# فهرست مطالب

# چکیده


در این پایان نامه الگوریتم تقریب تصادفی را برای مسأله‌ی برش بیشینه و مسأله‌ی $MAX-2SAT$ ارائه می‌دهیم که جواب هایی با امید ریاضی حداقل $0.87856$ برابر مقدار بهینه به وجود می‌آورد. این الگوریتم از یک تکنیک ظریف و ساده استفاده می‌کند که به طور تصادفی جواب را به رهاسازی بهینه‌سازی غیر خطّی گرد می‌کند. بهترین الگوریتم تقریبی شناخته شده برای این مسائل تضمین عملی $\frac{1}{2}$ برای مسأله برش بیشینه و$\frac{3}{4}$ برای مسأله‌ی $MAX-2SAT$ دارد. توسعه جزئی تحلیل به الگوریتم $0.79607$ـ تقریب برای مسأله برش بیشینه جهت‌دار و الگوریتم $0.758$ـتقریب برای مسأله $MAX-SAT$ منتهی می‌شود که بهترین الگوریتم شناخته شده به ترتیب تضمین عملی $\frac{1}{4}$ و $\frac{3}{4}$ داشت. این الگوریتم، اوّلین پیشرفت اساسی در تقریب برش بیشینه تا سال ۱۹۹۷ و اوّلین کاربرد از بهینه‌سازی نیمه‌معیّن در طرّاحی الگوریتم تقریب می‌دهد. البتّه تقریب‌های بهتری نیز در سال‌های بعد به وجود آمده‌اند که در حوزه بحث این تحقیق نمی‌باشند.



واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی نیمه‌معیّن، برش‌بیشینه، برش‌بیشینه جهت‌دار، رهاسازی.

# پیش‌گفتار

فرض می‌کنیم $G=(V,E)$ یک گراف باشد که در آن $V$ مجموعه رأس‌ها و $E$ مجموعه‌ی یال‌ها باشد. افراز $V$ به دو زیرمجموعه‌ی $S$ و $\bar{S}=V-S$ را یک «برش» می‌نامیم. در نظریّه گراف مسأله‌ی «برش بیشینه»، افراز مجموعه $V$ به دو زیر مجموعه $S$ و $\bar{S}$ می‌باشد، طوری که مجموع وزن یال‌هایی که یک رأس آن‌ها در $S$ و رأس دیگر در $\bar{S}$ قرار دارد، بیشینه شود. مسأله برش بیشینه کاربردهای فراوانی دارد که از آن جمله می‌توان به کاربرد آن در طرّاحی شبکه[۷] و مسأله‌ی Ising spin glass در فیزیک آماری[۴] اشاره کرد. گرافی که تعداد متناهی رأس دارد، تعداد متناهی برش دارد. در نتیجه در یک گراف، برش بیشینه را می‌توان با شمردن و مقایسه کردن وزن برش‌ها پیدا کرد. ولی این کار برای گراف‌هایی که تعداد رأس‌هایشان زیاد است عملی نیست؛ چون تعداد برش‌ها با افزایش تعداد رأس‌ها به طور نمایی رشد می‌کند. مسأله حداکثر برش یک مسأله $\mathcal{NP}$ـکامل است. برای حلّ تقریبی مسأله‌ی برش بیشینه، آن را به صورت یک مسأله‌ی بهینه‌سازی نیمه‌معیّن قالب‌بندی می‌کنند که این ایده اوّلین بار توسط لوواشز[1] و شور[2] مطرح شد. یکی از روش‌های حلّ مسأله‌ی بهینه‌سازی نیمه‌معیّن روش نقطه درونی است .

هدف از این پایان‌نامه این است که روش بهینه‌سازی نیمه‌معیّن برای حلّ تقریب مسأله برش

[1] Lovasz

[2] Schur

بیشینه را بررسی کنیم.

این پایان‌نامه به صورت زیر مرتّب شده است: در فصل اوّل این پایان نامه پس از تعریف چند مفهوم مقدّماتی، به معرّفی مسأله‌ی برش بیشینه می‌پردازیم. سپس بهینه سازی صحیح، بهینه‌سازی نیمه‌معیّن و روش نقطه درونی را برای حلّ این مسأله مطرح می‌کنیم. در ادامه، مسأله برش بیشینه را به صورت بهینه‌سازی نیمه‌معیّن، صحیح و خطّی قالب‌بندی می‌کنیم. در فصل دوّم رهاسازی مسأله برش بیشینه را در نظر گرفته و الگوریتم تقریب تصادفی را برای حلّ آن مطرح می‌کنیم که جوابی با تقریب درستی ۰.۸۷۸۵۶ ارائه می‌دهد. در فصل سوّم هم مسأله $MAX-SAT$ و $MAX-2SAT$ و برش بیشینه جهت‌دار را قالب‌بندی می‌کنیم و نحوه محاسبه امید ریاضی آنها را نیز بیان می‌کنیم.

# فصلِ ۱

# مفاهیم مقدّماتی

در این فصل، پس از تعریف چند مفهوم مقدّماتی، به معرّفی مسأله‌ی برش بیشینه می‌پردازیم. سپس بهینه‌سازی خطّی، بهینه‌سازی عدد صحیح، بهینه‌سازی نیمه‌معیّن و برخی مفاهیم مرتبط با آن را مطرح کرده و در ادامه، مسأله برش بیشینه را به شکل بهینه‌سازی خطّی و بهینه‌سازی عدد صحیح و نیمه‌معیّن قالب‌بندی می‌کنیم.

## ۱.۱ تعاریف اوّلیّه

**گراف** $G(V,E)$ شامل مجموعه‌ی متناهی $V$ و مجموعه‌ی $E$ که تشکیل شده از جفت‌هایی به صورت $(i,j)$ است که $i,j$ عضو $V$ هستند، است. $V$ را مجموعه‌ی رأس‌ها و $E$ را مجموعه‌ی یال‌ها می‌نامیم. اگر ترتیب رأس‌ها در یال مهمّ باشد یعنی $(i,j) \neq (j,i)$ در این صورت گراف را جهت‌دار گویند. اگر به هر یال گراف عددی (معمولاً نامنفی) نسبت دهیم در این صورت گراف را وزن‌دار گویند.

مجموعه $C$ در $\mathbb{R}^n$ **محدّب** گفته می‌شود هرگاه به ازای هر دو نقطه دلخواه $x_1, x_2 \in C$ و به

ازای هر $\lambda \in [0,1]$ داشته‌باشیم: $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$؛ که از لحاظ هندسی $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ نقطه‌ای روی پاره خطی است که دو نقطه $x_1, x_2$ را به هم وصل می‌کند. به هر نقطه به شکل $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ که $0 \leq \lambda \leq 1$ ترکیب محدب $x_1, x_2$ گفته می‌شود. اگر $\lambda \in (0,1)$ و $x_1 \neq x_2$؛ این ترکیب را به طور اکید محدب گویند[۵]. **نیم فضا** مجموعه‌ای از نقاط به صورت $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq k\}$ که $a \in \mathbb{R}^n$ بردار ناصفر و $k \in \mathbb{R}$. اشتراک تعداد متناهی نیم فضا را **چند وجهی** گویند؛ $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ که در آن $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$ است. برای مجموعه $S \in \mathbb{R}^n$، **پوسته‌ی محدّب** $S$ را، که با Conv.hull نشان می‌دهیم کوچک‌ترین مجموعه محدّب شامل $S$ است و به صورت

$$Conv.hull(S) = \{x | x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \ , \ i = 1, \ldots, k \ , \ \lambda_i \in [0,1] \ , \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \ , \ k \geq 1\},$$

تعریف می‌شود. به مجموعه‌ای از بردارها **چندسقفی** گویند هرگاه پوسته‌ی محدّب تعداد متناهی بردار باشد، یعنی بردارهای $x_1, x_2, \ldots, x_k$ از $\mathbb{R}^n$ موجود باشند به طوری که

$$P = Conv.hull\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

چند سقفی یک چندوجهی کران‌دار است.

تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **محدّب** گفته می‌شود اگر به ازای هر دو بردار $x_1, x_2$ نامساوی

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \quad , \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

برقرار باشد. تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **محدّب نقطه‌وار** گفته می‌شود هرگاه برای هر دو بردار $x_1, x_2$، $\lambda$ای وجود داشته باشد که نامساوی

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

برقرار باشد. تابع $f$ **مقعّر** است اگر و فقط اگر $-f$ محدّب باشد. اگر $f$ تابعی از بردار $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ باشد $\frac{\partial f}{\partial x}$ را گرادیان $f$ گوییم و برابر است با: $\frac{\partial f}{\partial x}=(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}).$ و هسیان $f$ که با $H(f(x))$ نشان می‌دهیم برابر است با: $H(f(x))=[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}]$.

مجموعه‌ی $\{u_i\}$ از بردارها در $\mathbb{R}^n$ را **متعامد** گوییم هر گاه به ازای $i\neq j$ داشته باشیم؛ $u_i^T u_j=0$. این مجموعه را متعامد یکّه گوییم، هرگاه برای هر $i$، $\|u_i\|=1$. با توجّه به اینکه هر بردار ناصفر $u\in\mathbb{R}^n$ با قرار دادن $v=\frac{u}{\|u\|}$ نرمال می‌شود، بنابراین می‌توان یک مجموعه متعامد یکّه را از یک مجموعه متعامد از بردارهای ناصفر، به وسیله نرمال کردن بردارهای آن به دست آورد.

ماتریس حقیقی $A$ را **متعامد** گوییم هرگاه داشته باشیم: $A^T=A^{-1}$ .

گزاره‌های زیر برای ماتریس حقیقی $A$ هم ارز هستند[۱۳]:

۱. $A$ متعامد است.

۲. سطرهای $A$ یک مجموعه متعامد یکّه را تشکیل می‌دهند.

۳. ستون های $A$ یک مجموعه متعامد یکّه را تشکیل می‌دهند.

در فضای $\mathbb{R}^3$ **سطوح جبری**، سطوحی متشکّل از نقاط $(x,y,z)$ هستند که در یک چند جمله‌ای سه متغیّره $P(x,y,z)$ صدق کنند. درجه‌ی یک سطح جبری بالاترین درجه در بین تمام جمله‌های آن است. به عنوان مثال کره یک سطح جبری از درجه‌ی دو است.

برای گراف $G$ با مجموعه رأس‌های $V=\{1,2,\dots,n\}$ و یال‌های $E$ و $S\subseteq V$، **برش**

متناظر با مجموعه $S$ که با $\delta(S)$ نشان داده می‌شود به صورت

$$\delta(S)=\{(i,j)\in E: i\in S, j\notin S \ \text{یا}\ i\notin S, j\in S\},$$

است. اگر یال‌های گراف وزن‌دار باشد، آن‌گاه وزن برش به صورت:

$$W(\delta(S))=\sum_{(i,j)\in\delta(S)} w_{ij},$$

تعریف می‌شود. مسأله **برش بیشینه** عبارت است از پیدا کردن برشی با وزن بیشینه در گراف و قالب آن به صورت زیر است:

$$\max\{W(\delta(S)): S\subseteq V\}.$$

در گراف جهت‌دار $G=(V,E)$ که $w_{ij}$ وزن هر یال جهت‌دار $(i,j)\in E$ است، $i$ را دم یال و $j$ را سر آن گوییم. **برش بیشینه جهت‌دار** آن است که مجموعه رأس‌های $S$ را طوری پیدا کنیم که مجموع وزن یال‌هایی که دمشان در $S$ و سرشان در $V-S$ باشد را بیشینه کنیم.

فرض می‌کنیم $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از عبارات بولی است که هر عبارت ترکیب فصلی حروف از مجموعه متغیّرهای $\{x_1,\ldots,x_n\}$ است . منظور ازحرف در اینجا $x$ یا $\bar{x}$ است . تعداد حروف مجزا در $C_j$ را با $l(C_j)$ نشان می‌دهیم برای هر عبارت $C_j\in\mathcal{C}$ یک وزن نامنفی $w_j$ در نظر می‌گیریم. $SAT$[1] به معنی مصداق‌پذیری است و $C_j\in\mathcal{C}$ را اگر به صورت $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ نشان دهیم $C_j$ **مصداق‌پذیر** گوییم هرگاه $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\{0,1\}$ وجود داشته باشد به طوریکه $f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=1$ باشد.

مسأله‌ی $MAX-SAT$ آن است که طوری مقدارهای درست به $x_1,\ldots,x_n$ نسبت دهیم که جمع وزن عبارات درست بیشینه شود. $MAX-2SAT$ هم حالت خاصّی از $MAX-SAT$

[1] Satisfiability

است طوری که طول عبارات $C_j$ حداکثر دو است.

در نظریه پیچیدگی محاسباتی، زمان حلّ (محاسبه) یک مسأله، تعداد مراحلی است که برای حلّ آن مسأله طی می‌شود. گوییم یک مسأله در زمان چندجمله‌ای قابل حلّ است هرگاه الگوریتمی برای حلّ مسأله موجود باشد به طوری که زمان حلّ مسأله از بالا به یک چندجمله‌ای بر حسب بعد مسأله کران‌دار باشد (زمان حلّ مسأله و اجرای محاسبات آن بزرگ‌تر از تابع چندجمله‌ای نباشد). به عنوان مثال اگر تعداد مراحل حلّ یک مسأله برابر$An^2$ ($A$ مقداری ثابت است) باشد آن‌گاه پیچیدگی محاسباتی این مسأله را با $O(n^2)$ نشان می‌دهیم. رده تمام مسأله‌هایی که می‌توانیم الگوریتمی برای حلّ آنها در مدّت زمان چندجمله‌ای پیدا کنیم را با $\mathcal{P}$ نشان می‌دهیم. یک مسأله به رده $\mathcal{NP}$ تعلّق دارد اگر ندانیم چنین الگوریتمی برای حلّ مسأله وجود دارد. مسأله $\pi$ به رده مسأله‌های $\mathcal{NP}$-کامل تعلّق دارد اگر مسأله دیگری در رده $\mathcal{NP}$ را بتوان در زمان چند جمله‌ای به $\pi$ کاهش داد. ثابت شده است، مسأله برش بیشینه یک مسأله $\mathcal{NP}$-کامل است[۱۱].

رده $\mathcal{NP}$ - سخت، رده مسائلی است که حداقل از مسائل رده $\mathcal{NP}$، سخت‌تر است. به عبارت دیگر مسأله‌ی $H$ یک مسأله‌ی $\mathcal{NP}$-سخت است اگر و فقط اگر یک مسأله‌ی $\mathcal{NP}$-کامل مثل $L$ موجود باشد که در زمان چندجمله‌ای مسأله $H$ را به مسأله $L$ تبدیل کند.

مقدار $\alpha$ را تضمین عملی الگوریتمی گویند هرگاه جوابی که آن الگوریتم به وجود می‌آورد $\alpha$ برابر جواب اصلی باشد.

## ۲.۱ بهینه‌سازی عدد صحیح

بهینه‌سازی عدد صحیح[۲] مسأله‌ای است که در آن یک یا تمامی متغیّرهای تصمیم عدد صحیح هستند. بهینه سازی عدد صحیح را محض گویند اگر تمامی متغیّرهای تصمیم عدد صحیح باشند و آن را مخلوط گویند اگر تنها برخی از متغیّرهای تصمیم صحیح باشند.
اگر چه چند الگوریتم متناهی برای حلّ مسأله بهینه‌سازی عدد صحیح ابداع شده است، ولی برخلاف بهینه‌سازی خطّی که با اندازه‌های بسیار بزرگ در مدّت زمان نسبتاً کوتاه با روش‌های نقطه درونی[۱۸] قابل حل هستند، حلّ بهینه‌سازی عدد صحیح با الگوریتم‌های موجود از کارایی یکنواخت خوبی برخوردار نیست.
صورت ریاضی مسأله‌ی بهینه‌سازی عدد صحیح خطّی به صورت

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \\ \text{s.t.} & Ax = b \quad \text{یا} \quad Ax \leq b, \end{array}$$

است که در آن $x$ بردار صحیح است. روش‌های حلّ بهینه‌سازی عدد صحیح را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد:

۱) روش‌های برش: در روش‌های برش، ابتدا جواب بهینه‌ی مسأله خطّی پیوسته (مسأله‌ی خطّی که در آن قید صحیح بودن از متغیّرها برداشته شود) محاسبه می‌شود. سپس با افزودن قیدهایی، ناحیه‌ی شدنی به تدریج تعدیل می‌گردد تا این که جواب بهینه مسأله پیوسته متناظر، یک جواب صحیح را به وجود آورد. وجه تسمیّه برش صفحه از آنجا ناشی می‌شود که افزودن هر قید، به طور مؤثّر قسمتی از ناحیه‌ی شدنی مسأله‌ی پیوسته را حذف می‌کند به طوری که قسمت بریده شده شامل جواب صحیح شدنی نباشد[۲].

۲) روش‌های جستجو: روش جستجو از ایده‌ی ساده بررسی کلّیه ناحیه‌ی شدنی مسأله پیوسته

استفاده می‌کند. ایده اساسی عبارت است از ابداع یک آزمون زیرکانه به طوری که برای به دست آوردن جواب بهینه، قسمتی از جواب‌های صحیح ناحیه‌ی شدنی آزمایش می‌شود. متداول‌ترین روش جستجو، روش شاخه و کران است[۲].
بهینه‌سازی درجه دو صحیح، بهینه‌سازی است که در آن درجه تابع هدف دو است و قیدهای آن خطّی‌اند و مقدار متغیّرها در آن $0$ یا $1$ است.

## ۱.۳ بهینه‌سازی نیمه‌معیّن

ماتریس $A_{n\times n}$ را نیمه‌معین مثبت گویند هرگاه برای هر بردار $x\in\mathbb{R}^n$ داشته باشیم $x^TAx\geq 0$.
برای نشان دادن نیمه‌معیّن مثبت بودن یک ماتریس از علامت $\succeq$ استفاده می کنیم.
جملات زیر برای ماتریس متقارن $A$ معادل هستند[۱۲]:

۱. ماتریس $A$ نیمه‌معین مثبت است .

۲. همهٔ مقادیر ویژه‌ی $A$ نامنفی هستند.

۳. یک ماتریس $B$ با ابعاد $n\times n$ وجود دارد به طوری که $A=B^TB$ و $rank(A)=rank(B)$.

فضای ماتریس‌های متقارن حقیقی $n\times n$ را با نماد $S^n$ و بعد آن را با نماد $\bar{n}^2$ نمایش می‌دهیم که برابر است با:

$$\bar{n}^2=\frac{n(n+1)}{2}.$$

تجزیه‌ی ماتریس نیمه‌معیّن مثبت $A$ به شکل $B^TB$ بسیار حائز اهمیّت است و در بسیاری از الگوریتم‌های عددی در حلّ مسأله استفاده می‌شود. یک تعبیر این تجزیه این است که می‌توانیم

ستون $i$ام ماتریس $B$ را به صورت بردار $v_i$ در نظر بگیریم. در واقع مؤلّفه $a_{ij}$ ماتریس $A$، حاصل ضرب داخلی بردارهای $v_j$ و $v_i$ می‌باشد یعنی $a_{ij} = {v_i}^T v_j$.

مجموعه ی $K$ را **مخروط**[۲۲] گوییم هرگاه به ازای هر $\lambda \geq 0$ داشته باشیم:

$$\lambda K = K.$$

مخروطی که نقاط حدّی خود را شامل باشد را **بسته** گویند و آن را **نقطه‌دار** گویند هرگاه :

$$K \bigcap \{-K\} = 0.$$

مخروط نیمه‌معیّن مثبت به مجموعه‌ی ماتریس‌های نیمه‌معیّن مثبت گفته می‌شود و آن را با $S_+^n = \{X \in S^n : X \succeq 0\}$ نشان می‌دهیم. مخروط محدّب $K$ را در نظر بگیرید. مجموعه‌ی محدّب $F$، $F \subseteq K$ را یک **وجه** گوییم، هر گاه برای هر دو نقطه $X_1, X_2 \in K$ و به ازای $\alpha \in (0,1)$، اگر ترکیب محدّب اکید $X_1, X_2$ به $F$ تعلّق داشته باشد، آن گاه داشته باشیم:$X_1, X_2 \in F$.

در مخروط نیمه معیّن مثبت $S_+^n$ ثابت می‌شود که مجموعه‌ی محدّب $F$ یک وجه از $S_+^n$ است اگر و فقط اگر

$$F = 0 \;\; ; \;\; 0 \in S^n \;\; \text{یا} \;\; F = \{X : X = Q\Lambda Q^T, \Lambda \in S_+^k\},$$

که در آن $F$ مجموعه‌ی ماتریس‌های نیمه‌معیّن مثبت متقارن از رتبه $k$ است و برای $k \in \{1, \ldots, n\}$ ماتریس $Q$، متعلّق به ماتریس‌های $n \times k$ با رتبه‌ی $k$ است [۱۳]. تجزیه‌ی $X$ به صورت $X = Q\Lambda Q^T$ تجزیه‌ی طیفی $X$ نامیده می‌شود که در آن $\Lambda$ یک ماتریس قطری است که روی قطر اصلی آن مقدارهای ویژه $X$ قرار دارند و ستون‌های $Q$ بردارهای ویژه متناظر

با مقدارهای ویژه $X$ هستند. ضرب داخلی روی ماتریس‌های متقارن حقیقی را به شکل

$$C \bullet X = Trace(CX) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_{ij},$$

که برابر مجموع عناصر قطر اصلی ماتریس $CX$ است، تعریف می‌شود.
قالب استاندارد مسأله بهینه‌سازی نیمه‌معیّن به شکل زیر است:

$$\begin{array}{lll} & \min & C \bullet X \\ (SDP) & \text{s.t.} & A_i \bullet X = b_i \quad i = 1, \cdots, k \\ & & X \succeq 0, \end{array}$$

که در آن $A_i, C, X \in S^n$ و دوگان آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{array}{lll} & \max & b^T y \\ (SDD) & \text{s.t.} & \mathcal{A}^T y + S = C \\ & & S \succeq 0, \end{array}$$

که در آن $S, C \in S^n$ و $b, y \in \mathbb{R}^k$ و $\mathcal{A}^T y = \sum_{i=1}^{k} y_i A_i$ و ماتریس $S$ متغیّر کمبود مسأله‌ی $(SDD)$ است. به هر ماتریس نیمه‌معیّن مثبت $X$ که در قیدهای مسأله‌ی بهینه‌سازی نیمه‌معیّن $(SDP)$ صدق کند جواب شدنی اوّلیّه و به هر بردار $y$ و ماتریس نیمه‌معیّن مثبت $S$ که در قیدهای دوگان بهینه‌سازی معیّن صدق کند جواب شدنی دوگان گفته می‌شود.
یاد آوری می‌کنیم که بهینه‌سازی نیمه‌معیّن، یک بهینه‌سازی خطّی روی مخروط ماتریس‌های نیمه‌معیّن $S^n$ است که در آن متغیّرهای برداری $x \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n_+$، مخروط نامنفی از بردارها)، با متغیّر ماتریسی $X \in S^n_+$ ($S^n_+$ مخروط نامنفی از ماتریس‌های نیمه‌معیّن مثبت) جایگزین شده است. اگر $A_i, C$ ماتریس‌های قطری باشند آن‌گاه $X, S$ نیز ماتریس‌های قطری هستند که در این صورت مسأله‌ی $(SDP)$ به مسأله‌ی بهینه‌سازی خطّی تبدیل می‌شود.
بهینه‌سازی‌های خطّی و نیمه‌معیّن تفاوت‌ها و شباهت‌هایی با هم دارند. تفاوت عمده‌ی

موجود در ناحیه‌ی شدنی آن‌هاست. ناحیه‌ی شدنی بهینه‌سازی خطّی قسمتی از یک مخروط چندوجهی نامنفی شامل متغیّرهای برداری $x \in \mathbb{R}^n_+$ است، ولی ناحیه‌ی شدنی در بهینه‌سازی نیمه‌معیّن قسمتی از یک مخروط ناچندوجهی شامل ماتریس‌های نیمه‌معیّن مثبت متقارن است. مرز ناحیه‌ی شدنی بهینه‌سازی نیمه‌معیّن که می‌تواند قسمتی از مرزهای (شاید همه) مخروط نیمه‌معیّن مثبت شامل آن ناحیه‌ی شدنی باشد، در حالت کلّی از سطوح جبری تکّه‌ای تشکیل می‌شود که همیشه جواب بهینه (در صورت وجود) روی آن قرار می‌گیرد. به دلیل غیرخطّی بودن مرز ناحیه‌ی شدنی مسأله‌ی بهینه‌سازی نیمه‌معیّن، برخلاف بهینه‌سازی خطّی، یک مسأله‌ی بهینه‌سازی محدّب غیرخطّی است[۱۵]. ویژگی که هم در بهینه‌سازی خطّی و هم در بهینه‌سازی نیمه‌معیّن صدق می‌کند قضیّه ضعیف دوگانی است. در ادامه قضیّه ضعیف دوگانی را برای بهینه‌سازی نیمه معیّن بیان می‌کنیم.

**قضیه ۱.۱** [۲۱] اگر ماتریس $X$ یک نقطه‌ی شدنی برای مسأله‌ی $(SDP)$ و بردار $y$ و ماتریس $S$ یک نقطه‌ی شدنی برای مسأله‌ی $(SDD)$، آن گاه

$$b^T y \leq C \bullet X.$$

این قضیّه بیان می‌کند که مقدار تابع هدف در هر جواب شدنی مسأله بهینه‌سازی اوّلیّه، کران بالایی برای مقدار بهینه تابع هدف دوگان آن مساله است.

**شکاف دوگانی** که به صورت اختلاف بین مقدار تابع هدف مسأله‌ی اوّلیّه و دوگان تعریف می‌شود برای بهینه‌سازی نیمه‌معیّن برابر است با:

$$C \bullet X - b^T y = X \bullet S.$$

فرض کنیم $(X, y, S)$ جواب بهینه‌ی مسأله‌های $(SDP)$ و $(SDD)$ باشد. از صفر بودن شکاف دوگانی داریم[۲۱]:

$$X \bullet S = 0 \Rightarrow Trace(XS) = Trace(X^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}} S) = Trace(X^{\frac{1}{2}} S X^{\frac{1}{2}}) = 0,$$

که در آن بنا به نیمه‌معیّن مثبت بودن $X$، تجزیه‌ی طیفی $X$ به صورت $X = Q\Lambda Q^T$ است و چون $\Lambda$ نامنفی است، نتیجه می‌گیریم که $X^{\frac{1}{2}} = Q\Lambda^{\frac{1}{2}} Q^T$.
با توجّه به اینکه $X^{\frac{1}{2}} S X^{\frac{1}{2}}$ یک ماتریس نیمه‌معیّن مثبت متقارن است[۲۲] و $Trace(X^{\frac{1}{2}} S X^{\frac{1}{2}}) = 0$، داریم [۲۱]:

$$X^{\frac{1}{2}} S X^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow (X^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}})(S^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}}) = XS = 0.$$

پس **شرط مکمّل برای بهینه‌سازی نیمه‌معیّن** به شکل زیر است:

$$XS = 0$$

در مسأله‌ی بهینه‌سازی خطّی، اگر شکاف دوگانی صفر باشد، آن‌گاه هر دو مسأله‌ی اوّلیّه و دوگان به مقدار بهینه‌ی خود می‌رسند و مقدار بهینه‌ی هر دو مسأله با هم برابر هستند (قضیّه‌ی قوی دوگانی برای بهینه‌سازی خطّی). امّا در بهینه‌سازی نیمه‌معیّن ممکن است یکی از مقادیر بهینه به دست نیاید و یا اینکه اگر این مقدار حاصل شود، شکاف دوگانی صفر نباشد. بنابراین باید شرایطی را بر مسأله اعمال کنیم تا قضیّه‌ی قوی دوگانی برای بهینه‌سازی نیمه‌معیّن نیز برقرار باشد. این شرایط به شرایط **اسلیتر**[۲] مشهور است.

[2] Slater

فرض کنید $p^*$ و $d^*$ به ترتیب مقدارهای بهینه‌ی مسأله‌های $(SDP)$ و $(SDD)$ باشند که به صورت

$$p^* = \inf\{C \bullet X \ : \ A_i \bullet X = b_i \ , \ i = 1, \ldots, k \ , \ X \succeq 0\}, \tag{۱.۱}$$

و

$$d^* = \sup\{b^T y \ : \ \mathcal{A}^T y + S = C \ , \ S \succeq 0\}, \tag{۲.۱}$$

تعریف می‌شوند و فرض کنید مجموعه‌های بهینه این مسأله‌ها به ترتیب با نماد $P^*$ و $D^*$ و به صورت

$$P^* = \{X \ : \ A_i \bullet X = b_i \ , \ i = 1, \ldots, k \ , \ X \succeq 0, \ C \bullet X = p^*\},$$

و

$$D^* = \{S \ : \ \mathcal{A}^T y + S = C \ , \ S \succeq 0 \ , \ b^T y = d^*\}$$

نشان داده شوند[۲۱]. شرط **اسلیتر**[۱۵] برای مسأله‌های $(SDP)$ و $(SDD)$ به ترتیب عبارتند از:

- وجود یک نقطه‌ی شدنی $X \succeq 0$ برای مسأله $(SDP)$ ،
- وجود یک نقطه‌ی شدنی $(y, S)$ با $S \succeq 0$ برای مسأله‌ی $(SDD)$ .

حال قضیّه‌ی قوی دوگانی را به صورت زیر برای مسأله بهینه‌سازی نیمه‌معیّن بیان می‌کنیم:

**قضیه ۲.۱** [۲۱] با در نظر گرفتن مقدارهای بهینه‌ی مسأله‌های $(SDP)$ و $(SDD)$ که به ترتیب در رابطه‌های (۱.۱) و (۲.۱) تعریف شدند، داریم:

۱. اگر مسأله‌ی $(SDP)$ با مقدار بهینه‌ی $p^*$ متناهی و شدنی اکید باشد آن‌گاه $p^* = d^*$.

۲. اگر مسأله‌ی $(SDD)$ با مقدار بهینه‌ی $d^*$ متناهی و شدنی اکید باشد آن‌گاه $p^* = d^*$.

۳. اگر مسأله‌های $(SDP)$ و $(SDD)$ هر دو شدنی اکید باشند، آن‌گاه برای مقدار بهینه این دو مسأله رابطه‌ی $p^* = d^*$ برقرار است.

### ۱.۳.۱ روش نقطه درونی برای حلّ برنامه ریزی نیمه‌معیّن

کارآمدترین روش برای حلّ بهینه‌سازی نیمه‌معیّن روش نقطه درونی است[۲۲]. در روش نقطه درونی هدف اصلی در هر تکرار، محاسبه‌ی یک گام نیوتن نسبت به مسأله‌ی مانع کمکی است که نقاط تکرار را داخل مخروط نیمه‌معیّن مثبت نگه می‌دارد. با توجّه به اینکه مرتبه‌ی همگرایی روش نیوتن، ۲ است، روش نیوتن یک روش تکراری کارا برای حلّ عددی دستگاه معادلات غیر خطّی است.

الگوریتم نقطه درونی از یک نقطه‌ی درونی مخروط ماتریس‌های نیمه‌معیّن مثبت شروع می‌شود. تکرارهای تعیین شده در این الگوریتم همان کمینه‌سازهای تقریبی از یک دنباله از مسأله‌های کمکی هستند که شامل یک جمله‌ی مانع اضافه شده‌ی $-\mu\log(\det(X))$ به تابع هزینه مسأله‌ی اصلی هستند. در جمله‌ی اضافه شده، پارامتر $\mu > 0$ **پارامتر مانع** و تابع $-\log(\det(X))$، تابع مانع نامیده می‌شود. با در نظر گرفتن مسأله‌ی کمکی

$$\begin{array}{lll} \min & C \bullet X - \mu\log(\det(X)) & \\ \text{s.t.} & A_i \bullet X = b_i & i = 1, \dots, k \\ & X \succ 0, & \end{array}$$

چون $\det(X)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i(X)$ که در آن $\lambda_i(X)$ مقدارهای ویژه‌ی ماتریس $X$ هستند (دترمینان هر ماتریس با حاصل ضرب مقدارهای ویژه‌ی آن ماتریس برابر است)، داریم:

$$-\log(\det(X)) = -\sum_{i=1}^{n}\log(\lambda_i(X)).$$

لازم به ذکر است که اگر یک مقدار ویژه به سمت صفر میل کند، یعنی اگر به مرز مخروط نیمه‌معیّن مثبت نزدیک شود در این صورت تابع مانع به بی‌نهایت میل می‌کند. پارامتر $\mu$ با کنترل فاصله جواب بهینه مسأله کمکی تا مرز، از به وجود آمدن این وضعیّت جلوگیری می‌کند. جواب بهینه تابع مانع در صورت وجود یکتاست[۱۰]. برای یک دنباله از مسأله‌های مانع وقتی $\mu \to 0$ ، تابع هدف در نهایت به نزدیکی مرز مجموعه‌ی شدنی می‌رسد و دنباله کمینه‌سازها از مسأله مانع نیز به جواب بهینه مسأله‌ی بهینه‌سازی اصلی همگرا می‌شوند.

**تذکر ۱.۳** تابع مانع $-\log(\det(X))$ یک تابع سه بار مشتق پذیر است و مشتقات اوّل ودوّم آن مخالف صفر هستند[۱۰].

برای $X \succ 0$ با معرّفی یک مضرب لاگرانژی $y$ برای محدودیّت‌های تساوی، مسأله مانع به مسأله نامقیّد

$$L_\mu(X,y) = \langle C, X\rangle - \mu\log(\det(X) + \langle y, b - A\bullet X\rangle$$

تبدیل می‌شود، که در آن علامت $\langle , \rangle$ نشان دهنده‌ی ضرب داخلی روی $S^n$ است. این تابع، **تابع لاگرانژی** $L_\mu$ نامیده می‌شود. چون یک جواب بهینه برای مسأله مانع یک نقطه‌ی زینی برای تابع لاگرانژی $L_\mu$ است و نقاط زینی در شرایط بهینگی کاروش- کان-تاکر، یا شرایط لازم مرتبه اوّل

صدق می‌کنند[۱۰]، با به کارگیری حساب ماتریسی و قرار دادن $\nabla \log(\det(X)) = X^{-1}$ داریم:

$$\begin{aligned} \nabla_X L_\mu &= C - \mu X^{-1} - \mathcal{A}^T y = 0 \\ \nabla_y L_\mu &= b_i - A_i \bullet X = 0 \;\;,\;\; i = 1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{۳.۱}$$

توجّه کنید که معادله‌ی دوّم همان قیدهای تساوی در مسأله $(SDP)$ است. با قرار دادن $S = \mu X^{-1}$، در یک قالب بندی مجدّد اوّلیّه-دوگان از دستگاه (۳.۱) داریم (شرایط بهینگی کاروش-کان-تاکر، با شروع از مسأله‌ی مانع دوگان):

$$\begin{aligned} A_i \bullet X &= b_i, i = 1, \ldots, k, X \succ 0 \\ \mathcal{A}^T y + S &= C, S \succ 0 \\ XS &= \mu I. \end{aligned} \tag{۴.۱}$$

در دستگاه (۴.۱)، تساوی اوّل شدنی بودن مسأله $(SDP)$، تساوی دوّم، شدنی بودن مسأله $(SDD)$ و تساوی آخر وقتی $\mu \to 0$ ، شرط مکمّل را نشان می‌دهد. برای برقراری تساوی آخر در (۴.۱) باید ماتریس حاصل ضرب $XS$ از رتبه کامل باشد که در این صورت این دستگاه جواب یکتا دارد که به $y$ وابسته نیست[۱۰]. برای مقدار ثابت $\mu$، جواب دستگاه (۴.۱) را با $(X_\mu, S_\mu)$ نشان می‌دهیم که در آن $X_\mu$ و $S_\mu$ جواب‌های بهینه‌ی یکتای مسأله‌های مانع نظیر خود و نقاطی شدنی برای مسأله‌ی اصلی با شکاف دوگانی $\langle S, X \rangle = n\mu$ هستند. مجموعه جواب‌های $(X_\mu, S_\mu)$، برای $\mu > 0$ یک کمان هموار با نام **مسیر مرکزی** را تشکیل می‌دهند. اگر $\mu \to 0$، آن گاه $(X_\mu, S_\mu)$ به نقطه‌ی $(X^*, S^*)$ همگرا است که در آن $X^*$ و $S^*$ به ترتیب جواب‌های بهینه مسأله‌های $(SDP)$ و $(SDD)$ هستند.

برای به دست آوردن جواب تقریبی دستگاه (۴.۱) روش نیوتن یک جهت گام $(\Delta X, \Delta y, \Delta S)$ را مشخّص می‌کند. این جهت گام می‌تواند با حلّ دستگاه خطّی