \Delta U$ بر حسب y در دستگاه مختصات خود تشابه
- ۷۵ شکل ۷-۱۷- پروفیل $\sqrt{u'^2} / \Delta U$ به y / δ_ω در دستگاه مختصات خود تشابه
- ۷۶ شکل ۷-۱۸- پروفیل $\sqrt{v'^2} / \Delta U$ به y / δ_ω در دستگاه مختصات خود تشابه
- ۷۶ شکل ۷-۱۹- پروفیل $\sqrt{u'v'} / \Delta U$ به y / δ_ω در دستگاه مختصات خود تشابه
- ۷۷ شکل ۷-۲۰- مقایسه تنش $(u'v')_{rms}$ با تنش های u'_{rms} و v'_{rms} در $x = 50$
- ۷۸ شکل ۷-۲۱- مقایسه تنش $(u'v')_{rms}$ با تنش های u'_{rms} و v'_{rms} در $x = 150$

فصل اول

تاریخچه جریان اختلاطی

۱-۱- مقدمه

جریان اختلاطی صفحه‌ای^۱ در نتیجه یکی شدن دو جریان موازی سیال، که دارای سرعت‌های مختلف می‌باشند بوجود می‌آید. این دو جریان در انتهای یک صفحه جداکننده^۲، که فرض می‌شود دارای ضخامت ناچیزی می‌باشد با هم مخلوط می‌شوند (شکل ۱-۱). در پایین دست این تلاقی، انتقال مومنوم بین دو جریان سیال صورت می‌گیرد. لایه اختلاطی در واقع به ناحیه ای که در آن فرایند یکی‌شدن^۳ اتفاق می‌افتد اطلاق می‌گردد.

ساختار ساده تشکیل لایه اختلاطی دلیلی بر متعارف بودن این پدیده در طبیعت می‌باشد. در بسیاری از

کاربردهای صنعتی با لایه اختلاطی مواجه می‌شویم. لبه فرار یک ایرفویل، لبه فرار پره توربین، لیزرهای

شیمیایی و کوره‌های احتراق تنها معدود از مواردی هستند که در آنها با پدیده لایه اختلاطی مواجه می‌-

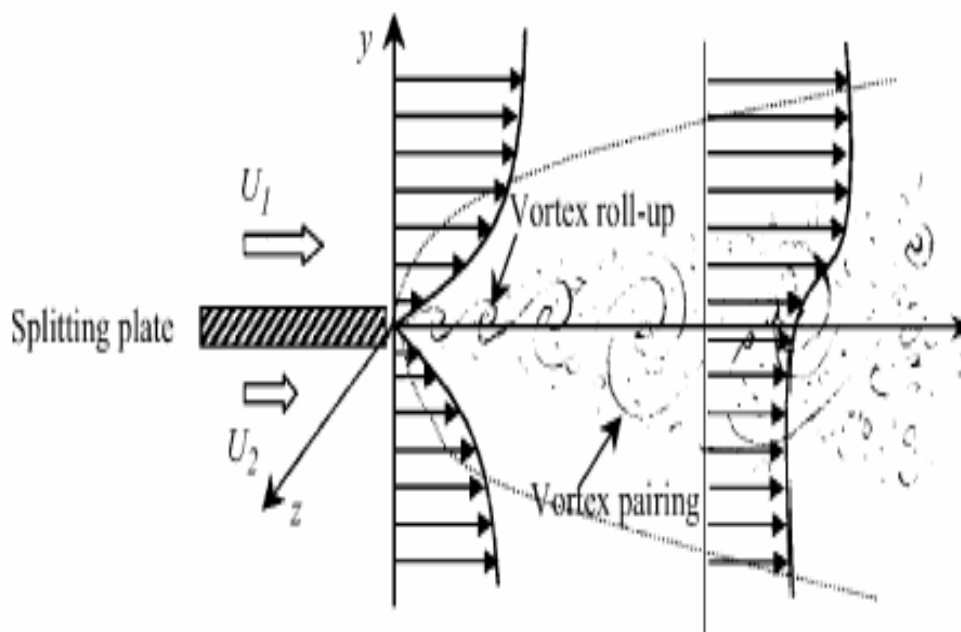
^۱- plane mixing layer

^۲- splitter plate

^۳- merging

شویم. بنابراین فهم دقیق فرایندهای فیزیکی لایه اختلاطی در طراحی بهینه این وسایل نقش بسیار مهمی

دارد [4].



شکل ۱-۱ شکل شماتیک لایه اختلاطی دو بعدی [۲۵].

از بعضی از پارامترها بصورت عمومی برای مشخص کردن خصوصیات این جریان استفاده می‌شود. یکی

از این پارامترها نسبت سرعت جریان‌های آزاد^۱ بوده که بصورت $r = U_2/U_1$ که $U_2 < U_1$ نشان داده می‌-

شود. این پارامتر شدت برش^۲ موجود در لایه را مشخص می‌کند. مقدار کوچک r بیانگر شدت برش

بیشتر می‌باشد. محدوده r را بصورت $0 \leq r \leq 1$ تعریف می‌کنیم. مقدار $r = 0$ بیانگر حالت یک جریانه

^۱ - free-stream velocity ratio

^۲ - shearing intensity

بوده (یعنی یکی از جریانها در ابتدا ساکن است) و $r = 1$ بیانگر جریان یکنواخت بر روی یک جسم میباشد که بدین ترتیب این جریان در واقع یک جریان لایه اختلاطی نبوده بلکه بیشتر شبیه جریان گردابه^۱ می-باشد. پارامتر مهم دیگر در تعیین مشخصه های جریان لایه اختلاطی عدد رینولدز می باشد. برای لایه اختلاطی تراکم ناپذیر این پارامترها برای مشخص کردن مقیاس طولی و زمانی جریان کافی می باشند. همچنین تعدادی پارامتر های اضافی نیز وجود دارد که ممکن است در بعضی از مواقع برای توصیف وضعیت لایه اختلاطی بکار رود که می توان به نسبت چگالی دو سیال $\left(\rho_2/\rho_1\right)$ اشاره کرد که برای حالتی می باشد که در آن جریان بصورت لایه ای در نظر گرفته می شود.

۱-۲- مروری بر تحقیقات انجام شده

گرتلر^۲ در سال ۱۹۴۲ با به کارگیری تحلیل لزجت گردابه پروفیل سرعت در یک لایه اختلاطی دو بعدی در حالی که جریان بالایی با سرعت U_2 و جریان پایینی با سرعت U_1 حرکت می کند را حل کرد. با توجه به فیزیک مساله شرایط مرزی زیر را خواهیم داشت:

$$\bar{u}(-\infty) = U_1 \quad 1-1$$

$$\bar{u}(+\infty) = U_2 \quad 2-1$$

$$\bar{u}(0) = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) \quad 3-1$$

^۱ - wake

^۲ - Gortler

از شرایط مرزی مشخص می شود که جریان در خط مرکزی نامتقارن می باشد. وی جواب مساله را به صورت زیر به دست آورد:

$$u^* = \frac{\bar{u} - U_1}{U_2 - U_1} = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\sigma y}{x} \right) \right] ; \quad \sigma \approx 13.5 \quad 4-1$$

اولین تحقیق تجربی در مورد لایه اختلاطی توسط لیپمان و لافر^۱ در سال ۱۹۴۷ انجام گرفت. بسیاری از کمیت های آماری در این تحقیق بدست آمدند. رشد در ضخامت لایه به همراه تنش برشی، سرعت، توزیع میکروسکوپی و کمیت های حاصله از معادله بالانس انرژی توربولانس، بخوبی تشریح شدند.

براون و روشکو^۲ در سال ۱۹۷۱، تحقیقی در زمینه تاثیرات چگالی در لایه اختلاطی انجام دادند. در این تحقیق، آنها حضور ساختاری را در سرتاسر لایه کشف کردند. در رینولدز پایین، وجود ساختارهایی که بخوبی شکل گرفته اند، یک واقعیت پذیرفته شده می باشد. همزمان با تحقیقات براون و روشکو، نتایج آزمایشگاهی منتشر شده توسط وینانت و برواند^۳ در سال ۱۹۷۴ مشخص کرد که جفت شدن گردابه ها، که عاملی اساسی در رشد لایه آرام می باشد، یک فاکتور مهم و کلی در رشد لایه اختلاطی در رینولدزهای متوسط می باشد. وجود این ساختارها در رینولدزهای بالا توسط دیموتاکیس^۴ و براون در سال ۱۹۷۶ به اثبات رسید.

کنراد^۵ در سال ۱۹۷۶ حضور ناپایداریهای ثانویه، که منجر به تشکیل ساختارهای اضافی در لایه اختلاطی گازی می شود، را نشان داد. این ساختارها، گردابه های در جهت جریان^۶، در نتیجه حرکت سه بعدی لایه و

^۱ - Liepmann & Laufer

^۲ - Brown & Roshko

^۳ - Winant & Brownd

^۴ - Dimotakis

^۵ - Konrad

^۶ - stream wise vortex

شدت یافتن آن بوسیله غلتک های بزرگ در جهت عرضی جریان^۱، مشخص می‌شوند. مونگال^۲ و دیموتاکیس در سال ۱۹۸۴، اختلاط و واکنش بین دو واکنش دهنده، (F_2, H_2) ، را در لایه اختلاطی گازی بررسی کردند. اثرات نیروی خارجی^۳ بر روی این پدیده توسط روبرتز^۴ و روشکو در سال ۱۹۸۵ بررسی شد. نتایج آنها مشخص کرد تشکیل محصولات بوجود آمده در لایه، به عدد رینولدز جریان بسیار حساس می‌باشد. در رینولدزهای پایین، نیروی خارجی باعث افزایش اختلاط می‌شود در حالیکه در رینولدزهای بالا، اختلاط در نتیجه نیروی خارجی، می‌تواند بطور کامل متوقف شود.

در سال ۲۰۰۶ یوشیتسوگو ناکا^۵ [19] و همکاران وی لایه اختلاطی مغشوش را مورد بررسی قرار دادند. آنها پروفیل سرعت، نمودار توزیع فشار، تنش رینولدز و نوسانات سرعت را به دست آوردند و نشان دادند که نتایج آنها با داده های حاصل از DNS تطابق خوبی دارد. تحقیقات آزمایشگاهی جدید در زمینه حضور واکنش شیمیایی در لایه اختلاطی و افزایش دما در آن می‌باشد که درحقیقت کوششی برای فهمیدن نحوه تبادل بین علم مکانیک سیالات و علم شیمی می‌باشد.

با پیشرفت در علم کامپیوتر و ظهور ابر کامپیوترها، تحقیقات عددی در زمینه های مختلف علم مکانیک سیالات، از جمله لایه اختلاطی، در کنار تحقیقات تجربی آغاز شد. در فهم صحیح فیزیک لایه اختلاطی، سه نگرش اساسی در زمینه شبیه سازی وجود دارد:

۱- روش ورتکس^۶.

^۱- span wise rollers

^۲- Mungal

^۳- forcing

^۴- Roberts

^۵- Yoshitsugu Naka, et al.

^۶- vortex method

۲- شبیه‌سازی لایه اختلاطی توسعه یافته زمانی^۱.

۳- شبیه‌سازی لایه اختلاطی توسعه یافته مکانی^۲.

محاسبات اولیه بیشتر به روش ورتکس انجام می‌شد که این به دلیل حضور و اهمیت ورتیسیت‌های بزرگ در این جریان بوده که بازدهی این روش عددی را تضمین می‌کرد.

اکتون^۳ در سال ۱۹۷۶ انباشتگی صفحه ورتکس را برای فهم نحوه رشد لایه اختلاطی، شبیه‌سازی کرد.

آشورت^۴ در سال ۱۹۷۹ اولین کسی بود که نتایج خود را در مورد لایه اختلاطی توسعه یافته مکانی به روش ورتکس منتشر کرد.

در شبیه‌سازی لایه اختلاطی توسعه یافته زمانی، دامنه محاسباتی به طرف پایین دست جریان با سرعت متوسط لایه جابجا می‌شود. جریان سپس در محاسبات در گام زمانی اجازه توسعه می‌یابد. اولین شبیه‌سازی با این نگرش در سال ۱۹۷۸ توسط منصور^۵ و همکاران انجام شد. نتایج حاصله از تحقیقات وی نشان داد که مکانیزم جفت‌شدن گردابه‌ها، دلیل بر رشد لایه می‌باشد. شبیه‌سازی وی، حضور رفتار خود تشابهی^۶ را در مومنتوم متوسط و مرتبه اول متغیرهای جریان، نشان داد. کین^۷ در سال ۱۹۸۱ این تحقیق را با اعمال یک تابع تطبیق^۸، که منجر به محدود شدن دامنه فیزیکی جریان آزاد در جهت y ، از $\pm\infty \rightarrow y$ به یک دامنه محدود محاسباتی شد، ادامه داد. نتایج وی اشاره‌ای به تشکیل تأثیرات سه بعدی ناشی از بی‌نظمی‌های در جهت عرضی جریان، در گردابه‌های اولیه داشت.

¹- Time-developing layer

²- Spatially-developing layer

³- Acton

⁴- Ashurts

⁵- Mansour ,et al.

⁶- self similarity

⁷- Cain , et al.

⁸- mapping

رایلی و متکالف^۱ در سال ۱۹۸۰ شبیه سازی توسعه یافته مکانی را با افزایش میزان تراکم شبکه بندی گسترش داد. نتایج آنها تقابل بین اغتشاشات هارمونیک و تاثیرات این اغتشاشات بر روی رشد لایه را مشخص کرد. شبیه سازی وی حضور مود های زیر هارمونیک^۲ و نقش مهم آنها را در توسعه لایه مشخص کرد.

در تحقیقات اخیر، معادله انتقال بعضی اجزا، به شبیه سازی توسعه یافته زمانی انجام گرفته توسط رایلی، اضافه شد. در این تحقیقات رشد لایه واکنشی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج این تحقیقات نشان داد که آزاد شدن گرما منجر به کاهش ضخامت لایه می شود.

شبیه سازی توسعه یافته مکانی از دو روش قبلی مشکل تر می باشد. تنها با استفاده از ابرکامپیوترها امکان این نوع شبیه سازی ممکن می باشد. در بسیاری از این نوع شبیه سازیها، مساله محدود به مسایل دوبعدی می باشد. منصور در سال ۱۹۸۵ از یک روش جالب برای حل استفاده کرد. او روش ورتکس را در محدوده اولیه لایه استفاده نمود، سپس شبکه بندی اوبلری را در انتهای محدوده اعمال کرد تا بدین ترتیب محاسبات جزئیات حوزه جریان در ناحیه عمل متقابل گردابه ها امکان پذیر گردد.

گرین استین^۳ و همکاران در سال ۱۹۸۶ شبیه سازی لایه اختلاطی توسعه یافته مکانی را با استفاده از تفاضل محدود^۴ انجام دادند. در این نوع شبیه سازیها از شبکه بندی و تعداد گره های زیاد استفاده نشد. در سال ۲۰۰۳ قیبینگ لی^۵ [16] و سانگ فو^۶ لایه اختلاطی با سرعت بالا را برای عدد ماخ مختلف با استفاده از روش BGK شبیه سازی عددی کردند. آنها با به دست آوردن پروفیل سرعت متوسط، تنش

¹- Riley & Metcalfe

²- sub harmonic

³- Grinstein ,et al.

⁴- finite difference

⁵- Qibing Li

⁶- Song Fu