دانشگاه الزهراء (س)
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی _گرایش محض

عنوان

هندسه فضاهای باناخ سه جمله ایها

استاد راهنما
دکتر داریوش بهمردی

استاد مشاور
دکتر مریم ربیعی

دانشجو
سیده فاطمه رفیعی
اسفند ماه ۹۰

چکیده

برای هر جفت اعداد $m, n \in \mathrm{N}$ با $m > n$ نرم روی R^3 را، به ازای هر $(a, b, c) \in \mathrm{R}^3$ با نرم زیر در نظر می‌گیریم

$$\|(a, b, c)\|_{m,n} = \sup\{|ax_m + bx_n + c| : x \in [-1,1]\}$$

بعضی خواص هندسی برای این نرم ها پیشنهاد می کنیم و یک فرمول صریح برای نرم فراهم می کنیم و نیز یک شرح کامل از نقاط رأسی،نمایان و مدور گوی های واحد متناظر، همچنین یک پارامتری سازی و نقشه ای از کره هایشان ارائه می دهیم، که شرح جزئی آن در [1] آورده شده است.

واژه های کلیدی: تحدب؛ نقاط رأسی؛ نقاط نمایان؛ نقاط هموار؛ نقاط مدور؛ نرم های چندجمله ای؛ سه جمله ای ها

abstract

For each pair of numbers $m, n \in \mathrm{N}$ with $m > n$, we consider the norm on R^3 given by

$$\|(a, b, c)\|_{m,n} = \sup\{|ax_m + bx_n + c| : x \in [-١, ١]\}$$

, for every $(a, b, c) \in \mathrm{R}^3$. We investigate some geometrical properties of these norms. We provide an explicit formula for $\|.\|_{m,n}$, a full description of the extreme, exposed, smooth and rotund points of the corresponding unit balls, also a parametrization and a plot of their unit spheres. this was partially studied in [1].

Keywords: *Convexity; Extreme points; Expose points; Smooth points; Rotund points Polynomial norms; Trinomials*

Alzahra University

Faculty of Science

Department of Mathematics

A thesis

Submitted for the degree of Master of Science

In Pured Mathematics

Thesis Title

Geometry of Banach Spaces of trinomials

Thesis Advisor

Dr.Darush Behmardi

Thesis Co-Adviser

Dr.Maryam Rabiei

By:

Seyedeh Fatemeh Rafiei

Mar.2012

گر چه حاصل تلاشم در خور پیشکش نیست لیکن آن‌چه هست تقدیم می‌کنم به ساحت مقدس قطب عالم امکان

حضرت صاحب الزمان (عج)

قدردانی

وظیفه خود می‌دانم سپاسگزار تمام آنهایی باشم که در این دوره ارزشمند، بودنشان و امیدشان راهگشای من بود؛ پدر و مادر مهربانم که همانند تمام روزهای گذشته با صبر و حوصله در کنارم بودند.
اساتید عزیز و گرانقدر دانشکده ریاضی، بخصوص آقای دکتر بهمردی که مرا در انجام این پایان نامه یاری نمودند. برای ایشان آرزوی سلامتی، موفقیت و سربلندی را دارم.
هم‌چنین تشکر و قدردانی می‌نمایم از استاد مشاور و داوران محترم که برای داوری این پایان نامه قبول زحمت نمودند و وقت گرانبهای خود را در اختیار بنده قرار دادند.

چکیده

برای هر جفت اعداد $m, n \in \mathbb{N}$ با $m > n$ نرم روی $\mathbb{R}^۳$ را، به ازای هر $(a, b, c) \in \mathbb{R}^۳$ با $\|(a, b, c)\|_{m,n} = \sup\{|ax^m + bx^n + c| : x \in [-۱, ۱]\}$ در نظر می گیریم. بعضی خواص هندسی برای این نرم ها پیشنهاد می کنیم و یک فرمول صریح برای $\|.\|_{m,n}$ فراهم می کنیم و نیز یک شرح کامل از نقاط رأسی، نقاط هموار و مدور گوی های واحد متناظر، همچنین یک پارامتری سازی و نقشه ای از کره هایشان ارائه می دهیم، که شرح جزئی آن در [۱] آورده شده است.

واژه های کلیدی: تحدب؛ نقاط رأسی؛ نقاط نمایان؛ نقاط هموار؛ نقاط مدور؛ نرم های چندجمله ای؛ سه جمله ای ها

فهرست مطالب

مقدمه

مطالعه نقاط رأسی اجسام محدب (مجموعه های فشرده محدب و غیر تهی) در فضاهای باناخ نقش تعیین کننده ای در آنالیز تابعی دارد. اصولا قضیه کرین-میلمن به ما اجازه می دهد که هر جسم محدب را با استفاده از نقاط رأسی اش توصیف کنیم.
توصیف نقاط رأسی گوی واحد فضای سه جمله ای ها می تواند در بدست آوردن شماری از نابرابری ها (جایی که نرمهای سه جمله ایها با هم مقایسه می شوند) مفید باشد. مسأله أخیری که نتیجه کلیدی اتصال نابرابری های سه جمله ای و نقاط رأسی است و می تواند تقریب کرین-میلمن نامیده شود این است که؛ یک تابع محدب (مثل نرم سه جمله ای) تعریف شده روی یک جسم محدب (مثل گوی واحد فضای سه جمله ای ها با بعد متناهی) ماکزیممش را از بین نقاط رأسی جسم محدب اختیار می کند. بنابراین تقریب کرین-میلمن پیچیدگی مسأله ماکزیمم را با محدود کردن توجه ما به نقاط رأسی در دامنه تابع هدف، کاهش می دهد. با استفاده از این نظریه، نابرابری های از نوع شرطی که در قضیه بوهر کاربرد دارد را در فصل دو[۱۷] و نابرابری های از نوع مارکو و برنشتاین که در اثبات عکس قضیه تقریب کاربرد دارد را در فصل سه[۱۴] بدست می آوریم. تقریب کرین-میلمن مکررا در آثار استفاده شده است. کن هیم[۱] و ریویلین[۲] و خیلی پیشتر، چرنیخ[۳] و وورونوسکاجا[۴] پیشقدمان این روش بودند.
ما با فرض اینکه $\mathcal{P}_{m,n}(\mathbb{R})$ نشان دهنده فضای ۳-بعدی چند جمله ای های به فرم

---

[۱] Konheim

[۲] Rivilin

[۳] Chernykh

[۴] Voronoskaja

$ax^m + bx^n + c$ با $m, n \in \mathbb{N}$ و $m > n$ و $a, b, c \in \mathbb{R}$ است، شرح جزئی از هندسه $\mathcal{P}_{m,n}(\mathbb{R})$ با خاصیت نرم حداکثر روی بازه واحد $[-۱, ۱]$ بدست می آوریم. نگاشتی که به هر چند جمله ای به فرم $ax^m + bx^n + c$ مختصات (a, b, c) در پایه $\{x^m, x^n, ۱\}$ از $\mathcal{P}_{m,n}(\mathbb{R})$ را نسبت می دهد، یک دوسویی خطی است که به ما اجازه می دهد $\mathcal{P}_{m,n}(\mathbb{R})$ و $\mathbb{R}^۳$ را یکی بگیریم. در قسمتهایی که خواهد آمد ما یک فرمول مشخص برای نرم $\| \|_{m,n}$ روی $\mathbb{R}^۳$ با تعریف زیر پیدا می کنیم

$$\|(a, b, c)\|_{m,n} := \max_{x \in [-۱,۱]} |ax^m + bx^n + c|$$

به ازای هر $a, b, c \in \mathbb{R}$. از این فرمول برای بدست آوردن یک پارامتری سازی و طرحی کلی از کره ی واحد $(\mathbb{R}^۳, \| \|_{m,n})$ استفاده می کنیم. این پارامتری سازی به نوبه ی خود امکان توصیف نقاط رأسی گوی واحد $(\mathbb{R}^۳, \| \|_{m,n})$ را فراهم می کند. به طرز قابل توجهی می فهمیم که هندسه ی $(\mathbb{R}^۳, \| \|_{m,n})$، قویا بستگی به جفتی[۵] $m, n \in \mathbb{N}$ دارد که در این مورد موقعیت های مختلفی را پدید می آورد. به این دلیل ما مطالعه این فضاها را به چهار بخش تقسیم می کنیم؛ بخش اول اختصاص به m, n فرد، بخش دوم به m فرد و n زوج دارد، در قسمت سوم m زوج و n فرد و در قسمت چهارم، جایی که هردو m, n زوج اند را بررسی می کنیم.

انگیزه این کار مقاله آرن و کلیمک[۶] [۲] است، که نویسنده ها هندسه ی فضای $(\mathbb{R}^۳, \| \|_{۲,۱})$ را شرح می دهند. ما با در نظر گرفتن تمام نرمهای $\| \|_{m,n}$ کمی دورتر می رویم. توصیفی از چند جمله ایهای رأسی گوی واحد فضای همه ی چند جمله ای های حقیقی با درجه ی نا کمتراز $n \in \mathbb{N}$ با نرم حداکثر، توسط کن هیم و ریویلین [۱۳] بدست آمده است اما نویسنده ها نتوانسته اند شرح واضحی از نقاط رأسی بدهند. در مسیر مشابه چویی و کیم[۷] [۵-۳] مسأله مشابهی را برای چند جمله ای های ۲-همگن اسکالر مقدار روی فضاهای حقیقی $l_۱^۲$ و $l_۲^۲$ و $l_\infty^۲$ در نظر گرفته اند و نیز کرک[۸] [۸] مسأله مشابهی برای چند

[۵] زوج یا فرد بودن

[۶] Aron،Klimek

[۷] Choi،Kim

[۸] Crecu

جمله ای های دو همگن اسکالر مقدار روی فضاهای حقیقی $l_p^۲$ با $۱ < p < \infty$ حل کرده است. [۱۱-۶] مسائل مرتبط با چند جمله ای های همگن مختلط یا حقیقی از درجه ی ۲ یا ۳ است. سه جمله ای های مثلثاتی (حقیقی یا مختلط) توسط آرن و کلیمک [۲] و نیوویرت[۹] [۱۵] و روز[۱۰] [۱۶] مطالعه شده است.

از حالا به بعد $S_{m,n}$ و $B_{m,n}$ به ترتیب کره ی واحد و گوی واحد بسته فضای $(\mathbb{R}^۳, \| \|_{m,n})$ را نشان می دهند. همچنین π_{ab}، به ازای هر $a, b, c \in \mathbb{R}$ تصویر خطی با ضابطه ی $\pi(a, b, c) = (a, b)$ است. نقشه های ظاهر شده در این مقاله توسط میپل[۱۱] [۱۲] کشیده شده است و بقیه گراف ها با استفاده از متاپست[۱۲] طراحی شده که همه درجه بندی شده اند.

توجه کنید که منابع ذکر شده در بخش مقدمه از منابع اصلی است.

---

[۹] Neuwirth

[۱۰] Revesz

[۱۱] Maple

[۱۲] Meta post

فصل ۱

پیشنیاز

تعریف ۱.۰.۰.۱. *زیرمجموعه A از فضای برداری X محدب نامیده می شود اگر به ازای هر $y, z \in A$، مجموعه*

$$W = \{\alpha y + (1-\alpha)z : \ 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

زیر مجموعه ای از A باشد.

تعریف ۲.۰.۰.۱. *تابع $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ را محدب نامیم اگر دامنه اش $\mathcal{D}(f)$ مجموعه ای محدب باشد و برای هر $y, z \in \mathcal{D}(f)$ داشته باشیم*

$$f(\alpha y + (1-\alpha)z) \leq \alpha f(y) + (1-\alpha) f(z)$$

که $0 \leq \alpha \leq 1$.

نتیجه ۱.۰.۰.۱. *طبق تعریف*

- *هر تابع محدب $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ و هر خط مستقیم l در صفحه $\mathbb{R}^2$ حداکثر در دو نقطه اشتراک دارند.*

- *اگر خط مستقیم l تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نقاط x_1 و x_2 قطع کند و $x_1 < x_2$،*

آنگاه

$$f(x) > l(x) \Longleftrightarrow x > x_۲ \text{ یا } x < x_۱$$

- *نمودار تابع محدب $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، بالای هر خط مماسش قرار می گیرد.*

تعریف ۳.۰.۱. *زیر مجموعه محدب F از مجموعه محدب C در فضای برداری X را یک وجه از C گوییم اگر هر پاره خط (بسته) در C، که یک نقطه درونی در F دارد هر دو نقطه انتهایی اش در F باشد. به عبارتی به ازای هر دو نقطه مجزای $y, z \in C$ که $]y, z[\cap F$ غیر تهی باشد، داشته باشیم $[y, z] \subset F$. ($[y, z]$) پاره خط گذرنده از y و z شامل y و z و $]y, z[$ خط گذرنده از y و z غیر شامل y و z است).*

- زیر مجموعه های $\emptyset$ و C هر دو وجه های C هستند که وجه های ناسره نامیده می شوند. بقیه وجه های دیگر وجه های سره نامیده می شوند.

- اگر C' مجموعه نقاطی باشد که تابع خطی h ماکزیممش را در آن نقاط می گیرد، آن گاه C' وجه C است. (C' محدب است زیرا برابر با اشتراک C و $\{x \ : \ h(x) = \alpha\}$ است که α ماکزیمم است).

- به وضوح اشتراک هر تعداد از وجه های C دوباره یک وجه از C است.

تعریف ۴.۰.۱. *نقطه $x \in C$، نقطه رأسی C نامیده می شود اگر $\{x\}$ یک وجه باشد و طبق تعریف یعنی x نقطه درونی هیچ پاره خط $[y, z]$ی در C نباشد و به بیان معادل عبارت زیر برقرار باشد*

اگر y و z و λ وجود داشته باشد که $y, z \in C$ و $\lambda \in (۰, ۱)$ و $x = (۱ - \lambda)y + \lambda z$ آن گاه $x = z = y$.

*مجموعه نقاط رأسی C را با **ext(C)** نمایش می دهیم.*

وجه F از C یک k-وجه است اگر $dimF = k$. بنابراین صفر-وجهی ها نقاط رأسی هستند($\{x\}$ وجه است اگر و تنها اگر x رأسی باشد).

گزاره ۱.۰.۰.۱. [۲۸] *هر مجموعه محدب بسته غیر تهی که شامل هیچ خطی نباشد حداقل یک نقطه رأسی دارد.*

گزاره ۲.۰.۰۱. [۳۰] *اگر F محدب بسته در $\mathbb{R}^d$ و F وجه C باشد آنگاه $C \setminus F$ محدب است.*

گزاره ۳.۰.۰۱. *فرض کنید C مجموعه محدبی در فضای باناخ X و $x \in C$، آن گاه $x \in extC$ اگر و تنها اگر $C \setminus \{x\}$ محدب باشد. به عبارتی نتوانیم y و zی متعلق به C پیدا کنیم که $x = \frac{1}{2}(y+z)$ مگر اینکه $x = y = z$.*

اگر C گوی واحد X باشد، برای هر $x \in \partial Ball(X)$ تعریف نقطه رأسی x را می توان به این صورت بیان کرد؛

اگر $y \in X$ وجود داشته باشد که $\|x+y\| = \|x-y\| = 1$ آنگاه $y = 0$.

مثال ۱.۰.۰۱. *تابع f در گوی واحد $C(K)$[1] رأسی است اگر وتنها اگر $|f(x)| = 1$، برای همه $x \in K$.*

مثال ۲.۰.۰۱. *هیچ نقطه رأسی در گوی واحد $L^1[0,1]$ (با اندازه لبگ) وجود ندارد.*

در واقع اگر $f \in L^1$ که $\|f\|_1 = 1$ می توان $\alpha \in (0,1)$ی پیدا کرد که $\int_0^\alpha |f(t)|dt = \frac{1}{2}$ و اگر فرض کنیم $g = f(i_{[0,\alpha]} - i_{[\alpha,1]})$ آنگاه $\|f+g\|_1 = \|f-g\|_1 = 1$ و طبق بالا باید داشته باشیم $\|g\|_1 = 0$، در حالیکه $\|g\|_1 = \frac{1}{2}$و این تناقض است.

مثال ۳.۰.۰۱. $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in ext(B_{l_\infty})$ *اگر و تنها اگر $|x_n| = 1$، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$.*

برهان. به خلاف فرض کنیم $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in ext(B_{l_\infty})$ و $|x_n| < 1$ آنگاه $\lambda > 0$ وجود دارد که $|x_n| + \lambda = 1$. به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، تعریف می کنیم $y_n = x_n + \lambda$ و $z_n = x_n - \lambda$ و به ازای هر $k \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$ تعریف می کنیم $y_k = x_k = z_k$. آنگاه $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq (z_n)_{n\in\mathbb{N}} = z$ و نیز چون $|x_n - \lambda| \leq 1$ و $|x_n + \lambda| \leq 1$ داریم $y, z \in B_{l_\infty}$. از طرفی $x = \frac{y+z}{2}$ و این تناقض با $x \in ext(B_{l_\infty})$ است.

به عکس اگر $n \in \mathbb{N}$ و $|x_n| = 1$ و $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin ext(B_{l_\infty})$ آن گاه

$$z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B_{l_\infty} \ , \ y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B_{l_\infty}$$

وجود دارند که $x = \frac{y+z}{2}$ و $y \neq z$. در نتیجه $n \in \mathbb{N}$ موجود است که$y_n \neq z_n$.

[1] مجموعه تمام توابع حقیقی پیوسته روی K

- اگر $x_n = ۱$ آنگاه $y_n + z_n = ۲$ و این فقط در حالتی است که $y_n = z_n = ۱$ (چون $y, z \in B_{l_\infty}$ پس $۰ \leq |z_n| < |z| \leq ۱$ و $۰ \leq |y_n| < |y| \leq ۱$).
- و اگر $x_n = -۱$، $y_n + z_n = -۲$ و باز فقط زمانی این اتفاق می افتد که $y_n = z_n = -۱$.

□

تعریف ۵.۰.۱. *غلاف محدب مجموعه A در فضای برداری X، مجموعه تمام ترکیبات متناهی از اعضای A است. بعبارتی*

$$conv(A) = \{t_۱x_۱ + \ldots + t_nx_n : x_۱, \ldots, x_n \in A, ۰ < t_۱, \ldots, t_n < ۱, \sum_{i=۱}^{n} t_i = ۱, n \in \mathbb{N}\}$$

قضیه ۱.۰.۱ (مینکوسکی). [۲۴] *فرض کنید K مجموعه محدب فشرده از بعد متناهی در فضای توپولوژی برداری باشد. آنگاه*

$$K = conv[ext(K)]$$

گزاره ۴.۰.۱. [۳۰] *فرض کنید C مجموعه محدب فشرده در $\mathbb{R}^d$ با $dimC = n$ باشد. آنگاه هر نقطه از C ترکیب محدب حداقل $n+۱$ نقطه رأسی از C است.*

برهان. با توجه به قضیه مینکوسکی اثبات واضح است. □

گزاره ۵.۰.۱ (اصل ماکسیمم مقدماتی). [۲۴] *فرض کنید K مجموعه محدب غیر تهی و فشرده از بعد متناهی درفضای توپولوژی برداری و $f : K \longmapsto (-\infty, +\infty]$ یک تابع محدب باشد. اگر f ماکزیممش را روی K بگیرد آنگاه ماکزیمم در بین نقاط رأسی K است.*

قضیه زیر شامل قضیه مینکوسکی همراه با نوعی از عکس اش است و می گوید که $ext(K)$ کوچکترین زیرمجموعه از K است که غلاف محدبش برابر K است.

قضیه ۲.۰.۱. [۲۴] *فرض کنید K یک مجموعه محدب فشرده از بعد متناهی در فضای برداری توپولوژیک و $A \subset K$. آنگاه دو گزاره زیر معادلند:*

۱. $ext(K) \subset A$

۲. $K = conv(A)$.

و علی الخصوص $K = conv(ext(K))$.

برهان. (۱) به (۲) از قضیه مینکوسکی بدست می آید. برای اثبات دیگری فرض کنید (۲) برقرار باشد و نقطه رأسی x از Kکه در A نیست وجود داشته باشد. آنگاه A یک زیر مجموعه از $K \setminus \{x\}$ است و چون $K \setminus \{x\}$ محدب است، $conv(A)$ یک زیرمجموعه از $K \setminus \{x\}$است و این تناقض با $conv(A) = K$ است. $\square$

قصد داریم نشان دهیم مجموعه های محدب فشرده از بعد متناهی به وسیله مجموعه نقاط رأسی شان مشخص می شوند. از اینکه غلاف محدب کافی نیست، مجبوریم آنرا با غلاف محدب بسته جایگزین کنیم.

قضیه ۳.۰.۱ (کرین-میلمن). [۲۴] *فرض کنید K مجموعه محدب فشرده در فضای توپولوژی برداری و هاسدورف[۲] و محدب باشد آنگاه*

$$K = \overline{conv}[ext(K)]$$

قضیه ۴.۰.۱ (میلمن). [۲۴] *فرض کنید K مجموعه محدب فشرده در فضای توپولوژی برداری موضعاً محدب هاسدورف باشد و $A \subset K$.آنگاه دو عبارت زیر معادل اند*

۱. $ext(K) \subset \overline{A}$

۲. $K = \overline{conv}(A)$

نتیجه ۲.۰.۱ (تقریب کرین-میلمن). *اگر C یک جسم محدب در فضای باناخ و $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع محدبی باشد که ماکزیممش را اختیار می کند، آنگاه نقطه راسی $e \in C$ وجود دارد که $f(e) = max\{f(x) \ : \ x \in C\}$*

[۲] به ازای هر $x, y \in K$ که $x \neq y$، مجموعه های مجزای باز U و V وجود داشته باشند که $x \in U$ و $y \in V$.

تعریف ۶.۰.۱. *زیر فضای H از X، ابرصفحه محملی از مجموعه محدب $C \subset X$ در نقطه $x_{\circ} \in C$ نامیده می شود اگر H به فرم $H = l^{-1}(\alpha)$ که $l \in X^* \setminus \{\circ\}$ و $l(x_{\circ}) = \sup l(C) = \alpha$ (X^* فضای دوگان X است).*

لم ۱.۰.۱. [۲۴] *فرض کنید C مجموعه محدب در فضای با ناخ X و $H \subset X$ ابر صفحه محملی C باشد. آنگاه $ext(C \cap H) = ext(C) \cap H$*

تعریف ۷.۰.۱. *وجه F از C به فرم $F = H \cap C$، که H یک ابر صفحه محملی C باشد را وجه نمایان می نامیم. بعبارت دیگر F وجه نمایان C است اگر $f \in X^*$ وجود داشته باشد که*

$$F = \{x \in C : \ f(x) = sup(f(C))\}.$$

برای هر مجموعه محدب بسته C (حتی با بعد ۰ و ۱−)، $\emptyset$ و C وجه های نمایان هستند. نقطه $x \in C$ یک نقطه نمایان C نامیده می شود اگر $\{x\}$ یک وجه نمایان باشد. مجموعه نقاط نمایان را با **exp(C)** نمایش می دهیم و می گوییم تابعک[۳] f، تابعک نمایان کننده برای x است، یا f نقطه x را نمایان می کند و این یعنی ابر صفحه حقیقی مشخص شده بوسیله f، گذرنده از نقطه x، C را فقط در x لمس می کند. در واقع اگر $K \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعه محدب بسته باشد، $p \in K$ نقطه نمایان است اگر ابر صفحه $n-۱$ بعدی وجود داشته باشد که اشتراکش با K فقط p باشد.

گزاره ۶.۰.۱. [۲۶] *برای گوی واحد B_X از فضای با ناخ حقیقی X، زیرمجموعه غیرتهی C از B_X وجه نمایان است اگر $f \in S_{X^*}$ وجود داشته باشد که $C = f^{-1}(۱) \cap B_X$.*

برهان. فرض کنیم C وجه نمایان شده از گوی واحد B_X باشد، لذا $f \in X^*$ وجود دارد که $C = \{x \in B_X : \ f(x) = \sup(f(x))\}$. در نتیجه $G \in S_{X^*}$ وجود دارد بطوریکه

$$C = \{x \in B_X : g(x) = \sup(g(B_X))\} = \{x \in B_X : \ g(x) = ۱\}$$

بنابراین

$$C = g^{-1}(\{۱\}) \cap B_X$$

[۳] هر نگاشت خطی از یک فضای برداری روی K به K،که $K = \mathbb{R}$یا$\mathbb{C}$

□

گزاره زیر با توجه به تعریف نقطه نمایان واضح است.

گزاره ۷.۰.۱. *فرض کنیم $x \in S_X$ در اینصورت عبارات زیر معادل اند*

۱. x *نقطه نمایان* S_X *است.*

۲. $f \in S_{X^*}$ *وجود دارد که به ازای هر* $y \in S_X \setminus \{x\}$، *داریم* $f(x) > f(y)$.

۳. *اگر* $f \in X^*$ *وجود داشته باشد که* $f(x) = ۱$، *آنگاه به ازای هر* $y \in S_X$، $f(y) < ۱$.

قضیه ۵.۰.۱. [۲۶] *هر نقطه نمایان یک نقطه رأسی است ولی عکس آن در حالت کلی برقرار نیست.*

برهان. فرض کنیم x یک نقطه نمایان باشد که رأسی نیست. لذا تابعک $f \in X^*$ وجود دارد که
$f(x) = ۱$ و به ازای هر $y \in X$ داریم $f(y) < ۱$. فرض کنیم $x = \frac{y+z}{۲}$ و $x \neq y$.
بنابراین $f(x) = f(\frac{y+z}{۲}) = ۱$ و در نتیجه $f(y) \geq ۱$ و این با فرض اینکه x یک نقطه نمایان است تناقض دارد. □

مثال ۴.۰.۱. *نقطه ۰ برای گراف* $\begin{cases} ۰ & x \leq ۰ \\ x^۲ & x > ۰ \end{cases}$ *نقطه رأسی است ولی نمایان نیست.*

شرایطی برای عکس قضیه بالا داریم.

لم ۲.۰.۱. [۲۹] *فرض کنید* X *فضای باناخ و هر نقطه از نرم واحد در گوی واحد* X *رأسی باشد. آنگاه تمام نقاط نرم واحد تقریبا نمایان هستند.*

لم ۳.۰.۱. [۲۹] *فرض کنید* C *یک زیرمجموعه محدب غیرتهی از یک فضای توپولوژی برداری* X *باشد و* G *یک زیر مجموعه محدب باز غیرتهی از* X *باشد آنگاه*

$$exp(G \cap C) = G \cap exp(C)$$