دانشگاه محقق اردبیلی

دانشکده علوم

گروه ریاضی


پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی

عنوان :

# حل معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل خطی فردهلم– ولترا از مراتب بالا با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف


اساتید راهنما :

دکتر عبداله برهانی‌فر – دکتر محمد ضارب‌نیا

پژوهشگر :

مهدی فعال امیری


مهر ۱۳۸۷

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به

**پدر و مادر مهربانم**

## قدردانی

حمد و ستایش پروردگار رحمان را سزاست که پرتو الطاف بی‌شمارش همواره بر زندگی‌ام آشکار بوده و هست. سپاس می‌گزارم او را که فکرت و اندیشه را در بستر روحم روان ساخت و بهترین‌ها را نصیب و روزی‌ام گردانید. و به نشانهٔ قدردانی از الطافش بر دستان مهربانترین آفریده‌هایش، پدر و مادرم، بوسه می‌زنم.

اینک که این مرحله را پشت سر می‌گذارم، جا دارد از تلاشها، زحمات و راهنمایی‌های ظریف و ارزشمند استادان فرزانه و گرانمایه‌ام، آقایان دکتر محمد ضارب نیا و دکتر عبدالله برهانیفر تشکر کنم. و دگربار خدای خود را شکرکنم که استفاده از محضر چنین معلمانی را نصیبم کرد.

همچنین بر خود لازم می‌دانم از حمایت‌ها و تشویق‌های دوستان خوبم، به خصوص آقایان بهزاد محمودی و کیوان عسلی صاف، که روزهای شیرینی را در این دوره برایم رقم زدند، سپاسگزاری کنم.

مهدی فعال امیری

مهر ۱۳۸۷

| |
|---|
| **نام خانوادگی:** فعال امیری          **نام:** مهدی |
| **عنوان پایان‌نامه:**<br>حل معادلات انتگرال- دیفرانسیل خطی فردهلم – ولترا از مراتب بالا با استفاده از چندجمله ای های چبیشف |
| **اساتید راهنما:** دکتر عبداله برهانی‌فر و دکتر محمد ضارب نیا |
| **مقطع تحصیلی:** کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی کاربردی **گرایش:** معادلات انتگرال<br>**دانشگاه:** محقق اردبیلی **دانشکده:** علوم **تاریخ فارغ‌التحصیلی:** ۸۷/۷/۱۸<br>**تعداد صفحه:** ۹۱ |
| **کلمات کلیدی:** دستگاه معادلات انتگرال–دیفرانسیل، چندجمله ای ها و سری چبیشف، دستگاه های ولترا–فردهلم |
| **چکیده:**<br>این پایان نامه که بر اساس مقاله ی حل معادلات انتگرال–دیفرانسیل خطی فردهلم–ولترا از مراتب بالا با استفاده از چندجمله ای های چبیشف [۲] می باشد، روشی ماتریسی به نام روش کالوکیشن چبیشف ارایه می شود.روش کالوکیشن چبیشف را برای حل دستگاه معادلات انتگرال–دیفرانسیل از مراتب بالا بکار می بریم. در روش مذکور معادله انتگرال–دیفرانسیل(IDE) وشرایط داده شده با استفاده ازنقاط کالوکیشن چبیشف به معادله ماتریسی تبدیل می شوند. در جریان حل، دستگاه جدید که دستگاهی خطی از معادلات جبری است بدست می آید. جواب های این دستگاه،ضرایب چبیشف تابع جوابند.در نهایت،چندین مثال عددی ارایه کرده ایم تا موثر بودن روش ماتریسی کالوکیشن چبیشف را نشان دهیم. |

# فهرست مطالب

**عنوان** **صفحه**

## فهرست جدول‌ها

**عنوان جدول** **صفحه**

فصل ۱

# مقدمه و تاریخچه

## ۱.۱ تاریخچهٔ معادلات انتگرال

در روند حل دسته‌ای از معادلات با مشتقات جزئی و معادلات دیفرانسیل معمولی به معادلاتی می‌رسیم که در آنها تابع مجهول داخل علامت انتگرال ظاهر می‌شود. بویس ریموند[۱] اولین کسی بود که نام معادلهٔ انتگرال را به روی این گونه معادلات نهاد، اما در عمل لاپلاس[۲] اولین کسی بود که برای حل معادلات دیفرانسیل در سال ۱۷۸۲ معادلهٔ انتگرال زیر

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt} g(t) dt$$

را مطرح نمود. به دنبال آن فوریه[۳] برای حل مسائل حرارت تبدیلات سینوسی و کسینوسی فوریه را ارائه نمود و آبل[۴] در مسائل مکانیکی آبل معادلهٔ انتگرال آبل

$$f(x) = \int_{a}^{x} k(x, y) g(y) dy$$

را مطرح کرد. افراد دیگری که در مسیر تکامل معادلات انتگرال مؤثر بودند عبارتند از

- پواسون[۵]، در تئوری مغناطیس (سال ۱۸۲۶)
- لیوویل[۶]، در حل برخی معادلات دیفرانسیل به کمک معادلات انتگرال (سال ۱۸۳۲).
- نیومن[۷]، مسئلهٔ دیریکله (تعیین تابع $\psi$ روی مرز سطح $S$ که در معادلهٔ لاپلاس $\Delta\psi^{2} = 0$ صدق کند) را تبدیل به یک معادلهٔ انتگرال نمود (سال ۱۸۷۰).
- پوانکاره[۸]، در سال ۱۸۹۶ معادلهٔ انتگرالی $f(x) = g(x) + \lambda \int_a^h k(x, y) g(y) dy$ را در رابطه با معادلهٔ دیفرانسیل جزئی $\nabla^{2} g + \lambda g = f(x, y)$ بدست آورد.

[۱] *Bois Reymond*

[۲] *Pierre − Simon Laplace*

[۳] *Fourier*

[۴] *Henrik Abel*

[۵] *Poisson*

[۶] *Joseph Liouville*

[۷] *Neumann*

[۸] *Jules Henri Poincare*

- ولترا[9]، در سال ۱۸۹۶ برای اولین بار نظریهٔ عمومی معادلات انتگرال را ارائه نمود.

- در حدود سالهای ۱۹۰۳—۱۹۰۰ ریاضی دانی سوئدی به نام فردهلم[10] یک دسته‌بندی کلی از معادلات انتگرالی خطی به شکل $f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x, y)g(y)dy$ انجام داد که شامل دسته‌بندی خاصی از معادلات ولترا نیز بودند.

- در ادامهٔ این فرایند هیلبرت[11] به تحقیق در مورد معادلات انتگرالی پرداخت و در بسیاری از مسائل ریاضی‌فیزیک از معادلات انتگرال بهره جست. یکی از کارهای مهم وی فرموله کردن مسائل $ODE$ و $PDE$ با شرایط مرزی و اولیه، به صورت یک معادلهٔ انتگرال است.

از آنجا که در حالت کلی قادر به حل بسیاری از معادلات انتگرالی که با آنها مواجه می‌شویم نیستیم، لزوم استفاده از روشهای تقریبی و عددی جهت حل معادلات انتگرال روشن می‌گردد و بخاطر آنکه مسائل کاربردی از قبیل معادلات منفرد در تئوری پتانسیل، فیزیک مکانیک، تئوری امواج و الکترونیک، محتاج به نتایج عددی و شیوه‌های عددی در جهت نیل به جواب بودند و به خاطر آنکه در محاسبات عددی بر روی کامپیوترها مسائلی از قبیل گردکردن و انباشته شدن خطا پیش می‌آمد، لازم بود در همگرائی روش عددی مورد بحث قرار گیرد زیرا بسیاری از روشها در تئوری همگرا بودند ولی در عمل این طور نبود، به همین دلیل روشهای عددی که سرعت همگرائی بالائی داشتند برای حل انواع معادلات ابداع گردید.

نکته: در بحث‌های نظری معادلات انتگرال همیشه می‌توان فاصله متناهی مانند $[a, b]$ را برابر $[۰, ۱]$ فرض نمود چون با استفاده از یک تبدیل خطی همیشه می‌توانیم فاصلهٔ $[a, b]$ را به $[۰, ۱]$ تبدیل کنیم.

---

[9] $Vito\ Volterra$

[10] $Erik\ Ivar\ Fredholm$

[11] $David\ Hilbert$

به عنوان مثال معادلهٔ انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x,y) f(y) dy, \qquad (*)$$

فرض کنید $x = (b-a)\bar{x} + a$ و $y = (b-a)\bar{y} + a$. در این صورت

$$۰ \leq \bar{x}, \bar{y} \leq ۱ \quad \Leftrightarrow \quad a \leq x, y \leq b.$$

از طرفی

$$dy = (b-a) d\bar{y},$$

بنابراین

$$f(a + (b-a)\bar{x}) = \lambda \int_۰^۱ k(a + (b-a)\bar{x}, a + (b-a)\bar{y}) f(a + (b-a)\bar{y})(b-a) d\bar{y}.$$

حال با فرض

$$f_۰(t) = f(a + (b-a)t),$$

$$k_۰(\bar{x}\bar{y}) = k(a + (b-a)\bar{x}, a + (b-a)\bar{y}),$$

$$\lambda_۰ = \lambda(b-a),$$

معادلهٔ $(*)$ به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$f_۰(\bar{x}) = \lambda_۰ \int_۰^۱ k_۰(\bar{x}, \bar{y}) f_۰(\bar{y}) d\bar{y}.$$

این عمل علاوه بر اینکه موجب نرمال سازی مسأله می‌شود، موجب تسریع در حل دستگاه معادلاتی می‌گردد که متناظر با معادلهٔ انتگرال مورد نظر است. در حقیقت با مناسب اختیار کردن $b-a$، می‌توانیم تعداد معادلات دستگاه و هم چنین تعداد متغیرها را کمتر کرده، لذا در مدت زمان کمتری به جواب‌های معادله دسترسی پیدا کنیم.

## ۲.۱ دسته‌بندی معادلات انتگرال

معادلهٔ انتگرال به معادله‌ای گفته می‌شود که در آن تابع مجهول داخل علامت انتگرال ظاهر شود، فرم کلی یک معادلهٔ انتگرال به صورت زیر است

$$h(x)g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)g(y)dy \qquad (۱.۲.۱)$$

که در آن $g(y)$ یک تابع مجهول و $f(x)$، $h(x)$ و $k(x,y)$ توابعی معلوم هستند، تابع دو متغیره $k(x,y)$ را هستهٔ معادلهٔ انتگرال می نامیم و $k(x,y)$ می‌تواند حقیقی یا مختلط باشد و $\lambda \neq ۰$ حقیقی یا مختلط و $b$ می‌تواند ثابت یا متغیر باشد.
با توجه به تنوع مسائل مختلف در فیزیک و مهندسی ضرورت یک تقسیم‌بندی کلی حس می‌شود.

### ۱.۲.۱ معادلات انتگرالی فردهلم

معادلات انتگرالی که در آنها دامنهٔ انتگرال گیری ثابت است معادلات انتگرال فردهلم نامیده می‌شود. معادلهٔ (۱.۲.۱) را در نظر بگیرید؛ معادلات انتگرال فردهلم خود به سه دسته تقسیم می‌شوند

۱) اگر $h(x) = ۰$ آن را معادلهٔ انتگرال فردهلم نوع اول گویند

$$f(x) = -\lambda \int_a^b k(x,y)g(y)dy,$$

۲) اگر $h(x) = ۱$ آن را معادلهٔ انتگرال فردهلم نوع دوم گویند

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)g(y)dy,$$

۳) اگر $f(x) = ۰$ و $h(x) = ۱$ معادلهٔ انتگرال نوع دوم همگن را خواهیم داشت

$$g(x) = \lambda \int_a^b k(x,y)g(y)dy.$$

### ۲.۲.۱ معادلات انتگرال ولترا

اگر در(۱.۲.۱)، $b$ متغیر باشد آن را معادلهٔ انتگرال ولترا می‌نامیم و مشابه معادلهٔ انتگرال فردهلم به دو نوع تقسیم می‌شود

۱) به معادلات انتگرالی که در آنها تابع مجهول به غیر از داخل علامت انتگرال در جای دیگری ظاهر نشده‌است، معادلهٔ انتگرال نوع اول می‌گویند.

۲) معادلات انتگرالی را که در آنها تابع مجهول خارج از علامت انتگرال‌گیری ظاهر می‌شود، معادلهٔ انتگرال نوع دوم می‌گویند. در ضمن حل معادلات انتگرال نوع اول در مقایسه با معادلات انتگرال نوع دوم مشکل‌تر است.

### ۳.۲.۱ معادلات انتگرال منفرد و معادلات انتگرال نامنفرد

هر یک از معادلات انتگرال نوع اول یا دوم را به دو نوع می‌توان تقسیم کرد

الف) معادلات انتگرال منفرد:

به معادلات انتگرالی گفته می‌شود که در آنها حدود انتگرال‌گیری نامحدود و یا هسته بیکران باشد، مانند

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{h(x,y)} g(y) dy$$

$$f(x) = \int_{0}^{x} \frac{g(y)}{(x-y)^{\alpha}} dy$$

که در تئوری الاستیک کاربرد دارند.

ب) معادلات انتگرال نامنفرد:

به معادلات انتگرالی گفته می‌شود که هم هسته آنها کراندار است و هم حدود انتگرال‌گیری در آنها متناهی است، مانند

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_{0}^{1} (x+y) f(y) dy$$

### ۴.۲.۱ معادلات انتگرال پیچشی ( کانولوشن )

معادلات انتگرال پیچشی

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y)g(y)dy = f(x) \qquad -\infty < x < +\infty$$

معادلاتی هستند که در آنها هستهٔ معادلهٔ انتگرال به صورت $k(x,y) = k(x-y)$ می‌باشد و با استفاده از تبدیلات لاپلاس و فوریه می‌توان آنها را حل کرد. این معادلات، معادلات انتگرال نوع دوم کانولوشن بدخیم می‌باشند و کاربرد زیادی در ارتباطات و مسائل فیزیکی دارند. روابط ذیل در حل این معادلات کمک زیادی می‌کنند

$$\begin{aligned} \int_{0}^{t} k(x-y)g(y)dy &= \int_{0}^{t} k(y)g(x-y)dy, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y)g(y)dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} k(y)g(x-y)dy. \end{aligned}$$

### ۵.۲.۱ معادلات انتگرال—دیفرانسیل

در این نوع معادلات هر دو عملگر انتگرال و دیفرانسیل ظاهر می‌شوند. این نوع معادلات خود به دو نوع معادلات انتگرال—دیفرانسیل فردهلم و معادلات انتگرال—دیفرانسیل ولترا تقسیم می‌شوند.

ولترا در حال مطالعهٔ پدیده رشد جمعیت و به خصوص تأثیر وراثت بود که در تحقیق خود با این گونه معادلات مواجه شد و نام مذکور را برای آنها انتخاب کرد.

دانشمندان و محققین در پژوهش خود در کاربرد علوم در مواردی نظیر انتقال گرما، پدیدهٔ انتشار و غیره به حل این معادلات نیاز پیدا کردند. به این نکتهٔ مهم باید توجه کرد که در معادلات انتگرال—دیفرانسیل تابع مجهول $u(x)$ و حداقل یکی از مشتق‌هایش نظیر $u'(x)$ یا $u''(x)$ و یا ... در خارج و هم چنین داخل علامت انتگرال قرار دارند. یکی از جاهایی که معادلات

انتگرال—دیفرانسیل ظاهر می‌شوند و می‌توان آنها را به سادگی دید در تبدیل یک معادلهٔ دیفرانسیل به یک معادلهٔ انتگرال با استفاده از روش لایبنیتز[۱۲] است. در این حالت معادلهٔ انتگرال—دیفرانسیل را می‌توان به عنوان یک مرحلهٔ میانی در تعیین یک معادلهٔ انتگرال ولترا معادل با معادلهٔ دیفرانسیل داده شده تلقی کرد.

در زیر چند مثال از معادلات انتگرال—دیفرانسیل آورده شده‌است

$$u'(x) = x - \int_0^1 e^{x-t}u(t)dt, \qquad u(0) = 0, \tag{۲.۲.۱}$$

$$u''(x) = e^x - x + \int_0^1 xtu'(t)dt, \qquad u(0) = 0, u'(0) = 1, \tag{۳.۲.۱}$$

$$u'(x) = x - \int_0^x (x-t)u(t)dt, \qquad u(0) = 0, \tag{۴.۲.۱}$$

$$u''(x) = -x + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \qquad u(0) = 0, u'(0) = -1. \tag{۵.۲.۱}$$

معادلات (۲.۲.۱) و (۳.۲.۱) را معادلات انتگرال—دیفرانسیل فردهلم و معادلات (۴.۲.۱) و (۵.۲.۱) را معادلات انتگرال—دیفرانسیل ولترا می‌نامیم. به‌علاوه خوب است که بدانیم معادلات (۲.۲.۱) تا (۵.۲.۱) معادلات انتگرال—دیفرانسیل خطی نام دارند و این به آن دلیل است که تابع مجهول یعنی $u(x)$ و مشتق‌های آن در معادلهٔ مذکور به‌طور خطی حضور پیدا کرده‌اند.

برای تعیین جواب یک معادلهٔ انتگرال—دیفرانسیل باید شرایط اولیه معلوم باشند و همان طوری که به وضوح دیده می‌شود، این نیاز به علت حضور $u(x)$ و مشتق‌هایش در معادله است. شرایط اولیه جهت تعیین ثابت‌های انتگرال‌گیری مورد نیاز می‌باشند.

## ۳.۱ کاربرد معادلات انتگرال در علوم دیگر

با توسعهٔ علوم مختلف ارتباط بین این علوم بیشتر آشکار می‌شود و با پیشرفت علم کامپیوتر نیاز روز افزون این علوم به شاخه‌های ریاضیات محاسباتی به خصوص معادلات انتگرال بیش از

[۱۲] $Leibnitz$

پیش حس می‌شود.

در زیر سعی می‌شود که چند مورد از این کاربردها توضیح داده شوند.

قبل از این که به طور مستقیم به آنها بپردازیم یادآور می‌شویم که اکثر مسائل علمی به معادلات با مشتقات نسبی و معمولی تبدیل می‌شوند.

**مثال ۱.۳.۱**. به عنوان مثالی ساده، معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y)$$

را با شرایط اولیهٔ $y(\circ) = y_\circ$ در نظر می‌گیریم. اگر $f(x, y)$ تابعی پیوسته از $x$ و $y$ باشد می‌توان در فاصلهٔ $[\circ, x]$ از این معادله انتگرال گرفت و داشت

$$y(x) = y_\circ + \int_\circ^x f(x, y(t))dt$$

که یک معادلهٔ انتگرال غیرخطی است و در آن $y(x)$ مجهول می‌باشد.

با پیشرفت کامپیوتر نقش معادلات انتگرال در علوم فضایی و علوم پزشکی بیش از پیش آشکار گردید. اخیراً که استفاده از ماهواره برای دستیابی به آخرین اطلاعات و بررسی اوضاع جوی امکان‌پذیر شده، عمده‌ترین محاسبات انجام‌شده بر پایهٔ یک معادلهٔ انتگرال نوع اول به صورت ذیل می‌باشد

$$g(x) = \int_{c(x)} k(x, y)f(y)dy,$$

که در آن $y$ نقطه‌ای از اتمسفر و $c(x)$ حجم لایه از $x$ تا $y$ و $g(x)$ امواج بازتابی (تشعشع) است که از $y$ مشاهده می‌شود و فرکانس آن $w$ است و $f(y)$ دمای اتمسفر در نقطهٔ $y$ می‌باشد.

از کاربردهای دیگر، ساختن تلسکوپ‌های خاص و عکس برداری از قسمت‌های مختلف بدن و بررسی چگونگی رشد تومورها در علم پزشکی را می‌توان نام برد.

به هر حال آنچه را که نمی‌توان انکار کرد نقش کامپیوتر در حل عددی معادلات و اصولاً طرح این گونه معادلات است و هر جا که حل عددی معادلات انتگرال مطرح است، صحبت از خطا و همگرایی اجتناب ناپذیر است و بحث اصلی ما بدست آوردن خطای کمتر است.

## ۴.۱ تاریخچهٔ چندجمله‌ای‌های چبیشف

«چندجمله‌ای‌های چبیشف در همه جای آنالیزعددی حضور دارند.»

این بیان منتسب به تعدادی از ریاضیدان های برجسته و اساتید آنالیزعددی است. نام‌گذاری چندجمله‌ای‌های چبیشف منتسب به ریاضیدان روسی، چبیشف[۱۳](۱۸۹۴—۱۸۲۱)است. بیش از سی سال از انتشار مقالهٔ چندجمله‌ای‌های چبیشف در آنالیز عددی توسط فاکس و پارکر[۱۴] می‌گذرد. بعد از آن تنها مقالهٔ مهم در این موضوع، که توسط ریولین[۱۵]نوشته شد، شرح خوبی از صورت تئوری چندجمله‌ای‌های چبیشف بود ولی بیشتر محدود به ظاهر آن می‌شد.

ماسون[۱۶] وهندسکام[۱۷]، اخیراً تلاش‌های گسترده‌ای در معرفی چندجمله‌ای‌های چبیشف انجام داده‌اند و تئوری چهارنوع بودن چند جمله‌ای‌های چبیشف را مطرح کرده‌اند. البته این کار قبلاً توسط گاوشی[۱۸] مطرح شده بود ولی ماسون و هندسکام اطلاعات بسیار دقیقتری از این چهار نوع چندجمله‌ای ارائه نموده‌اند.

در بیشتر فضاهای آنالیزعددی و در مجموع در بیشتر مباحث ریاضیات، از چندجمله‌ای‌های چبیشف استفاده می‌شود و این بیشتر به خاطر ویژگی‌های چهار نوع چندجمله‌ای است. به‌ندرت

[۱۳] *P. F. Chebyshev*

[۱۴] *Fox And Parker*

[۱۵] *Rivlin*

[۱۶] *J. C. Mason*

[۱۷] *D. C. Handscomb*

[۱۸] *Walter Gautschi*

جایی در ریاضی وجود دارد که چندجمله‌ای‌های چبیشف باعث شگفتی خوانندگان نشود. در مباحث تقریب توابع، بسط سری ها، درونیابی توابع، روشهای عددی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و غیره؛ در همه این‌ها اثری از چندجمله‌ای‌های چبیشف می‌بینیم.

## ۵.۱ تعاریف مثلثاتی و بازگشتی

چندین نوع چندجمله‌ای‌های چبیشف وجود دارد. ما به خصوص چندجمله‌ای‌های نوع اول $T_n(x)$ و نوع دوم $U_n(x)$ را معرفی خواهیم کرد، و نیز دو نوع چندجمله‌ای $V_n(x)$ و $W_n(x)$ را بررسی می‌کنیم. بعلاوه چندجمله‌ای‌های تبدیل یافتهٔ $T_n^*$، $U_n^*$، $V_n^*$ و $W_n^*$ را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

وابستگی نزدیکی بین چندجمله‌ای‌های چبیشف و توابع $Sin$ و $Cos$ وجود دارد. خواهیم دید که برای یافتن ضرایب چبیشف از سری‌های فوریه استفاده می‌کنیم [۲].

### ۱.۵.۱ چندجمله‌ای‌های نوع اول $T_n$

چندجمله‌ای چبیشف $T_n(x)$ از نوع اول ، چندجمله‌ای بر حسب $x$ از درجهٔ $n$ است که توسط رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$T_n(x) = \cos n\theta, \qquad x = \cos\theta \qquad (۱.۵.۶)$$

اگر دامنهٔ متغیر $x$ بازهٔ $[-۱, ۱]$ باشد، آنگاه دامنهٔ متغیر وابستهٔ $\theta$ را می‌توان $[۰, \pi]$ در نظرگرفت. این دامنه در سمت مثبت است، چون $x = -۱$ متناظر به $\theta = \pi$ و $x = ۱$ متناظر به $\theta = ۰$ است. به خوبی می‌دانیم ( نتیجهٔ قضیهٔ موآور[۱۹]) که $\cos n\theta$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n$ بر حسب $\cos\theta$ است و در نتیجه فرمول زیر را می‌دانیم

[۱۹] $Moivre$

$$\cos 0\theta = 1, \quad \cos 1\theta = \cos\theta, \quad \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1,$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \quad \cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1, \cdots$$

بلافاصله از (۱.۵.۶) نتیجه می‌گیریم که چندجمله‌ای‌های ابتدایی چبیشف عبارتند از

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \cdots \qquad (۱.۵.۷)$$

در عمل یافتن چندجمله‌ای‌های چبیشف به این شکل مشکل است. برای یافتن این چندجمله‌ای‌ها به شکل ساده‌تر می‌توانیم از فرم بازگشتی استفاده کنیم. داریم

$$\cos n\theta = \cos(n-1)\theta\cos\theta - \sin(n-1)\theta\sin\theta,$$

$$\cos(n-2)\theta = \cos(n-1)\theta\cos\theta + \sin(n-1)\theta\sin\theta,$$

با جمع طرفین رابطهٔ فوق داریم

$$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta$$

آنگاه با استفاده از (۱.۵.۶) رابطهٔ بازگشتی اساسی زیر را بدست می‌آوریم

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \qquad n = 2, 3, \cdots, \qquad (۱.۵.۸)$$

که همراه با دو شرط اولیهٔ زیر

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

به سادگی به‌طور بازگشتی برای تعیین تمام چندجمله‌ای‌های $T_n(x)$ کافی است.

به آسانی می‌توان از (۱.۵.۸) نتیجه گرفت که ضریب (مربوط به $x^n$) در $T_n(x)$ برای $n > 1$ دو برابر ضریب در $T_{n-1}(x)$ است و از این رو، به استقرا، برابر $2^{n-1}$ می باشد.

حال بررسی می‌کنیم که چندجمله‌ای $T_n(x)$ به چه شکلی است؟