دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی محض

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته
ریاضی محض، گرایش هندسه

عنوان

برخی ساختارهای ویژه در هندسه ناجابجایی

استاد راهنما

دکتر قربانعلی حقیقت دوست

استادان مشاور

دکتر اسماعیل عابدی و دکتر فرضعلی ایزدی

پژوهشگر

حامی عباسی ماکرانی

تیرماه ۱۳۹۳
تبریز/ ایران

نام خانوادگی دانشجو: عباسی ماکرانی　　　نام: حامی

عنوان: برخی ساختارهای ویژه در هندسه ناجابجایی

استاد راهنما: دکتر قربانعلی حقیقت دوست
استادان مشاور: دکتر اسماعیل عابدی و دکتر فرضعلی ایزدی

مقطع تحصیلی: دکتری　　　رشته: ریاضی محض　　　گرایش: هندسه

دانشگاه: شهید مدنی آذربایجان　　　وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
تاریخ فارغ‌التحصیلی: تیرماه ۱۳۹۳
تبریز/ ایران　　　تعداد صفحات: ۸۱

واژگان کلیدی: جبرهای هاپف ضربگری، خاصیت (T) کاژدان، همولوژی و کوهمولوژی دوری، گروه وار

چکیده

در این رساله، یک مدول پیش دوری و یک مدول دوری برای جبرهای هاپف ضربگری منظم معرفی می شوند. با استفاده از این ساختارها، کوهمولوژی پیش دوری و کوهمولوژی هوخشیلد برای جبرهای هاپف ضربگری منظم تعریف می شوند. یک مفهوم از خاصیت (T) برای یک C^* سیستم دینامیک تعریف می شود و ارتباط آن با خاصیت (T) روی یک C^* جبر و خاصیت (T) کاژدان روی گروه های فشرده موضعی بررسی می شود. یک گروه وار نسبت به یک جبر و یک منیفلد دیفرانسیل پذیر ساخته می شود. برای منیفلدهای با بعد یک، نشان داده می شود که یک ساختار دیفرانسیل پذیر روی این گروه وار وجود دارد که آنرا تبدیل به یک گروه وار لی می کند. همچنین نسبت به هر میدان برداری هموار روی یک منیفلد دیفرانسیل پذیر یک بعدی، یک منیفلد دیفرانسیل پذیر با بعد ۳ معرفی می شود.

تقدیم به پدر و مادرم

سپاس گزاری

وظیفه خودم می دانم از تلاش ها و نظرات آقایان **دکتر قربانعلی حقیقت دوست**، **دکتر ایلدار صادقی**، **دکتر یوسف زمانی**، **دکتر اسماعیل عابدی**، **دکتر فرضعلی ایزدی**، **پرفسور مسعود خلخالی**، **پرفسور بهرام رنگین پور** و **پرفسور** Alfons Van Daele صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

از آقایان **دکتر فیروز پاشایی**، **دکتر ایلدار صادقی** و **دکتر محمد حسین ستاری** که قبول زحمت فرموده و داوری این رساله را برعهده گرفتند صمیمانه سپاسگذارم.

تشکر می‌کنم از **پدر** و **مادرم** به پاس مهربانی و صبوری‌هایشان.

حامی عباسی ماکرانی
تیرماه ۱۳۹۳
تبریز/ ایران

چکیده

در این رساله، یک مدول پیش دوری و یک مدول دوری برای جبرهای هاپف ضربگری منظم معرفی می شوند. با استفاده از این ساختارها، کوهمولوژی پیش دوری و کوهمولوژی هوخشیلد برای جبرهای هاپف ضربگری منظم تعریف می شوند. یک مفهوم خاصیت (T) برای یک C^*-سیستم دینامیک تعریف می شود و ارتباط آن با خاصیت (T) روی یک C^*-جبر و خاصیت (T) کاژدان روی گروه های فشرده موضعی بررسی می شود. یک گروه وار نسبت به یک جبر و یک منیفلد دیفرانسیل پذیر وابسته می شود. برای منیفلدهای با بعد یک، نشان داده می شود که یک ساختار دیفرانسیل پذیر روی این گروه وار وجود دارد که آنرا تبدیل به یک گروه وار لی می سازد. همچنین نسبت به هر میدان برداری هموار روی یک منیفلد دیفرانسیل پذیر یک بعدی، یک منیفلد دیفرانسیل پذیر با بعد ۳ معرفی می شود.

واژگان کلیدی: جبر هاپف ضربگری، خاصیت (T) کاژدان، همولوژی و کوهمولوژی دوری، گروه وار.

مقدمه

جبرهای هاپف ضربگری توسیع های طبیعی از جبرهای هاپف معمولی می باشند، وقتی که شرط یکدار در جبر مربوطه لحاظ نشود. این ساختارها در منبع [۱۶] معرفی شده اند. در معرفی این ساختارها، یک جبر نه لزوما یکدار $\mathcal{H}$ روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ در نظر گرفته شده است و فرض شده است که تابع ضرب این جبر ناتباهیده[۱] باشد. همچنین یک همومورفیسم ناتباهیده Δ از $\mathcal{H}$ به جبر ضربگری[۲] $M(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})$ روی این ساختار لحاظ شده است که مشابه همضرب روی جبرهای هاپف می باشد. اگر جبر $\mathcal{H}$ یکدار باشد، آنگاه این ساختار یک جبر هاپف است. یکی از مثال های اساسی در این ساختارها، جبر $Fun(\mathcal{G})$ از توابع مختلط مقدار روی یک گروه گسسته $\mathcal{G}$ می باشد. اگر این گروه متناهی باشد، آنگاه $Fun(\mathcal{G})$ همراه با همضرب[۳] $\Delta(f)(s,t) := f(st)$ یک جبر هاپف است. اما اگر گروه $\mathcal{G}$ نامتناهی باشد، آنگاه این ادعا درست نیست. زیرا در این مورد رابطه $Fun(\mathcal{G}\times\mathcal{G}) = Fun(\mathcal{G})\otimes Fun(\mathcal{G})$ نمی تواند برقرار باشد. در این مورد، می توان توسط جبر غیر یکدار $Fun_f(\mathcal{G})$ از توابع مختلط مقدار روی گروه مربوطه با تکیه گاه متناهی[۴] استفاده کرد. از اینکه رابطه $Fun_f(\mathcal{G}\times\mathcal{G}) = Fun_f(\mathcal{G})\otimes Fun_f(\mathcal{G})$ برای هر گروه دلخواه برقرار است، بنابراین می توان همضرب $\Delta(f)(s,t) := f(st)$ را روی فضای $Fun_f(\mathcal{G})$ تعریف کرد. جبر $Fun_f(\mathcal{G})$ یک جبر هاپف ضربگری می باشد و یکی از مثال های اساسی در اینگونه ساختارها می باشد که در منبع [۱۶] به آن پرداخته شده است.

در منابع [۸، ۷] یک مدول دوری[۵] برای هر جبر هاپف $\mathcal{H}$ که مجهز به یک زوج پیمانه در پیچش[۶] می باشد، معرفی شده است. این مدول دوری با استفاده از همضرب از $\mathcal{H}$ و یک عنصر شبه گروه[۷] σ و همچنین با استفاده از ضرب و عملگر متقاطر[۸] از جبر هاپف تعریف شده است. عنصر شبه گروه σ یک عنصر ناصفر در جبر هاپف $(\mathcal{H},\Delta)$ می باشد، بطوریکه در شرط $\Delta(\sigma)=\sigma\otimes\sigma$ صادق است. این تعریف برای یک جبر هاپف ضربگری $(\mathcal{H},\Delta)$ صحیح نمی باشد. برای جبرهای هاپف ضربگری، یک عنصر شبه گروه به عنوان یک عنصر ناصفر σ در جبر ضربگری $M(\mathcal{H})$ با شرط $\Delta(\sigma)=\sigma\otimes\sigma$ در نظر گرفته می شود. این تعریف دارای مفهوم است، زیرا Δ می تواند بطور منحصر به فرد به $M(\mathcal{H})$ توسیع یابد. با استفاده از این مفهوم، در فصل ۱ یک زوج پیمانه در پیچش را برای جبرهای هاپف ضربگری تعریف می کنیم. در منبع [۲۵] مفهوم

[۱] Non-degenerate
[۲] Multiplier algebra
[۳] Comultiplication
[۴] Finite support
[۵] Cyclic module
[۶] Modular pair in involution
[۷] Group-like element
[۸] Antipode

یک شبه گروه تصویری[۹] برای هر جبر هاپف ضربگری $(\mathcal{H},\Delta)$ تعریف شده است. در این رساله، این مفهوم را به عنوان یک عنصر ناصفر γ متعلق به $\mathcal{H}$ که در شرایط

$$\Delta(\gamma)(۱\otimes\gamma)=\gamma\otimes\gamma=\Delta(\gamma)(\gamma\otimes ۱),\quad \gamma^۲=\gamma$$

صادق است، در نظر می گیریم. توجه کنید مفهوم یک شبه گروه تصویری نباید با مفهوم یک عنصر شبه گروه اشتباه شود و یک تفاوت بزرگ بین این دو مفاهیم وجود دارد. یک عنصر شبه گروه σ در هر جبر هاپف همیشه معکوس پذیر است و معکوس آن برابر با $S(\sigma)$ است، که S عملگر متقاطر از جبر هاپف می باشد. اگر یک عنصری در یک جبر یکدار با توان دوم خود یکسان و همچنین معکوس پذیر باشد، آنگاه برابر با عنصر یکه از جبر است. در فصل ۱ یک مدول پیش دوری[۱۰] برای هر جبر هاپف ضربگری منظم $\mathcal{H}$ که مجهز به یک زوج تطبیق یافته[۱۱] (χ,γ) و یک زوج پیمانه در پیچش (χ,σ) که γ و σ سازگارند، معرفی می شود. توجه کنید $\chi:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ یک همومورفیسم ناصفر است، بطوریکه $\chi(\gamma)=۱$ و سازگاری γ و σ به مفهوم $\gamma\sigma=\sigma\gamma$ می باشد. عنصر γ یک عنصر اساسی در این فصل می باشد و یک نقش مهمی در تعریف عملگرهای چهره[۱۲] ایفا می کند. اگر $\mathcal{H}$ یک جبر هاپف باشد و $\gamma=۱$، آنگاه عملگرهای چهره در فصل ۱ یکسان با عملگرهای چهره تعریف شده در منابع [۷، ۸] می باشند.

با توجه به بحث های بالا، از اینکه جبرهای هاپف ضربگری توسیع هایی از جبرهای هاپف می باشند، بنابراین مباحثی مانند مدول، کومدول[۱۳] که در جبرهای هاپف مطرح هستند را می توان در جبرهای هاپف ضربگری مطرح کرد. برای نظریه مدول ها روی جبرهای هاپف ضربگری به منبع [۱۳] و برای نظریه کومدول ها روی جبرهای هاپف ضربگری به منبع [۱۷] مراجعه کنید. در فصل ۲ روی همولوژی یک جبر هاپف ضربگری منظم $\mathcal{H}$ بحث می شود. در این فصل، یک مدول دوری نسبت به یک سه تایی $(\mathcal{R},\mathcal{H},\mathcal{X})$ شامل یک $\mathcal{H}$-کومدول جبری $\mathcal{R}$ و یک $\mathcal{H}$-مدول چپ یکدار $\mathcal{X}$ که همچنین $\mathcal{X}$ یک جبر یکدار است، وابسته می شود. ایده این فصل از منبع [۳۲] ناشی می شود.

برای جبرهای هاپف ضربگری، یک مفهوم تابعک های خطی پایای راست و پایای چپ وجود دارد که آنها را انتگرال های راست و چپ روی $\mathcal{H}$ نیز می نامند. اگر $\mathcal{H}$ یک جبر هاپف متناهی البعد باشد، آنگاه فضای خطی $\mathcal{H}^*$ شامل همه تابعک های خطی روی $\mathcal{H}$ دوباره یک جبر هاپف می باشد. ضرب و همضرب روی $\mathcal{H}^*$ با استفاده از دوگان کردن همضرب و ضرب روی $\mathcal{H}$ بدست می آیند. اما در حالت نامتناهی البعد این نتیجه صحیح نمی باشد. اگر جبر هاپف $\mathcal{H}$ دارای انتگرال باشد، آنگاه یک زیرفضای طبیعی $\widehat{\mathcal{H}}$ از $\mathcal{H}^*$ وجود دارد که دارای ساختار یک جبر هاپف ضربگری است. ضرب روی $\widehat{\mathcal{H}}$ از همضرب روی $\mathcal{H}$ و همضرب روی $\widehat{\mathcal{H}}$ از ضرب روی $\mathcal{H}$ حاصل می شوند. این نتایج موردهای خاصی از جبرهای هاپف ضربگری با انتگرال

[۹] Group-like projection
[۱۰] Precyclic module
[۱۱] Matched pair
[۱۲] Face operators
[۱۳] Comodule

می باشند که در منبع [۱۸] مطرح شده اند. هر جبر هاپف ضربگری منظم با یک انتگرال را یک گروه کوانتوم جبری[۱۴] نامند. بنابراین با استفاده از توضیحات بالا، نتیجه می شود که گروه های کوانتوم جبری برای توسیع دادن مفهوم دوگان از جبرهای هاپف متناهی البعد به جبرهای هاپف نامتناهی البعد مطرح شده اند و تفاوت آنها با یک جبر هاپف معمولی در وجود یک عنصر یکه و وجود یک تابعک خطی پایای ناصفر می باشد.
در فصل ۳ فرض کنید $\mathcal{H}$ یک گروه کوانتوم جبری و $\widehat{\mathcal{H}}$ دوگان آن باشد. در این فصل، یک عملگر خطی یک به یک $\beta : \widehat{\mathcal{H}} \to M(\mathcal{H} \otimes \widehat{\mathcal{H}})$ تعریف می کنیم و نشان می دهیم که $\widehat{\mathcal{H}}$ همراه با β یک $\mathcal{H}$-کومدول چپ است. در چند مرحله این ادعا را ثابت می کنیم. فرض کنید $\omega \in \widehat{\mathcal{H}}$ و $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ فضای همه عملگرهای خطی از $\mathcal{H}$ به خودش باشد. در مرحله اول، دو عملگر خطی l_ω و r_ω از $\mathcal{H} \otimes \widehat{\mathcal{H}}$ به $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ تعریف می کنیم. از اینکه $\mathcal{H} \otimes \widehat{\mathcal{H}}$ یک زیرفضایی از $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ می باشد، بنابراین برای هر $h \in \mathcal{H}$ و $\omega_1 \in \widehat{\mathcal{H}}$ می توانیم نشان دهیم که $l_\omega(h \otimes \omega_1)$ و $r_\omega(h \otimes \omega_1)$ عنصرهایی از $\mathcal{H} \otimes \widehat{\mathcal{H}}$ می باشند. بنابراین l_ω و r_ω می توانند به عنوان عملگرهای خطی روی $\mathcal{H} \otimes \widehat{\mathcal{H}}$ در نظر گرفته شوند. در مرحله بعد، نشان می دهیم که (l_ω, r_ω) یک ضربگر روی $\mathcal{H} \otimes \widehat{\mathcal{H}}$ می باشد. بعبارت دیگر می توان یک تابع $\beta : \widehat{\mathcal{H}} \to M(\mathcal{H} \otimes \widehat{\mathcal{H}})$ با ضابطه $\beta(\omega) = (l_\omega, r_\omega)$ تعریف کرد.

یک C^*-جبر یکدار $\mathcal{A}$ دارای خاصیت (T) است هرگاه یک زیر مجموعه متناهی $\mathcal{F}$ از $\mathcal{A}$ و یک عدد $\varepsilon > ۰$ وجود داشته باشند، بطوریکه هر هیلبرت دومدول[۱۵] روی $\mathcal{A}$ با یک بردار یکه $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-مرکزی[۱۶]، دارای یک بردار ناصفر مرکزی باشد. به منبع [۲] مراجعه کنید. این تعریف مشابه تعریف خاصیت (T) کاژدان برای گروه های فشرده موضعی می باشد که در منبع [۲۱] مطرح شده است. یک گروه فشرده موضعی $\mathcal{G}$ دارای خاصیت (T) است هرگاه هر نمایش یکانی[۱۷] $(\pi, \mathcal{H})$ از $\mathcal{G}$ که دارای بردارهای تقریبا پایا است[۱۸]، آنگاه $\mathcal{H}$ دارای یک بردار پایای ناصفر نیز باشد. در منبع [۲] اثبات شده است که یک گروه گسسته شمارای $\mathcal{G}$ دارای خاصیت (T) است اگر و فقط اگر C^*-جبر گروهی ماکسیمال[۱۹] از $\mathcal{G}$ دارای خاصیت (T) باشد. در منبع [۶] خاصیت (T) برای یک جبر ون نیومن[۲۰] معرفی شده است و نشان داده شده است که یک گروه ICC گسسته شمارای $\mathcal{G}$ دارای خاصیت (T) است اگر و فقط اگر جبر ون نیومن تولید شده با استفاده از نمایش منظم چپ از $\mathcal{G}$ دارای خاصیت (T) باشد. در فصل ۴ یک مفهوم خاصیت (T) برای یک C^*-سیستم دینامیک $(\mathcal{A}, \mathcal{G}, \alpha)$ تعریف می شود که $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر یکدار و $\mathcal{G}$ یک گروه فشرده موضعی و α یک عمل روی $\mathcal{A}$ می باشد. در این فصل، نشان می دهیم که اگر $\mathcal{A}$ دارای خاصیت (T) قوی و $\mathcal{G}$ دارای خاصیت (T) باشد، آنگاه $(\mathcal{A}, \mathcal{G}, \alpha)$ دارای خاصیت (T) است. نشان می دهیم که اگر $\mathcal{G}$ یک گروه گسسته

[۱۴] Algebraic quantum group
[۱۵] Hilbert bimodule
[۱۶] Central
[۱۷] Unitary representation
[۱۸] Almost has invariant vectors
[۱۹] Full group C^*-algebra
[۲۰] Von Neumann algebra

و $(\mathcal{A},\mathcal{G},\alpha)$ دارای خاصیت (T) باشد، آنگاه C^*-ضرب متقابل شده[۲۱] از آن نیز دارای خاصیت (T) است. همچنین نشان می دهیم که اگر $\mathcal{A}$ یک جبر جابجایی و $\mathcal{G}$ یک گروه گسسته شمارا باشد بطوریکه یک نمایش یک به یک از $\mathcal{A}$ به فضای هیلبرت $\ell^2(\mathcal{G})$ وجود داشته باشد، آنگاه خاصیت (T) از $\mathcal{A}$ از $C_r^*(\mathcal{G})\otimes_{\min}\mathcal{A}$ خاصیت (T) از $\mathcal{G}$ را نتیجه می دهد، که $C_r^*(\mathcal{G})$ نشانگر C^*-جبر گروهی کاهشی[۲۲] از $\mathcal{G}$ می باشد.

مفهوم یک گروه وار[۲۳] در واقع توسیع از مفهوم یک گروه می باشد، ولی هر دو عناصر دلخواه از یک گروه وار لزوما با هم ترکیب نمی شوند. یک گروه وار می تواند دارای ساختارهای بیشتر مانند ساختار هندسی و توپولوژیکی باشد و در این مورد سازگاری این ساختارها با ساختار اصلی گروه وار می تواند مورد مطالعه قرار گیرد. نظریه گروه وارها در میدان های متفاوتی از ریاضیات مورد بحث قرار گرفته است. گروه وارهای توپولوژیکی و گروه وارهای دیفرانسیل پذیر یک نقش مهمی در جبر، نظریه اندازه، آنالیز هارمونیک و هندسه دیفرانسیل ایفا می کنند. به منابع [۹، ۴، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۵، ۳۱، ۲۷] مراجعه کنید. یک مجموعه $\mathcal{G}^{(1)}$ با مجموعه یکه های $\mathcal{G}^{(0)}$ دارای ساختار یک گروه وار است اگر وجود داشته باشند توابع $\Delta:\mathcal{G}^{(0)}\to\mathcal{G}^{(1)}$ و $\imath:\mathcal{G}^{(1)}\to\mathcal{G}^{(1)}$ و توابع $r:\mathcal{G}^{(1)}\to\mathcal{G}^{(0)}$ و $s:\mathcal{G}^{(1)}\to\mathcal{G}^{(0)}$ و یک ضرب شرکت پذیر $m:(\alpha,\beta)\mapsto\alpha\beta$ تعریف شده روی مجموعه

$$\mathcal{G}^{(2)}=\{(\alpha,\beta)\in\mathcal{G}^{(1)}\times\mathcal{G}^{(1)}\ \big|\ s(\alpha)=r(\beta)\}$$

بطوریکه برای هر $\alpha\in\mathcal{G}^{(1)}$ و $x\in\mathcal{G}^{(0)}$ روابط زیر برقرار باشند:

$$s(\alpha)=r(\alpha^{-1}),\qquad \alpha\alpha^{-1}=\Delta(r(\alpha)),$$

$$r(\Delta(x))=x=s(\Delta(x)),\quad \alpha\Delta(s(\alpha))=\alpha,\quad \Delta(r(\alpha))\alpha=\alpha$$

که $\imath(\alpha)=\alpha^{-1}$. در تعریف بالا، گروه وارهایی در نظر گرفته شده اند که $\mathcal{G}^{(1)}$ و $\mathcal{G}^{(0)}$ فقط مجموعه هایی بدون ساختارهایی دیگر مانند توپولوژی یا دیفرانسیل پذیری هستند. در موارد مهمتر، آنها دارای ساختار منیفلدهای دیفرانسیل پذیر هستند. یک گروه وار لی یا یک گروه وار دیفرانسیل پذیر یعنی یک گروه وار $(\mathcal{G}^{(1)},\mathcal{G}^{(0)})$ بطوریکه $\mathcal{G}^{(0)}$ و $\mathcal{G}^{(1)}$ و $\mathcal{G}^{(2)}$ منیفلدهای هموار و $s,r:\mathcal{G}^{(1)}\to\mathcal{G}^{(0)}$ فرورفتگی های[۲۴] هموار و $\Delta:\mathcal{G}^{(0)}\to\mathcal{G}^{(1)}$ یک غوطه وری[۲۵] هموار و همه نگاشت های دیگر هموار باشند. هر گروه لی یک گروه وار لی است. همچنین اگر M یک منیفلد هموار باشد، آنگاه $(M\times M,M)$ یک گروه وار لی است. توجه کنید گروه وارهای لی در مطالعه از منیفلدها و جبرها کاربرد دارند. برای هر منیفلد هموار فشرده M یک جبر جابجایی $C^\infty(M,\mathbb{R})$ از توابع دیفرانسیل پذیر روی M وابسته می شود و برای هر گروه لی $\mathcal{G}$ یک جبر $C_c(\mathcal{G})$ از توابع هموار با تکیه گاه فشرده روی گروه وابسته می شود. جبرهای $C^\infty(M,\mathbb{R})$

[۲۱] C^*-crossed product
[۲۲] Reduced group C^*-algebra
[۲۳] Groupoid
[۲۴] Submersions
[۲۵] Immersion

و $C_c(\mathcal{G})$ موردهای خاصی از جبر همگردشی[۲۶] از یک گروه وار دیفرانسیل پذیر می باشند و در این روش گروه وارهای دیفرانسیل پذیر یک ارتباطی بین هندسه و آنالیز هارمونیک فراهم می کنند [۹]. برای یک گروه وار دلخواه $(\mathcal{G}^{(1)}, \mathcal{G}^{(0)})$ یک رابطه هم ارزی روی فضای یکه $\mathcal{G}^{(0)}$ بصورت زیر وجود دارد. برای دو عنصر $t, l \in \mathcal{G}^{(0)}$ رابطه $t \sim l$ اگر و فقط اگر $s^{-1}(t) \cap r^{-1}(l) \neq \emptyset$ یک رابطه هم ارزی روی $\mathcal{G}^{(0)}$ می باشد. در فصل ۵ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر یکدار باشد. فرض کنید $Der(\mathcal{A})$ فضای همه مشتقات روی $\mathcal{A}$ باشد، یعنی فضای همه نگاشت های خطی X از $\mathcal{A}$ به خودش با رابطه $X(ab) = X(a)b + aX(b)$ باشد. این فضا یک مدول روی مرکز $Z(\mathcal{A})$ از $\mathcal{A}$ می باشد. همچنین با براکت $[X, Y] = XY - YX$ یک جبر لی است. یک زوج $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$ شامل یک مدول $\mathcal{G}$ روی مرکز $Z(\mathcal{A})$ از $\mathcal{A}$ همراه با یک عملگر خطی از $\mathcal{G}$ به $Der(\mathcal{A})$ که همچنین یک هومورفیسم $Z(\mathcal{A})$-مدول است، انتخاب می کنیم. در فصل ۵ چنین زوج هایی را یک $\mathcal{A}$ زوج می نامیم. در این فصل، یک گروه وار نسبت به یک $\mathcal{A}$ زوج وابسته می شود و روی رابطه هم ارزی بدست آمده از این گروه وار بحث می کنیم. اگر $\mathcal{G}$ یک جبر لی باشد، شرایطی که کلاس های هم ارزی زیرجبرهای لی آبلی از $\mathcal{G}$ باشند بررسی می شود. در این فصل، مثال هایی داده می شود و کلاس های هم ارزی برای آنها محاسبه می شود. در فصل ۶ یک گروه وار نسبت به هر میدان برداری X روی یک منیفلد هموار M وابسته می شود. اگر M یک منیفلد هموار از بعد یک باشد، نشان می دهیم که گروه وار ساخته شده دارای یک ساختار هموار می باشد و این گروه وار را تبدیل به یک گروه وار لی می سازد.

از این رساله مقالات زیر استخراج شده است:

1. H. Abbasi, GH. Haghighatdoost, Notes on regular multiplier Hopf algebras, *Caspian journal of Mathematical Sciences*, (accepted).

2. H. Abbasi, GH. Haghighatdoost, Groupoid associated to a smooth manifold, *Caspian journal of Mathematical Sciences*, (accepted).

3. H. Abbasi, GH. Haghighatdoost, I. Sadeqi, Property (T) for C^*-dynamical systems, *Wavelets and Linear algebras*, (accepted).

4. H. Abbasi, GH. Haghighatdoost, Y. Zamani, On the dual of an algebraic quantum group, *Icastor journal of Mathematical Sciences*, (accepted).

5. H. Abbasi, GH. Haghighatdoost, On the cyclic Homology of multiplier Hopf algebras, (submitted).

6. H. Abbasi, GH. Haghighatdoost, Modules with values in the space of all derivations of an algebra, *Konuralp Journal of Mathematics*, (accepted).

[۲۶] Convolution algebra

فهرست مطالب

فصل ۱

یک مدول پیش دوری برای جبرهای هاپف ضربگری منظم

در این فصل، یک مدول پیش دوری برای یک جبر هاپف ضربگری منظم که مجهز به یک شبه گروه تصویری و یک زوج پیمانه در پیچش همراه با برخی خواص دیگر می باشد، معرفی می شود. در سراسر این فصل، فضاهای برداری روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ می باشند. اگر V و W دو فضای برداری باشند، آنگاه $V \otimes W$ را به عنوان حاصلضرب تانسوری جبری از این دو فضا انتخاب می کنیم.

۱.۱ مفاهیم اولیه روی جبرهای هاپف ضربگری

یک جبر $\mathcal{A}$ را **ناتباهیده**[۱] نامیم هرگاه ضرب آن ناتباهیده باشد، یعنی برای هر $a \in \mathcal{A}$ اگر $a\mathcal{A} = ۰$ یا $\mathcal{A}a = ۰$ آنگاه نتیجه شود $a = ۰$. توجه کنید که هر جبر یکدار یک جبر ناتباهیده است. در منبع [۱۶] اثبات شده است که حاصلضرب تانسوری جبری از دو جبر ناتباهیده دوباره یک جبر ناتباهیده می باشد. یک **ضربگر**[۲] از یک جبر ناتباهیده $\mathcal{A}$ یعنی یک زوج (l, r) از عملگرهای خطی روی $\mathcal{A}$ بطوریکه برای هر $a, b \in \mathcal{A}$ رابطه $r(a)b = al(b)$ برقرار باشد. می توان بررسی کرد که اگر (l, r) یک ضربگر باشد، آنگاه روابط $l(ab) = l(a)b$ و $r(ab) = ar(b)$ برای هر $a, b \in \mathcal{A}$ برقرارند. فضای همه ضربگرهای از جبر $\mathcal{A}$ را با $M(\mathcal{A})$ نشان می دهیم و به آن **جبر ضربگری**[۳] از $\mathcal{A}$ نامیم. توجه کنید $M(\mathcal{A})$ یک جبر یکدار می باشد و $\mathcal{A}$ ایده آل دو طرفه در $M(\mathcal{A})$ است. به عنوان یک قرار داد برای $x = (l, r) \in M(\mathcal{A})$ و $a \in \mathcal{A}$ از نماد xa برای $l(a)$ و از نماد ax برای $r(a)$ استفاده می کنیم. با استفاده از این قرارداد، برای هر $x, y \in M(\mathcal{A})$ و $a \in \mathcal{A}$ ضرب در $M(\mathcal{A})$ با ضابطه $(xy)a := xya$ و $a(xy) := axy$ تعریف می شود. عنصر یکه از این جبر،

[۱] Non-degenerate
[۲] Multiplier
[۳] Multiplier algebra

ضربگر بدیهی (ι,ι) است، که $\iota:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ نشانگر تابع همانی می باشد. نگاشت طبیعی $D:\mathcal{A}\to M(\mathcal{A})$ با ضابطه $D(a)b:=ab$ و $bD(a):=ba$ یک نگاشت یک به یک است و اگر $\mathcal{A}$ یک جبر یکدار باشد، آنگاه نگاشت D پوشا است. بنابراین $M(\mathcal{A})=\mathcal{A}$ اگر و فقط اگر $\mathcal{A}$ یک جبر یکدار باشد. همچنین نگاشت های طبیعی $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\to M(\mathcal{A})\otimes M(\mathcal{A})\to M(\mathcal{A}\otimes\mathcal{A})$ وجود دارند. اگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو جبر ناتباهیده باشند، آنگاه یک همومورفیسم جبری φ از $\mathcal{A}$ به $M(\mathcal{B})$ را **ناتباهیده** نامیم هرگاه $\varphi(\mathcal{A})\mathcal{B}=\mathcal{B}=\mathcal{B}\varphi(\mathcal{A})$. با استفاده از منبع [۱۶] چنین همومورفیسم ناتباهیده φ می تواند به یک همومورفیسم یکدار منحصر به فرد φ از $M(\mathcal{A})$ به $M(\mathcal{B})$ با ضابطه $\varphi(x)\sum_i\varphi(a_i)b_i:=\sum_i\varphi(xa_i)b_i$ و $\sum_j d_j\varphi(c_j)\varphi(x):=\sum_j d_j\varphi(c_jx)$ توسیع یابد، که $\sum_j d_j\varphi(c_j)=\sum_i\varphi(a_i)b_i$. برای تعریف زیر به منبع [۱۶] رجوع کنید.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک جبر ناتباهیده و Δ از $\mathcal{H}$ به $M(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})$ یک همومورفیسم ناتباهیده باشد. آنگاه $(\mathcal{H},\Delta)$ را یک **جبر هاپف ضربگری**[۴] نامیم هرگاه

(i) $(\Delta\otimes\iota)\Delta=(\iota\otimes\Delta)\Delta$.

(ii) برای هر $h,k\in\mathcal{H}$ عناصر $\Delta(h)(۱\otimes k)$ و $(h\otimes ۱)\Delta(k)$ متعلق به $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ باشند.

(iii) توابع خطی $T_۱,T_۲:\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}\to\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ با ضابطه های

$$T_۱(h\otimes k)=\Delta(h)(۱\otimes k),\qquad T_۲(h\otimes k)=(h\otimes ۱)\Delta(k)$$

دوسویی باشند.

از اینکه Δ یک همومورفیسم ناتباهیده است، بنابراین $\Delta\otimes\iota$ و $\iota\otimes\Delta$ به جبر ضربگری $M(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})$ قابل توسیع اند، بنابراین شرط اول در تعریف بالا دارای مفهوم است. نماد ۱ در شرط دوم، نشانگر عنصر یکه از جبر ضربگری $M(\mathcal{H})$ می باشد و $\Delta(h)(۱\otimes k)$ ضرب دو عنصر از جبر $M(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})$ است. همومورفیسم Δ را یک **همضرب**[۵] روی $\mathcal{H}$ نامیم. **همضرب متضاد**[۶] Δ' را به عنوان ترکیب از Δ با عملگر تلنگر[۷] روی $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ در نظر بگیرید (توسعه یافته به $M(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})$). یک جبر هاپف ضربگری $(\mathcal{H},\Delta)$ را **منظم**[۸] نامیم هرگاه زوج $(\mathcal{H},\Delta')$ نیز دوباره یک جبر هاپف ضربگری باشد. توجه کنید هر جبر هاپف یک جبر هاپف ضربگری است و برعکس هر جبر هاپف ضربگری با یک عنصر یکه یک جبر هاپف می باشد. برای خواص زیر در مورد جبرهای هاپف ضربگری منظم به منبع [۱۶] رجوع کنید.

[۴] Multiplier Hopf algebra
[۵] Comultiplication
[۶] Opposite comultiplication
[۷] Flip operator
[۸] Regular

قضیه ۲.۱.۱. *فرض کنید $(\mathcal{H}, \Delta)$ یک جبر هاپف ضربگری منظم با تابع ضرب m باشد. آنگاه یک هومورفیسم ناصفر منحصر به فرد ε از $\mathcal{H}$ به $\mathbb{C}$ و یک ضد هومورفیسم معکوس پذیر منحصر به فرد S از $\mathcal{H}$ به $\mathcal{H}$ وجود دارند بطوریکه برای هر $h, k \in \mathcal{H}$ خواص زیر برقرارند:*

(i) $(\varepsilon \otimes \iota)\Delta = \iota = (\iota \otimes \varepsilon)\Delta$.

(ii) $m(S \otimes \iota)(\Delta(h)(1 \otimes k)) = \varepsilon(h)k$.

(iii) $m(\iota \otimes S)((k \otimes 1)\Delta(h)) = \varepsilon(h)k$.

به ε **همیکه**[۹] و به S **عملگر متقاطر**[۱۰] از $(\mathcal{H}, \Delta)$ نامیم. فرض کنید $(\mathcal{H}, \Delta)$ یک جبر هاپف ضربگری باشد. قرار می دهیم $\Delta^{(-1)} := \varepsilon$ و برای هر $n \geq 0$ قرار می دهیم $\Delta^{(n)} := (\Delta^{(n-1)} \otimes \iota)\Delta$. مشابه جبرهای هاپف، برای هر $n, m, r \geq 0$ رابطه زیر برقرار است [۱، ۱۴، ۱۵]:

$$\Delta^{(n+m+r)} = (\iota^{\otimes(n)} \otimes \Delta^{(m)} \otimes \iota^{\otimes(r)})\Delta^{(n+r)}.$$

از اینکه $\Delta^{(n)}(h) \in M(\mathcal{H}^{\otimes(n+1)})$، بنابراین برای هر $k_1, \cdots, k_{n+1}$ متعلق به $\mathcal{H}$، می توان از نمادگذاری زیر استفاده کنیم:

$$\Delta^{(n)}(h)(k_1 \otimes \cdots \otimes k_{n+1}) = \sum h_{(1)}k_1 \otimes \cdots \otimes h_{(n+1)}k_{n+1},$$

$$(k_1 \otimes \cdots \otimes k_{n+1})\Delta^{(n)}(h) = \sum k_1 h_{(1)} \otimes \cdots \otimes k_{n+1}h_{(n+1)}.$$

همچنین برای هر $h, k \in \mathcal{H}$ قرار می دهیم:

$$\Delta(h)(1 \otimes k) = \sum h_{(1)}1 \otimes h_{(2)}k,$$

$$(1 \otimes k)\Delta(h) = \sum 1h_{(1)} \otimes kh_{(2)},$$

$$\Delta(h)(k \otimes 1) = \sum h_{(1)}k \otimes h_{(2)}1,$$

$$(k \otimes 1)\Delta(h) = \sum kh_{(1)} \otimes 1h_{(2)}.$$

۲.۱ کوهمولوژی دوری

یک گردایه از فضاهای برداری $\{C^n\}_{n\geq}$، همراه با دنباله از نگاشت های خطی

$$C^0 \xrightarrow{b_1} C^1 \xrightarrow{b_2} C^2 \xrightarrow{b_3} \cdots$$

[۹] Counit
[۱۰] Antipode

را یک **مجتمع** [۱۱] نامیم هرگاه برای هر n رابطه $b_n b_{n-۱} = ۰$ برقرار باشد. عملگرهای b_n را **عملگرهای دیفرانسیل** [۱۲] نامیم. اگر چنین مجتمع وجود داشته باشد، آنگاه فضای خارج قسمت $H^n(C) := \frac{Ker(b_n)}{Im(b_{n-۱})}$ را **فضای برداری n-کوهمولوژی** [۱۳] وابسته به مجتمع $(b_\bullet, C^\bullet)$ نامیم. توجه کنید در حالت خاص داریم $H^\cdot(C) := Ker(b_۱)$. به هر عنصر از فضای $Ker(b_n)$ را یک **n-همدور** [۱۴] و هر عنصر از فضای $Im(b_{n-۱})$ را یک **n-هممرز** [۱۵] نامیم. کلاس $[c] \in H^n(C)$ از یک n-همدور $c \in Ker(b_n)$ را یک **n-کلاس کوهمولوژی** [۱۶] نامیم. مثال زیر، روش ساده تری برای ساخت یک مجتمع بیان می کند.

مثال ۱.۲.۱. فرض کنید یک گردایه از فضاهای برداری $\{C^n\}_{n\geq ۰}$ موجود باشد. برای ساخت یک مجتمع روی این گردایه، کافیست برای هر $n \geq ۱$ و $۰ \leq i \leq n$ عملگرهای خطی $\delta_i : C^{n-۱} \to C^n$ را تعریف کرد که برای هر $i < j$ رابطه $\delta_j \delta_i = \delta_i \delta_{j-۱}$ برقرار باشد. چنین عملگرهای δ_i را **عملگرهای چهره** [۱۷] نامیم. اگر چنین عملگرهایی برای یک گردایه $\{C^n\}_{n\geq ۰}$ موجود باشند، آنگاه با انتخاب

$$b_n := \sum_{i=۰}^{n} (-۱)^i \delta_i, \quad n \geq ۱,$$

می توان بررسی کرد که عملگرهای b_n در واقع عملگرهای دیفرانسیل روی گردایه مفروض می باشند و در نتیجه $(b_\bullet, C^\bullet)$ یک مجتمع است. علاوه بر این، با انتخاب

$$b'_n := \sum_{i=۰}^{n-۱} (-۱)^i \delta_i, \quad n \geq ۱,$$

زوج $(b'_\bullet, C^\bullet)$ همچنین یک مجتمع است. گردایه $\{C^n\}_{n\geq ۰}$ همراه با عملگرهای چهره را یک **مدول پیش سادکی** [۱۸] نامیم. در بیشتر موارد همراه با ساختار های بالا، عملگرهای دیگری وجود دارند که تنها برای محاسبات مورد نیاز می باشند. در مجموع، اگر روی گردایه مفروض عملگرهای $\sigma_i : C^{n+۱} \to C^n$ با شرایط

$$\sigma_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_{j+۱}, \quad i \leq j,$$

$$\sigma_j \delta_i = \delta_i \sigma_{j-۱}, \quad i < j, \qquad \sigma_j \delta_i = \delta_{i-۱} \sigma_j, \quad i > j+۱,$$

$$\sigma_j \delta_i = \iota, \quad i = j \ or \ i = j+۱,$$

[۱۱] Complex
[۱۲] Differential operator
[۱۳] n-Cohomology vector space
[۱۴] n-Cocycle
[۱۵] n-Coboundary
[۱۶] n-Cohomology class
[۱۷] Face operators
[۱۸] Presimplicial module

وجود داشته باشند، آنگاه گردایه را یک **مدول سادکی**[۱۹] نامیم. به عملگرهای σ_i **عملگرهای انحطاط**[۲۰] نامیم. عملگرهای انحطاط برای ساخت یک مجتمع کاربردی ندارند و همانطوری که در ادامه اشاره خواهد شد، در صورت وجود چنین عملگرهایی مجتمع $(b'_\bullet, C^\bullet)$ دارای فضاهای برداری کوهمولوژی صفر خواهد بود.

فرض کنید $(b_\bullet, C^\bullet)$ یک مجتمع باشد. گردایه از عملگرهای $\{s_n\}_{n\geq \cdot}$ بصورت $s_n : C^{n+۱} \to C^n$ را **هموتوپی قابل انقباض**[۲۱] برای مجتمع نامیم هرگاه روابط $s_\cdot b_۱ = \iota$ و $s_n b_{n+۱} + b_n s_{n-۱} = \iota$ برای هر $n \geq ۱$ برقرار باشند. اگر چنین هموتوپی قابل انقباض برای هر مجتمع موجود باشد، آنگاه همه فضاهای برداری کوهمولوژی این مجتمع صفر می باشند.

مثال ۲.۲.۱. فرض $\{C^n\}_{n\geq \cdot}$ یک مدول سادکی همراه با عملگرهای انحطاط σ_i و عملگرهای چهره δ_i باشد. قرار می دهیم $s_n := (-۱)^n \sigma_n$. آنگاه نتیجه می شود که $s_\cdot b'_۱ = \iota$ و $s_n b'_{n+۱} + b'_n s_{n-۱} = \iota$ و از اینجا مجتمع $(b'_\bullet, C^\bullet)$ دارای یک هموتوپی قابل انقباض است و بنابراین دارای فضاهای برداری کوهمولوژی صفر می باشد. توجه کنید که حتی بدون شرط $\sigma_j \delta_{j+۱} = \iota$ نتیجه این مثال صحیح می باشد.

فرض کنید $(b_\bullet, C^\bullet)$ و $(d_\bullet, A^\bullet)$ دو مجتمع باشند. یک **نگاشت زنجیر**[۲۲] $\varphi : C \to A$ یعنی یک گردایه از نگاشت های خطی $\varphi_n : C^n \to A^n$ بطوریکه برای هر n رابطه $\varphi_{n+۱} b_n = d_n \varphi_n$ برقرار باشد. یک نگاشت زنجیر $\varphi : C \to A$ بطور طبیعی یک نگاشت خطی $\varphi^* : H^n(C) \to H^n(A)$ با ضابطه $\varphi^*[c] := [\varphi(c)]$ القا می کند. یک **دنباله دقیق کوتاه**[۲۳] از مجتمع ها را بصورت $\cdot \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\phi} C \longrightarrow \cdot$ نشان می دهیم که φ و ϕ نگاشت های زنجیر و برای هر n نمودار $\cdot \longrightarrow A^n \xrightarrow{\varphi_n} B^n \xrightarrow{\phi_n} C^n \longrightarrow \cdot$ یک دنباله دقیق کوتاه از فضاهای برداری است. فرض کنید یک دنباله دقیق کوتاه به مانند بالا موجود باشد. فرض کنید $[c] \in H^n(C)$. می توان بررسی کرد که یک $n+۱$-همدور a در $A^{n+۱}$ وجود دارد که وابسته به c است. با تعریف $d^*[c] := [a] \in H^{n+۱}(A)$، نتیجه می شود که یک نگاشت خطی خوش تعریف $d^* : H^n(C) \to H^{n+۱}(A)$ وجود دارد که به آن **هومورفیسم اتصالی**[۲۴] نامیم.

قضیه ۳.۲.۱. *هر دنباله دقیق کوتاه $\cdot \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\phi} C \longrightarrow \cdot$ یک دنباله دقیق بلند بصورت*

$$\cdots \xrightarrow{\phi^*} H^{n-۱}(C) \xrightarrow{d^*} H^n(A) \xrightarrow{\varphi^*} H^n(B) \xrightarrow{\phi^*} H^n(C) \xrightarrow{d^*} H^{n+۱}(A) \xrightarrow{\varphi^*} \cdots$$

القا می کند که ϕ^* و φ^* نگاشت های القایی از نگاشت های زنجیر ϕ و φ و همچنین d^* هومورفیسم اتصالی است.

[۱۹] Simplicial module
[۲۰] Degeneracy operators
[۲۱] Contracting homotopy
[۲۲] Chain map
[۲۳] Short exact sequence
[۲۴] Connecting homomorphism

فرض کنید $\{C^n\}_{n\geq}$. یک گردایه از فضاهای برداری همراه با نگاشت های خطی b_v و b_h بصورت زیر باشد:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
b_v\uparrow & & b_v\uparrow & & b_v\uparrow & & b_v\uparrow & & \\
C^{۲} & \xrightarrow{b_h} & C^{۲} & \xrightarrow{b_h} & C^{۲} & \xrightarrow{b_h} & C^{۲} & \longrightarrow & \cdots \\
b_v\uparrow & & b_v\uparrow & & b_v\uparrow & & b_v\uparrow & & \\
C^{۱} & \xrightarrow{b_h} & C^{۱} & \xrightarrow{b_h} & C^{۱} & \xrightarrow{b_h} & C^{۱} & \longrightarrow & \cdots \\
b_v\uparrow & & b_v\uparrow & & b_v\uparrow & & b_v\uparrow & & \\
C^{۰} & \xrightarrow{b_h} & C^{۰} & \xrightarrow{b_h} & C^{۰} & \xrightarrow{b_h} & C^{۰} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

نمودار بالا را یک **دومجتمع**[۲۵] نامیم هرگاه روابط زیر برقرار باشند:

$$b_vb_v = ۰, \quad b_hb_h = ۰, \quad b_vb_h + b_hb_v = ۰$$

در واقع در هر دومجتمع، هر ستون و هر ردیف بطور مجزا یک مجتمع می باشند و علاوه بر این شرطی وجود دارد که ارتباط بین ردیف ها و ستون ها را نشان می دهد. قرار می دهیم

$$Tot(C^{\bullet})_n := C^{۰} \bigoplus C^{۱} \bigoplus \cdots \bigoplus C^n$$

با استفاده از شرایط گفته شده، می توان بررسی کرد که یک گردایه از فضاهای برداری مانند $\{Tot(C^{\bullet})_n\}_{n\geq}$. همراه با نگاشت های خطی $b_h + b_v$ یک مجتمع می باشد، که به آن **مجتمع کلی**[۲۶] وابسته به دومجتمع بالا نامیم.

مشابه ساخت یک مجتمع که از عملگرهای چهره استفاده شده است، روشی وجود دارد که منجر به ساخت یک دومجتمع می شود. قبل از این هدف، نیاز به تعریف برخی مفاهیم می باشد.

فرض کنید $\{C^n\}_{n\geq}$. یک مدول پیش سادکی همراه با عملگرهای چهره δ_i باشد. اگر روی این ساختار عملگرهای خطی $\tau_n : C^n \to C^n$ با خواص

$$\tau_n\delta_i = \delta_{i-۱}\tau_{n-۱}, \quad \forall\ ۱ \leq i \leq n,$$

$$\tau_n\delta_{۰} = \delta_n, \quad \tau_n^{n+۱} = \iota$$

[۲۵] Bicomplex

[۲۶] Total complex

موجود باشند، آنگاه ساختار مفروض را یک **مدول پیش دوری**[۲۷] نامیم. به عملگرهای τ_n **عملگرهای دوری**[۲۸] نامند. اگر به یک مدول پیش دوری $\{C^n\}_{n\geq۰}$ عملگرهای انحطاط σ_i همراه با خواص گفته شده در قبل و همچنین خواص

$$\tau_n\sigma_i = \sigma_{i-۱}\tau_{n+۱},\ ۱ \leq i \leq n, \qquad \tau_n\sigma_۰ = \sigma_n\tau^۲_{n+۱}$$

اضافه شود، آنگاه ساختار ایجاد شده را یک **مدول دوری**[۲۹] نامیم.

مثال ۴.۲.۱. فرض کنید $\{C^n\}_{n\geq۰}$ یک مدول دوری همراه با عملگرهای انحطاط σ_i و عملگرهای دوری τ_n باشد. قرار می دهیم $s_n := \sigma_n\tau_{n+۱}$. آنگاه نتیجه می شود که $s_۰b'_۱ = \iota$ و $s_nb'_{n+۱} + b'_ns_{n-۱} = \iota$ و از اینجا مجتمع $(b'_\bullet, C^\bullet)$ دارای یک هموتوپی قابل انقباض است و بنابراین دارای فضاهای برداری کوهمولوژی صفر می باشد. این مثال به همراه مثال ۲.۲.۱ نشان می دهند که هموتوپی های قابل انقباض لزوما منحصر به فرد نیستند.

به مانند قبل که برای ساخت یک مجتمع فقط از عملگرهای چهره استفاده شده بود، در اینجا نیز فقط با داشتن یک مدول پیش دوری می توان یک دومجتمع ساخت و عملگرهای انحطاط هیچ نقشی در ساختن این ساختار ایفا نمی کنند. ولی در ادامه خواهیم گفت که وجود عملگرهای انحطاط منجر به برخی از قضایا می شود که در محاسبات فضاهای برداری کوهمولوژی تاثیر گذارند. بنابراین بحث را با یک مدول پیش دوری $\{C^n\}_{n\geq۰}$ همراه با عملگرهای چهره δ_i و عملگرهای دوری τ_n شروع می کنیم. برای هر $n \geq ۰$ قرار دهید

$$\lambda_n := (-۱)^n\tau_n, \quad N_n := \sum_{i=۰}^{n}(\lambda_n)^i.$$

آنگاه با استفاده از روابط گفته شده می توان بررسی کرد که

$$(۱-\lambda_n)b_n = b'_n(۱-\lambda_{n-۱}), \qquad b_nN_{n-۱} = N_nb'_n,$$

$$(۱-\lambda_n)N_n = N_n(۱-\lambda_n) = ۰$$

[۲۷] Precyclic module
[۲۸] Cyclic operators
[۲۹] Cyclic module

بنابراین دومجتمع $CC^{*,*}(C)$ بصورت زیر وجود دارد:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
b_3 \uparrow & & -b'_3 \uparrow & & b_3 \uparrow & & -b'_3 \uparrow & & \\
C^2 & \xrightarrow{1-\lambda_2} & C^2 & \xrightarrow{N_2} & C^2 & \xrightarrow{1-\lambda_2} & C^2 & \longrightarrow & \cdots \\
b_2 \uparrow & & -b'_2 \uparrow & & b_2 \uparrow & & -b'_2 \uparrow & & \\
C^1 & \xrightarrow{1-\lambda_1} & C^1 & \xrightarrow{N_1} & C^1 & \xrightarrow{1-\lambda_1} & C^1 & \longrightarrow & \cdots \\
b_1 \uparrow & & -b'_1 \uparrow & & b_1 \uparrow & & -b'_1 \uparrow & & \\
C^0 & \xrightarrow{1-\lambda_0} & C^0 & \xrightarrow{N_0} & C^0 & \xrightarrow{1-\lambda_0} & C^0 & \longrightarrow & \cdots
\end{array}
$$

کوهمولوژی مجتمع کلی $Tot(CC^{*,*}(C))$ از دومجتمع بالا را **کوهمولوژی پیش دوری**[۳۰] $HC^*(C)$ متناظر با مدول پیش دوری بالا نامیم. دومجتمع $CH^{*,*}(C)$ را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$
\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
b_3 \uparrow & & -b'_3 \uparrow \\
C^2 & \xrightarrow{1-\lambda_2} & C^2 \\
b_2 \uparrow & & -b'_2 \uparrow \\
C^1 & \xrightarrow{1-\lambda_1} & C^1 \\
b_1 \uparrow & & -b'_1 \uparrow \\
C^0 & \xrightarrow{1-\lambda_0} & C^0
\end{array}
$$

مشاهده می شود که $CH^{*,*}(C)$ در واقع دو ستون اول از دومجتمع $CC^{*,*}(C)$ می باشد. کوهمولوژی مجتمع کلی $Tot(CH^{*,*}(C))$ را **کوهمولوژی هوخشیلد**[۳۱] نامیم و با نماد $HH^*(C)$ نشان می دهیم. در بیشتر موارد کوهمولوژی هوخشیلد را فقط با استفاده از کوهمولوژی ستون اول از $CH^{*,*}(C)$ یعنی کوهمولوژی حاصل از مجتمع

$$C^0 \xrightarrow{b_1} C^1 \xrightarrow{b_2} C^2 \xrightarrow{b_3} \cdots$$

[۳۰] Precyclic cohomology
[۳۱] Hochschild cohomology