بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی محض

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

عنوان

اندیس‌های عددی چندجمله‌ای فضاهای باناخ با نرم مطلق

استاد راهنما
دکتر محمد حسین ستاری

استاد مشاور
دکتر ایلدار صادقی

پژوهشگر
بتول عباسی

بهمن / ۱۳۹۲
تبریز / ایران

تقدیم به

پدر عزیز و بزرگوارم به او که رایحه ایمان است و الفبای صداقت و دنیای گذشت، چشمانش تشعشع نور الهی است و دستانش گهواره دعا.

مادر مهربانم به فرشته‌ای که در قدم به قدم راه زندگی چراغ هدایتم بود و با هر کلام و نگاهش یک دنیا عشق و محبت و عاطفه را به من بخشید. تقدیم به تو مادرم که با نام تو یک عمر وفاداری و عاطفه را معنی کردم.

خواهر و برادران عزیزم به آنان که وجودشان برایم عشق است و زندگی‌ام در کنار آن‌ها سبز و زیباست.

الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم نردبانی باشد برای فروتنی و دوری از تکبر و غرور، نه حلقه ای برای اسارت و نه دستمایه ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران.

حمد و ستایش به درگاه خداوند علیم که از سرچشمه زلال حکمت، توانایی برداشتن گامهایی هرچند کوچک در راه کسب دانش را عطا فرمود. اکنون که به یاری پروردگار انجام این تحقیق به پایان رسیده است، بر من است که شکر ایزد گویم و سپاسگزار از همه آنهایی باشم که در این راه یاریگرم بودند.

سپاس‌گزاری...

حضرت علی علیه السلام:
هر آنکه به من علم آموخت مرا بنده خویش ساخت .

اکنون که با ياري خداوند متعال توانستم این تحقیق را به پایان رسانم از رحمت بیکران لایزالش سپاسگزارم و به رسم احترام و ادب :
از استاد راهنماي بزرگوارم جناب آقای دکتر محمد حسین ستاری که افتخار شاگردي ایشان را داشتم، بخاطر تمام راهنماییها و مساعدتهاي بی دریغشان در طی انجام و تدوین این پایان نامه، نهایت تشکر و امتنان را دارم.
از استاد مشاور ارجمند جناب آقاي دکتر ایلدار صادقی که در طول این پژوهش از همفکریشان بهره برده و راهنمایی هاي ارزنده اي در جهت تدوین این تحقیق ارائه نمودند، تشکر و قدردانی می کنم.
از جناب آقاي دکتر حسن پور محمود که زحمت داوري پایان نامه را بر عهده داشتند، صمیمانه سپاسگزارم.
از خانم مریم سیری که در این دو سال همواره مشوقم بودند و از هیچ کمک و راهنمایی دریغ ننمودند کمال تشکر و قدردانی را دارم.
و از تمام اساتیدم در طول دوران تحصیلم سپاسگزارم.

بتول عباسی
بهمن ۱۳۹۲

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان‌نامه به بررسی این موضوع خواهیم پرداخت که چه موقع یک فضای باناخ با نرم مطلق دارای اندیس‌های عددی چند جمله‌ای برابر با یک است. همچنین در حالت حقیقی ثابت می‌شود که هرگاه X یک فضای باناخ با نرم مطلق و بعد بزرگتر از یک و دارای خاصیت رادون-نیکودیم یا فضای آسپلوند باشد، آنگاه $n^{(2)}(X) < 1$. در حالت مختلط ثابت می‌شود که فضاهای باناخ X با نرم مطلق که دارای خاصیت رادون-نیکودیم هستند و در رابطه‌ی $n^{(2)}(X) = 1$ صدق می‌کنند، فضاهای ℓ_∞^m هستند. همچنین، فضای مختلط آسپلوند X با نرم مطلق که در رابطه‌ی $n^{(2)}(X) = 1$ صدق می‌کند برابر $c_0(\lambda)$ است.

کلید واژه‌ها: اندیس عددی، فضای کوخ، نرم مطلق، چندجمله‌ای.

پیشگفتار

در سال ۱۹۱۸ توپلیتز [1] [۵۵] مفهوم برد عددی ماتریس‌ها را برای اولین بار معرفی کرد. ۵۰ سال بعد لومر [2][۳۹] و بایور [3][۲] برد عددی را برای عملگرهای خطی و کراندار روی فضای باناخ دلخواه توسعه دادند. در سال ۲۰۰۶ چویی [4] و همکارانش اندیس عددی چند جمله‌ای از مرتبه k فضای باناخ X را برای هر $k \in \mathbb{N}$ به صورت ثابت $n^k(X)$ معرفی کردند [۱۲].

هدف اصلی ما در این پایان‌نامه گسترش دو نتیجه‌ی ارائه شده در حالت متناهی البعد به حالت فضاهای باناخ نامتناهی البعـد X با نرم مطلق است. در حالت مختلط در [۲۹] ثابت شده است تنها فضای باناخ با بعد متناهی که در خاصیت $n^{2}(X) = 1$ صدق می‌کند ℓ_∞^m برای یک $m \in \mathbb{N}$ است. در حالت نا متناهی این نتیجه را به دو صورت گسترش می‌دهیم. فرض کنیم X یک فضای باناخ مختلط با نرم مطلق باشد که در خاصیت $n^{2}(X) = 1$ صدق می‌کند. هرگاه X دارای خاصیت رادون-نیکودیم باشد آنگاه X با ℓ_∞^m برای یک m طولپا است. اگر X یک فضای آسپلوند باشد، آنگاه برای یک مجموعه‌ی ناتهی Λ داریم $X = c_0(\Lambda)$. در حالت حقیقی در [۳۱] ثابت شده است که فضای حقیقی از بعد متناهی با اندیس عددی چند جمله‌ای از مرتبه‌ی ۲ برابر ۱ باشد، وجود ندارد. این نتیجه را در حالت فضاهای باناخ از بعد نامتناهی با نرم مطلق در دو حالت بررسی می‌کنیم؛ در حالت اول فضای باناخ را با خاصیت رادون-نیکودیم در نظر می‌گیریم و در حالت دوم فرض می‌کنیم فضای آسپلوند باشد.

پس از بیان تعاریف در فصل اول، در فصل دوم به مقدماتی از نرم‌های مطلق می‌پردازیم. فصل سوم اختصاص داده شده به فضای باناخ متناهی البعد حقیقی با نرم مطلق که اندیس عددی ۱ بر حسب نقاط اکسترمی دارند که در [۴۹] آمده است و گسترش آن روی حالت مختلط در [۲۹] بیان شده است. هدف از فصل سوم گسترش این نتایج به روی برخی از فضاهای نامتناهی البعد است که با بیان چند لم تکنیکی به نتایج مورد نظرمان می‌رسیم. در ادامه نشان می‌دهیم، در بین فضاهای

[1] Toeplitz
[2] Bauer
[3] Lumer
[4] Choi

آسپلوند یا فضاهایی که خاصیت رادون–نیکودیم دارند، فضاهای معدودی با نرم مطلق که اندیس عددی چندجمله‌ای از مرتبه‌ی ۲ برابر با ۱ دارند وجود دارند. در اولین نتیجه، شرط کافی عمومی برای یک فضای باناخ با نرم مطلق برای این که اندیس عددی چندجمله‌ای کوچکتر از ۱ داشته باشد را مطرح می‌کنیم و با استفاده آن، قضایای اصلی این فصل را اثبات خواهیم کرد.

فصل ۱
تعاریف و لم‌های مقدماتی

در فصل به بیان مفاهیم و تعاریف اساسی پایان‌نامه می‌پردازیم.

۱.۱ برد عددی

مجموعه اعداد حقیقی یا مختلط را با $\mathbb{K}$ و مجموعه‌ی از اسکالرهای تک پیمانه‌ای را با $\mathbb{T}$ نمایش می‌دهیم. کره‌ی واحد، گوی واحد بسته و جبر باناخ کلیه‌ی عملگرهای خطی و کراندار بر فضای باناخ X را به ترتیب با، S_X و B_X و $L(X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱. فضای برداری X را یک فضای نرمدار گوییم هرگاه تابع $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق کند:

$$\forall x, y \in X \quad , \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

(i) $\|x\| \geqslant 0 \ , \ x = 0 \Longleftrightarrow \|x\| = 0$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

(iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

تعریف ۲.۱.۱. هر فضای نرمدار را یک فضای متری می‌توان در نظر گرفت که در آن $d(x, y)$ فاصله‌ی بین x و y به صورت $d(x, y) = \|x - y\|$ می‌باشد.

تعریف ۳.۱.۱. فضای باناخ یک فضای نرمدار است که نسبت به متر تعریف شده به وسیله‌ی نرمش تام باشد، یعنی هر دنباله‌ی کشی در آن همگرا باشد.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ و $T \in L(X)$، برد عددی عملگر T به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$V(T) = \{x^*(Tx) : x \in S_X, x^* \in S_{X^*}, x^*(x) = 1\}$$

تعریف ۵.۱.۱. گوییم مجموعه‌ی $C \subset X$ محدب است اگر

$$tC + (1-t)C \subset C \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

به عبارتی اگر $x \in C$ و $y \in C$ و $0 \leqslant t \leqslant 1$ باشد، آنگاه $tx + (1-t)y \in C$.

نکته ۶.۱.۱. *فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد.*

(i) برد عددی بسته است ولی لزوماً محدب نیست.

(ii) $V(\alpha T + \beta S) \subseteq \alpha V(T) + \beta V(S) \quad \forall T, S \in L(X), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

(iii) $V(\alpha Id + S) = \alpha + V(S) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall S \in L(X)$

(iv) $V(T) \subseteq V(T^*) \subseteq \overline{V(T)}$

برهان. به گزاره‌ی ۱.۱.۵ از [۴۳] رجوع شود. □

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. برای هر $x \in S_X$، $D(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$D(x) = \{f \in X^* : f(x) = 1 = \|f\|\}$$

$D(x)$ مجموعه‌ی ناتهی و محدب است.

لم ۸.۱.۱. *فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. برای $T \in L(X)$ داریم*

$$\sup Re V(T) = \inf_{\alpha > 0} \frac{\|Id + \alpha T\| - 1}{\alpha} = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\|Id + \alpha T\| - 1}{\alpha}$$

برهان. فرض کنیم $x^* \in D(x)$ و $\mu = \sup Re V(T)$ و $\alpha > 0$ باشد، در این‌صورت

$$x^*(T) = \frac{1}{\alpha}(x^*(Id + \alpha T) - 1) \Longrightarrow x^*(T) \leqslant \frac{1}{\alpha}(\|Id + \alpha T\| - 1)$$

$$\mu \leqslant \inf_{\alpha>۰} \frac{\|Id+\alpha T\|-۱}{\alpha} \tag{۱.۱}$$

حال فرض کنیم $T \neq ۰$ باشد زیرا اگر $T = ۰$ حکم برقرار است.
فرض می‌کنیم که $۰ < \alpha < \frac{۱}{\|T\|}$ و $x^* \in D(X)$ و $x \in S_X$ باشد

$$\|(Id+\alpha T)x\| \geqslant Rex^*((Id-\alpha T)x) = ۱-\alpha Rex^*(Tx) \geqslant ۱-\alpha\mu \geqslant ۱-\alpha\|T\| > ۰$$

بنابراین برای هر $x \in S_X$ خواهیم داشت

$$\|(Id+\alpha T)x\| \geqslant (۱-\alpha\mu)\|x\|$$

فرض کنیم $x \in X$ دلخواه باشد قرار می‌دهیم $x_۰ = \frac{x}{\|x\|}$، در این‌صورت

$$\|(Id-\alpha T)\frac{x}{\|x\|}\| \geqslant (۱-\alpha\mu)\|\frac{x}{\|x\|}\| \Longrightarrow \|(Id-\alpha T)x\| \geqslant (۱-\alpha\mu)\|x\| \quad (x\in X)$$

قرار می‌دهیم $x = (Id+\alpha T)x$، بنابراین

$$\|(Id+\alpha T)x\| \leqslant (۱-\alpha\mu)^{-۱}\|(Id-\alpha^۲T)^۲\| \leqslant (۱-\alpha\mu)^{-۱}(۱+\alpha^۲\|T^۲\|) \quad \forall x\in X$$

$$\|(Id+\alpha T)\| \leqslant \frac{۱+\alpha^۲\|T^۲\|}{۱-\alpha\mu}$$

و بنا به ۱.۱ حکم برقرار است. □

۲.۱ شعاع عددی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ و $T \in L(X)$ باشد شعاع عددی عملگر T به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\nu(T) &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in V(T)\}\\ &= \sup\{|x^*(Tx)| : x\in S_X, x^*\in S_{X^*}, x^*(x)=۱\}\end{aligned}$$

نکته ۲.۲.۱. *فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد.*

$$\nu(T) \geqslant ۰ \quad \forall T\in L(X) \ (i)$$

$$\nu(T+S) \leqslant \nu(T)+\nu(S) \quad \forall T,S \in L(X)$$ (*ii*)

$$\nu(\lambda T) = |\lambda|\nu(T) \quad \forall T \in L(X), \forall \lambda \in \mathbb{K}$$ (*iii*)

لم ۳.۲.۱. *فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. برای $T \in L(X)$،*

$$\nu(T) = \max_{\omega\in\mathbb{T}} \lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{\|Id+\alpha\omega T\|-1}{\alpha}$$

برهان. چون $\nu(\omega T) = |\omega|\nu(T) = \nu(T)$ برای $\omega \in \mathbb{T}$، پس $\nu(T) = \max_{\omega\in\mathbb{T}} \sup V(\omega T)$ از طرفی

$$\sup ReV(T) = \lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{\|Id+\alpha T\|-1}{\alpha}$$

در نتیجه

$$\max_{\omega\in\mathbb{T}} \sup V(\omega T) = \max_{\omega\in\mathbb{T}} \lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{\|Id+\alpha\omega T\|-1}{\alpha}$$
$$\nu(T) = \max_{\omega\in\mathbb{T}} \lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{\|Id+\alpha\omega T\|-1}{\alpha}$$

□

گزاره ۴.۲.۱. *فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد.*

$$\nu(T) = \nu(T^*) \qquad (T \in L(X))$$

برهان. با توجه به‌این‌که برای هر عملگر T، $\|T\| = \|T^*\|$، طبق لم ۳.۲.۱،

$$\begin{aligned}\nu(T) &= \max_{\omega\in\mathbb{T}} \lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{\|Id+\alpha\omega T\|-1}{\alpha}\\ &= \max_{\omega\in\mathbb{T}} \lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{\|Id+\alpha\overline{\omega} T^*\|-1}{\alpha}\end{aligned}$$

و چون $|\overline{\omega}| = 1 \iff |\omega| = 1 \iff \omega \in \mathbb{T}$ با فرض $\overline{\omega} = \beta$ داریم

$$\nu(T) = \max_{\beta\in\mathbb{T}} \lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{\|Id+\alpha\beta T^*\|-1}{\alpha} = \nu(T^*)$$

□

۳.۱ اندیس عددی

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. اندیس عددی از فضای X مقدار ثابت $n(X)$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$n(X) = \inf\{\nu(T) : T \in L(X), \| T \| = 1\}$$

$$= \max\{k \geqslant 0 : k \| T \| \leqslant \nu(T) \quad \forall T \in L(X)\}$$

فرض کنیم $a = \inf\{\nu(T) : T \in S_{L(X)}\}$ باشد. فرض کنیم $T \in S_{L(X)}$ هرگاه $a \leqslant \nu(T)$، پس $0 \neq T \in L(X)$ دلخواه باشد. قرار می‌دهیم $T_1 = \frac{T}{\| T \|}$ که در این صورت $\|T\|_1 = 1$، پس

$$a \leqslant \nu(T_1) = \frac{1}{\| T \|}\nu(T) \Longrightarrow a \| T \| \leqslant \nu(T)$$

نشان می‌دهیم که a بزرگترین عددی است که در رابطه‌ی زیر صدق می کند:

$$k\|T\| \leqslant \nu(T) \quad (T \in L(X)) \Longrightarrow (T \in S_{L(X)}), \quad k \leqslant \nu(T) \Longrightarrow k \leqslant \inf \nu(T) = a$$

۴.۱ برد عددی، شعاع عددی و اندیس عددی روی چندجمله‌ای‌ها

تعریف ۱.۴.۱. فضای باناخ X روی میدان $\mathbb{K}(= \mathbb{C} \quad or \quad = \mathbb{R})$ مفروض است. قرار می‌دهیم

$$\Pi(X) = \{(x, x^*) \in S_X \times S_{X^*} \mid x^*(x) = 1\},$$

$$B_X = \{x \in X \mid \quad \| x \| \leqslant 1\},$$

$$S_X = \{x \in X \mid \quad \| x \| = 1\}.$$

برای $k \in \mathbb{N}$ نگاشت k-خطی پیوسته

$$L : X \times X \times \cdots \times X \longrightarrow X$$

را در نظر بگیرید،

$$P : X \longrightarrow X$$

$$P(x) = L(x, \ldots, x) \quad (x \in X)$$

را یک چند جمله‌ای k-همگن کراندار می‌نامیم. فضای تمام چند جمله‌ای‌های به این شکل را با $\mathcal{P}(^k X; X)$ نمایش می‌دهیم.

به عنوان مثال از چندجمله‌ای $k-$همگن می‌توان نگاشت $P : X \longrightarrow X$ را با ضابطه زیر در نظر گرفت، که نسبت به تمامی مولفه‌ها خطی است

$$P(x) = (a_۱ x + b_۱, a_۲ x + b_۲, \cdots, a_k x + b_k).$$

تعریف ۲.۴.۱. مشابه عملگرهای خطی کراندار روی X برای $P \in \mathcal{P}(^k X; X)$، نرم $\| P \|$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\| P \| = \sup\{\| P(x) \| : x \in B_X\}$$

و برد عددی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V(P) = \{x^*(Px) \mid \ (x, x^*) \in \Pi(X)\}$$

همچنین تعریف شعاع عددی آن به این صورت است:

$$\nu(P) = \sup \ \{| x^*(Px) | \ \ : (x, x^*) \in \Pi(X)\}$$

اندیس عددی چندجمله‌ای از مرتبه‌ی k برای فضای باناخ X مقدار ثابت $n^{(k)}(X)$ است که با رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود:

$$\begin{aligned} n^{(k)}(X) &= \max\{c \geqslant ۰ \ : c \| P \| \leqslant \nu(P) \ \forall P \in \mathcal{P}(^k X; X)\} \\ &= \inf\{\nu(P) \ : P \in \mathcal{P}(^k X; X), \| P \| = ۱\} \end{aligned}$$

تعریف ۳.۴.۱. اگر X فضای برداری و $B \subset X$ غلاف محدب B را با $co(B)$ نمایش می‌دهیم که اشتراک تمام زیر مجموعه‌های محدب X است که شامل B می‌باشد به عبارتی $co(B)$ مجموعه‌ی تمام ترکیبات محدب متناهی از اعضای B است.

$$co(B) = \{\sum_{i=۱}^{n} t_i x_i \quad | \quad n \in \mathbb{N}, \sum_{i=۱}^{n} t_i = ۱, t_i \geqslant ۰, x_i \in B\}$$

تعریف ۴.۴.۱. غلاف محدب بسته‌ی B که به صورت $\overline{co}(B)$ نوشته می‌شود عبارت است از بست $co(B)$.

تعریف ۵.۴.۱. غلاف مطلقاً محدب از B را با $aconv(B)$ نشان می‌دهیم که عبارت است از $co(\mathbb{T}B)$.

تعریف ۶.۴.۱. فرض کنیم K زیر مجموعه‌ای از فضای برداری X باشد مجموعه‌ی ناتهی $S \subset K$ را یک مجموعه‌ی اکستریمم K گوییم هرگاه اگر $x, y \in K$، و برای $0 < t < 1$، $(1-t)x + ty \in S$ آنگاه $x \in S, y \in S$.

نقاط اکستریم K مجموعه‌های اکستریمی هستند که فقط از یک نقطه تشکیل شده‌اند. مجموعه نقاط اکستریم از زیر مجموعه‌ی محدب $C \subset X$ را با $ext(C)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۷.۴.۱. $x \in B_X$ را نقطه‌ی اکستریم مختلط از B_X گوییم هرگاه برای $y \in X$ داشته باشیم

$$\sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} \|x + e^{i\theta} y\| \leqslant 1.$$

مجموعه‌ی تمام نقاط اکستریم مختلط B_X را با نماد $ext_{\mathbb{C}}(B_X)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۸.۴.۱. ***کرین-میلمن:*** *فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیکی باشد که X^* نقاط آن را جدا سازد. هرگاه K یک مجموعه‌ی محدب فشرده ناتهی در X باشد آنگاه K غلاف محدب بسته‌ی مجموعه نقاط اکستریم خود می‌باشد.*

برهان. به قضیه ۳.۲۱ از [۵۲] رجوع شود. $\square$

قضیه‌ی زیر معادل قضیه‌ی کرین-میلمن است که در بعضی برهان‌ها از آن استفاده شده است.

قضیه ۹.۴.۱. *هرگاه X یک فضای موضعاً محدب باشد و K زیر مجموعه‌ی محدب فشرده از X و $F \subset K$ باشد، به‌طوری‌که $K = \overline{co}(F)$، آنگاه $ext(K) \subset \overline{F}$.*

برهان. به قضیه‌ی ۷.۸ از [۱۶] رجوع شود. $\square$

قضیه‌ی تابع معکوس به‌طور نادقیق، می‌گوید که نگاشت به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر f در همسایگی هر نقطه‌ی x که در آن تبدیل خطی $f'(x)$ معکوس‌پذیر باشد، معکوس‌پذیر است.

قضیه ۱۰.۴.۱. ***تابع معکوس:*** *فرض کنیم f یک C-نگاشت از مجموعه‌ی باز $E \subset R^n$ باشد، به‌ازای $a \in E$ای $f'(a)$ معکوس‌پذیر باشد، و $b = f(a)$. در این صورت:*

(*i*) *مجموعه‌های بازی چون U و V در R وجود دارند به‌طوری‌که $a \in U$، $b \in V$، f بر U یک به یک است و $f(U) = V$.*

(*ii*) هرگاه g معکوس f باشد (که بنابر (*i*) وجود دارد) که در V با

$$g(f(x)) = x \qquad (x \in U)$$

تعریف می‌شود، آنگاه $g \in C$.

برهان. به قضیه ۲۴.۹ از [۵۲] رجوع شود. □

قضیه ۱۱.۴.۱. هان-باناخ: *فرض کنیم M زیرفضایی از فضای برداری حقیقی X بوده و $P: X \to \mathbb{R}$ در رابطه‌ی $P(x+y) \leqslant P(x) + P(y)$ و $P(tx) = tP(x)$ به ازای هر $x \in X, y \in X$ و $t \geqslant ۰$ صدق کند. همچنین $f: M \to \mathbb{R}$ خطی بوده و $f(x) \leqslant P(x) \quad (x \in M)$. در این صورت یک $\Lambda : X \longrightarrow \mathbb{R}$ خطی موجود است به‌طوری‌که $\Lambda(x) \leqslant P(x) \quad (x \in X)$ و $\Lambda(x) = f(x) \quad (x \in M)$.*

برهان. به قضیه‌ی ۲.۳ از [۵۲] رجوع شود. □

قضیه ۱۲.۴.۱. باناخ-آلوغلو: *هرگاه V یک همسایگی ۰ در فضای توپولوژیک X بوده و*

$$K = \{\Lambda \in X^* : |\Lambda x| \leqslant ۱, \forall x \in V\}$$

آنگاه K ضعیف فشرده می‌باشد.*

برهان. به قضیه‌ی ۱۵.۳ از [۵۲] رجوع شود. □

تعریف ۱۳.۴.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ، A زیر مجموعه‌ی کرانداری از X، $x^* \in S_{X^*}$ و $\varepsilon > ۰$ باشد. برش باز را با $S(A, x^*, \varepsilon)$ نمایش می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(A, x^*, \varepsilon) = \{x \in S_X \ : \ Rex^*(x) > \sup Rex^*(A) - \varepsilon\}$$

اگر $A = B_X$، آنگاه $S(B_X, x^*, \varepsilon) = \{x \in B_X \ : \ Rex^*(x) > ۱ - \varepsilon\}$ چون $|x^*(x)| \leqslant \|x^*\|\|x\| \leqslant \|x^*\| = ۱$ پس طبق قضیه‌ی هان-باناخ $x \in S_X$ وجود دارد که $x^*(x) = ۱$.

تعریف ۱.۴.۱۴. $x_\circ \in B_X$ را یک نقطه دندانه‌دار از B_X گوییم اگر متعلق به برش باز $S(B_X, x^*, \varepsilon)$ از B_X با کوچکترین قطر دلخواه باشد. به طور دقیق‌تر، برای هر $\varepsilon > \circ$ تابع $x^* \in S_{X^*}$ و $\alpha > \circ$ چنان وجود دارد که برش $S(B_X, x^*, \alpha) = \{x \in B_X \ : \ Rex^*(x) > 1 - \alpha\}$ شامل $x_\circ$ و گوی بسته‌ای به مرکز $x_\circ$ و شعاع ε باشد.

اگر X یک فضای دوگان بوده و بتوان تابعک x^*، w^*-پیوسته اختیار کرد، آنگاه $x_\circ$، نقطه‌ی ضعیف* دندانه‌دار است. فرض کنیم K یک مجموعه‌ی محدب، بسته و کراندار از فضای باناخ X باشد. $x \in K$ یک نقطه‌ی دندانه‌دار است اگر برای $\varepsilon > \circ$ داشته باشیم $x \notin \overline{co}(K \setminus B(x, \varepsilon))$، که در آن

$$B(x, \varepsilon) = \{y : y \in X, \|y - x\| < \varepsilon\}$$

نقطه‌ی x یک نقطه‌ی پیوسته برای K است اگر نگاشت همانی $(K, weak) \to (K, norm)$ در نقطه‌ی x پیوسته باشد.

در [۸]نشان داده شده که تعاریف آورده شده برای نقطه‌ی دندانه‌دار با هم معادلند.

قضیه ۱.۴.۱۵. *اگر K مجموعه‌ی محدب، بسته و کراندار از فضای باناخ X باشد، آنگاه نتایج زیر معادل هستند.*

(i) x یک نقطه‌ی دندانه‌دار از K است.

(ii) x یک نقطه‌ی پیوسته برای K و یک نقطه‌ی اکستریم از K است.

برهان. به قضیه‌ی ۱.۱ از [۸] رجوع شود. □

تعریف ۱.۴.۱۶. فرض کنیم X یک فضای خطی نرمدار حقیقی و $E \subseteq S_X$ باشد. گوییم E متصل به S_X است اگر

$$x, y \in E\ ,\ x \neq -y \Rightarrow D(x) \cap D(y) \neq \emptyset$$

۱.۵ CL-فضا

مفهوم تقریباً-CL-فضا توسط لیما[1] [۳۴] مطرح شد که تعمیمی از مفهوم CL-فضابود (همان تعریف ولی بدون بستارش) که بوسیله‌ی فولرتون[2] [۲۲] ارئه شده بود.

[1] Lima
[2] Fullerton

تعریف ۱.۵.۱. فضای باناخ X، CL -فضا است اگر B_X غلاف مطلقاً محدب از هر زیر مجموعه‌ی محدب ماکزیمال از S_X باشد.

اگر B_X غلاف مطلقاً بسته از هر زیر مجموعه‌ی محدب ماکزیمال از S_X باشد گوئیم تقریباً- CL -فضا است.

تبصره ۲.۵.۱. *هر زیر مجموعه‌ی محدب ماکزیمال F از S_X به فرم زیر است.*

$$F = \{x \in B_X : x^*(x) = ۱\} \quad , (x^* \in ext(B_{X^*}))$$

به بخش ۲ از [۴۰] رجوع شود.

تعریف ۳.۵.۱. مجموعه‌ای از $x^* \in ext(B_{X^*})$ با این خاصیت که مجموعه‌ی $\{x \in B_X : x^*(x) = ۱\}$ زیر مجموعه‌ی محدب ماکزیمال از S_X است را با$mex(B_{X^*})$ نمایش می‌دهیم.

نکته ۴.۵.۱. *فضای باناخ X تقریباً - CL -فضا است اگر و فقط اگر*

$$B_X = \overline{co}(\{x \in B_X : |x^*(x)| = ۱\})$$

به بخش ۲ از [۴۰] و قضیه‌ی ۳.۵ از [۳۴] رجوع شود.

لم ۵.۵.۱. *فرض کنیم X تقریباً - CL -فضا باشد. آنگاه:*

$$|x^{**}(x^*)| = ۱ \quad (x^{**} \in ext(B_{X^{**}}), x^* \in mex(B_{X^*}))$$

برهان. به لم ۳ از [۴۰] رجوع شود. □

تعریف ۶.۵.۱. خاصیت رادون نیکودیم: فضای باناخ E دارای خاصیت رادون نیکودیم است اگر برای هر فضای متناهی (Ω, Σ, μ) وهر عملگر خطی و کراندار $T : L^۱(\Omega, \Sigma, \mu) \longrightarrow E$، یک تابع اندازه پذیر کراندار مانند $\phi : \Omega \longrightarrow E$ چنان وجود دارد داشته باشد که برای هر f در $L^۱(\Omega, \Sigma, \mu)$ داشته باشیم $Tf = \int f\phi d\mu$.

تعریف ۷.۵.۱. فضای باناخ X آسپلوند[۳] است اگر و تنها اگر X^* دارای خاصیت رادون-نیکودیم باشد.

[۳] Asplund