بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه رازی
دانشکده علوم
گروه فیزیک

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته فیزیک
گرایش نظری

عنوان پایان‌نامه

تشکیل حالت‌های همدوس بوسیله هسته‌ی گرمایی

استاد راهنما:

دکتر اردشیر رابعی

نگارش:

سیدعلی‌اصغر آل‌نبی

دی ۱۳۹۲

چکیده

می‌دانیم که بررسی سیستم‌هایی با ابعاد بسیار کوچک بوسیله علم مکانیک کوانتومی انجام می‌گیرد. از طرفی ما اعتقاد داریم زبان رسمی مکانیک کوانتومی، حالت‌های همدوس می‌باشد. لذا وارد شدن به بحث این حالت‌ها برای سیستم‌های مختلف از اهمیت خاصی برخوردار می باشد. در این رساله ما قصد داریم حالت‌های همدوس را با استفاده از هسته گرمایی برای فضاهای انحنادار (حلقه حقیقی S^1 کره حقیقی S^2 و هذلولی‌وار H^2) بدست آوریم. بدین منظور کار خود را از بررسی معادله گرما (که هسته گرمایی حل بنیادی آن در فضاهای ریمانی است) آغاز و سپس با روش‌های ریاضی حالت‌های همدوس را از هسته گرمایی استخراج می‌کنیم.

در این روش هسته گرمایی را با استفاده از مباحث ریاضی پیچیده و بخصوص قاعده جمع پواسون تجزیه کرده و سپس حالت‌های همدوس را از آن استخراج می‌کنیم. روشی که در این رساله برای بدست آوردن حالت‌های همدوس بکار گرفته شده، یک روش جدید و کاملاً ابتکاری می‌باشد. در پایان با استفاده از این روش، بصورت مستقیم حالت‌های همدوس ذره جرم‌دار روی دوسیتر $1+1$ را بدست می‌آوریم.

کلمات کلیدی:

حالت‌های همدوس، هسته گرمایی، رویه.

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فهرست نشانه‌ها و نمادها

M رویه

$\mathbb{S}^n$ رویه کروی

$\mathbb{H}^n$ رویه هذلولی‌وار

$\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی

$\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط

S^1 حلقه حقیقی

S^2 کره حقیقی

H^2 هذلولی‌وار

J تکانه زاویه‌ای

$\mathcal{H}$ فضای هیلبرت

β_C زاویه مختلط

β زاویه حقیقی

K هسته گرمایی

λ_j طیف ویژه مقدار

$\{\Phi_j\}$ طیف ویژه توابع

$\mathfrak{L}^2$ فضای توابع انتگرال‌پذیر مجذوری

$|\psi_y\rangle$ حالت‌های همدوس

$\overrightarrow{a}(x,p)$ توابع مختلط

$\hat{O}$ عملگر خطی

$\hat{O}_a$ عملگر نابودی

C مختلط کننده تیمن

فصل ۱

مقدمه

زیبایی علم فیزیک در آن است که می‌کوشد تا دنیای پیرامون انسان را نگریسته و آن را دسته‌بندی کند. این کار را مدل‌کردن یا مدل‌نویسی یا به زبان ساده‌تر، شناسایی دنیا می‌نامیم. شناسایی جهان با نگاه به پدیده‌ها و بیان آن‌ها به زبان ریاضی انجام می‌شود. این روند، تا آن‌جا که به ما آموخته‌اند، ساده‌ترین راه شناسایی است.

یکی از مباحثی که در دهه‌های اخیر توجه فیزیکدان‌ها را به خود معطوف نموده بحث حالت های همدوس (که ویژه بردارهایی از فضای هیلبرت هستند) می‌باشد. تعیین حالت‌های همدوس در مورد سیستمهای مختلف یکی از اساسی‌ترین و در عین حال پیچیده‌ترین مطالب در فیزیک می‌باشد که مباحث سنگین ریاضی را به همراه دارد. هر چند که پیشینه این موضوع به بیش از هشتاد سال می‌رسد ولی در دهه‌های اخیر بررسی حالت‌های همدوس گروه‌های لی و رویه‌ها (منیفلدها) اهمیت خاصی به خود گرفته است. متاسفانه بدلیل پیچیدگی مباحث مربوط به گروه‌های لی و رویه‌ها، بسیاری از افراد حالت‌های همدوس مربوطه را با هم اشتباه می‌گیرند.
ایده حالت‌های همدوس ریشه در فیزیک کوانتومی دارد و ارتباط آن با فیزیک کلاسیک است. موضوع حالت‌های همدوس اولین بار بوسیله شرودینگر[۱] در سال ۱۹۲۶ معرفی گردید و سپس در دهه ۶۰ میلادی توسط گلوبر[۲] (پدر علم حالت‌های همدوس و برنده جایزه نوبل در سال ۲۰۰۵ میلادی)، کلودر[۳] و سادارشان[۴] به صورت جدی‌تر مورد بررسی قرار گرفت. از آن زمان بحث حالت‌های همدوس در شاخه‌های مختلف فیزیک از قبیل فیزیک هسته‌ای، اتمی، حالت جامد و از جمله در فیزیک نظری گسترش یافت طوری که کلودر در اینباره می‌گوید:" حالت‌های همدوس زبان طبیعی تئوری کوانتومی می‌باشند. "
در دهه‌های اخیر نیز به غیر از افراد مذکور، فیزیکدان‌ها و ریاضی‌دان‌های بر جسته‌ای از قبیل پرلموو[۵]، باروت[۶]، گزو[۷] و هال[۸] به بررسی موضوع پرداخته‌اند که نتایج درخشانی را به همراه داشته است.
روش‌های مختلفی برای بدست آوردن حالت‌های همدوس وجود دارد اما در کل می‌توان حالت‌های

[۱] E. Schrodinger

[۲] R. J. Glauber

[۳] J. R. Klauder

[۴] E.C.G. Sudarshan

[۵] A.M. Perelomov

[۶] A.O. Barut

[۷] J. P. Gazeau

[۸] B. Hall

همدوس استاندار را به شکل زیر نوشت:

$$|\chi\rangle = \frac{۱}{\sqrt{N}} \sum_{n,l,...} \Phi_{n,l,...}(\chi)|n, l, ...\rangle \quad , \tag{۱-۱}$$

که $\sqrt{N}$ ضریب نرمالیزاسیون، $|n, l, ...\rangle$ پایه‌های متعامد فضا، $\{\Phi_{n,l,...}(\chi)\}$ مجموعه‌های متعامد و $|\chi\rangle \in \mathcal{H}$ به عنوان حالت‌های همدوس استاندارد شناخته می‌شوند. تمام حالت‌های همدوس دارای سه شرط (۱- پیوسته بودن، ۲- نرمالیزه‌پذیر بودن و ۳- کامل بودن) می‌باشند. در روش‌های موجود، با استفاده از نظریه گروه حالت‌های همدوس را بطور غیر مستقیم بدست می‌آورند که کاری بسیار طاقت‌فرساست. همچنین تعیین این حالت‌ها برای فضاهای انحنادار به این روش بسیار مشکل می‌باشد. هدف از این پایان نامه این است که با استفاده از هسته گرمایی (که از حل معادله گرما بدست می‌آید) مربوط به رویه‌ها و گروه‌های لی (فشرده و غیر فشرده) متداول در فیزیک، حالت‌های همدوس مربوطه را تعیین و کلاسه‌بندی نماییم. در این روش ابداعی، حالت‌های همدوس را بطور مستقیم بدست می‌آوریم. شیوه به کار رفته در این رساله بصورت اصولی از روند زیر تبعیت می‌کند:

متریک ← لاپلاسی ← لاگرانژین ← کار ← هسته گرمایی ← حالت‌های همدوس

بر این اساس، فصل‌های زیر را تدوین نمودیم:

فصل دوم: در این فصل معادله گرما بررسی می‌شود. این معادله کاربردهای وسیعی در حیطه‌های مختلف فیزیک از جمله در مکانیک کوانتوم (معادله شرودینگر یک شکلی از معادله گرماست)، مکانیک آماری (حرکت براونی و معادله پخش)، ترمودینامیک (انتقال گرما) و حتی در علم اقتصاد (در مورد نرخ توزیع و رابطه‌های بلاخ-اسشولز[۱] و نامساوی نش[۲])، دارد. در انتهای این فصل برخی از حل‌های این معادله در فضای اقلیدسی را ارائه می‌دهیم[۳، ۴، ۵، ۶].

فصل سوم: حل معادله گرما در فضای ریمانی سخت است. در این فضا برای حل معادله گرما از روش بنیادی یا هسته گرمایی استفاده می‌کنیم که این نیز به نوبه خود دارای پیچیدگی‌های فراوانی می‌باشد.

در ۱۹۴۹، ریاضیدانان میناکشیسوندرام[۳]و پلیجل[۴] بر روی حل معادله‌ی گرما روی رویه‌ریمانی[۵]، با استفاده از بسط مجانبی در حدود بازه‌های زمانی کوتاه و نقاط مجزا، مطالعه کردند. آن‌ها به وسیله این بسط، توانستند به خاصیت‌های تحلیلی تابع زتا[۶] بر روی رویه برسند فرضیه انتشارگرها در فضا-زمان

[۱] Black-Schols

[۲] J. Nash

[۳] S. Minakshisundaram

[۴] T. Pleijel

[۵] Riemannian manifold

[۶] Zeta function

خمیده، در دهه ۵۰ با کار مورت[۱] و دوایت[۲] روی انتگرال مسیر آغاز شد، و در دهه ۶۰ به وسیله شوینگر[۳] و دوایت با فرمول‌بندی زمان ویژه و بسط هسته گرمایی[۴]، توسعه یافت. در دهه‌های اخیر نیز، افرادی همچون کامپورسی[۵] و کالین[۶] در زمینه هسته گرمایی کارهای ارزنده‌ای کرده‌اند.

در این فصل بطور مختصر، مهم‌ترین روش‌های بدست آوردن هسته گرمایی را ذکر می‌کنیم[۲].

فصل چهارم: یک رابطه کلی برای هسته گرمایی در فضای ریمانی وجود دارد. این رابطه بوسیله دوایت، وهلر[۷] و فاینمن بررسی و تکمیل شد. در این فصل بصورت اصولی روند بدست آوردن هسته گرمایی برای فضای ریمانی را ذکر می‌کنیم[۱۲، ۱۳].

فصل پنجم: این فصل اختصاص یافته به حالت‌های همدوس که از طریق هسته گرمایی برای فضاهای کروی $\mathbb{S}^n$ و هذلولی‌وار $\mathbb{H}^n$ بدست می‌آید. هسته گرمایی را با همان روش‌های ذکر شده در فصل‌های قبل بدست می‌آوریم و سپس با روش ابداعی، حالت‌های همدوس را از آن استخراج می‌نمائیم. در اینجا ما برای اولین بار توانستیم حالت‌های همدوس روی حلقه S^1 ، کره S^2 و هذلولی‌وار H^2 را بطور مستقیم و با استفاده از هسته گرمایی بدست آوریم. در انتهای این فصل برخی از کاربردهای روش ابداعی را ذکر می‌کنیم[۱۴، ۱۹، ۲۰، ۲۴، ۲۵، ۱۷].

---

[۱] V. V. Morette

[۲] DeWitt

[۳] Schwinger

[۴] heat kernel

[۵] R. Camporesi

[۶] D. Calin

[۷] Wheeler

فصل ۲

معادله گرما و کاربردهای آن

معادله گرما یک معادله کلی برای توصیف پخش ذرات در فیزیک کلاسیک یا توزیع احتمال در فیزیک کوانتوم می‌باشد. در این فصل روش‌های بدست آوردن معادله گرما، کاربردها و حل‌های خاص آن را در فضای اقلیدسی بررسی می‌کنیم. هدف از این فصل شناخت کلی معادله گرما، که هسته گرمایی یکی از جواب‌های این معادله در فضای ریمانی است، می‌باشد. در واقع ما می‌خواهیم نشان دهیم که روش‌هایی که برای حل معادله گرما در فضایی اقلیدسی بکار می‌رود، در حالت کلی و در فضای ریمانی کاربردی ندارد. هسته گرمایی برای فضای ریمانی را در فصل بعد مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲-۱ بدست آوردن معادله‌ی گرما

۲-۱-۱ مدل ریاضی برای بدست آوردن معادله‌ی گرما

معادله‌ی گرما، یک مورد خاصی از معادله دیفرانسیل جزئی خطی مرتبه دوم عام، به شکل زیر است:

$$A\partial_x^2 + B\partial_x\partial_t + C\partial_t^2 + D\partial_x + E\partial_t + F = 0 \quad , \tag{۲-۱}$$

که ضرایب A, B, C, D, E, F توابع روی x و t هستند.

شرایط	نوع معادله	مثال	معادله
$B^2 < 4AC$	بیضی گون	$\partial_x^2 u + \partial_t^2 u = 0$	لاپلاس
$B^2 > 4AC$	هذلولی گون	$\partial_x^2 u - \partial_t^2 u = 0$	موج
$B^2 = 4AC$	سهمی گون	$\partial_x^2 u - \partial_t u = 0$	گرما

هرمعادله یک منحنی مخروطی با توجه به شرایط آن معادله پیشنهاد می‌کند که نام‌های داده شده به معادلات از شکل هندسی آن‌ها اقتباس شده است.

معادله لاپلاس: معادله‌های استاتیکی که حداقل سطح پتانسیل‌گرانشی یا الکتریکی و... دارند، را توصیف می‌کند. شکل هندسی این معادلات ریمانی هستند.

معادله موج: انتشار مکانیکی، رادیویی و الکترومغناطیسی موج و تابش را توصیف می‌کند. هندسه این معادلات از هندسه لورنتزی تبعیت می‌کند.

معادله گرما: پخش یا توزیع پدیده‌ها در فیزیک کلاسیک را توصیف می‌کند. معادله‌های از نوع شرودینگر در کوانتوم و بلاخ-اسشولز از این نوعند[۲].

۲-۱-۲ مدل فیزیکی برای بدست آوردن معادله‌ی گرما

در مطالعه گرما یک مدل فیزیکی می‌تواند به اینصورت تصور شود که گرما را به صورت یک سیالی که درون ماده جریان دارد و آزادانه از یک مکان به مکان دیگری منتقل می‌شود، درنظر گرفت. دما را می‌توان مستقیماً توسط دماسنج اندازه گیری کرد ولی گرما بطور غیر مستقیم از تعریف زیر ناشی می‌شود.

تعریف: یک واحد گرما مقدار گرمای مورد نیاز تا دمای یک واحد از آب را یک واحد بالا ببرد. برای مثال در دستگاه cgs یک واحد گرما برابر یک **کالری** و یک واحد دما برابر یک **درجه سانتیگراد** است.

ما دو اصل موضوعه درباره طبیعت گرما بیان می‌کنیم،که هر دوی آن‌ها می‌توانند با آزمایش بررسی شوند.

اصل موضوعه اول: تغییرات گرمای ΔQ در ماده مستقیماً متناسب است با جرم ماده (m) و تغییرات دمای آن (Δu) یعنی:

$$\Delta Q = cm\Delta u \;, \tag{۲-۲}$$

که c ثابت تناسبی است که به ماده بستگی دارد و گرمای ویژه ماده نامیده می‌شود.

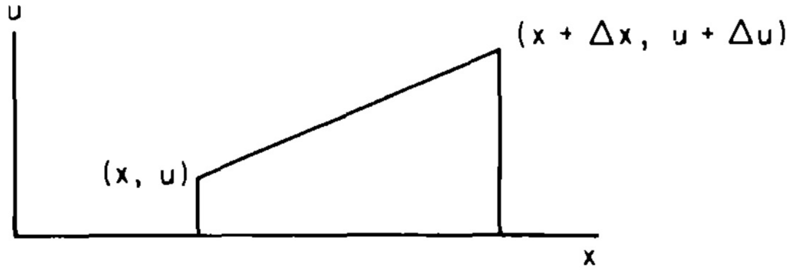
اصل موضوعه دوم: یک میله مستقیم از ماده‌ای همگن در نظر می‌گیریم، که دو طرف آن عایق‌بندی شده و طول آن Δx است (که ثابت می‌باشد). اگر دو انتهای میله در دو دمای مختلف ثابت نگهداشته داشته شود (که این اختلاف برابر Δu است) دما در طول میله خطی شده و مقدار جریان به شدت تغییرات دما $(\Delta u/\Delta x)$ وابسته خواهد شد. بعلاوه کمیت ΔQ مستقیماً متناسب با A و $\Delta u/\Delta x$ و Δt و ثابت تناسبی بنام رسانندگی ماده (l) است. همانند شکل (۲-۱-۲) اگر طول میله را در راستای محور x در نظر بگیریم، دما بطور خطی افزایش می‌یابد.

اگر همانند شکل Δx و Δu مثبت باشند، آنگاه جهت افزایش x و آهنگ جریان $\Delta u/\Delta x$ معکوس شده و مقدار آن $-lA\Delta u/\Delta x$ می‌شود. از اصل موضوعه اول داریم،

$$\frac{\partial Q}{\partial t}\;|_{t_\circ} = cm\frac{\partial u}{\partial t}|_{t_\circ} \;, \tag{۳-۲}$$

$$\Delta Q = -lA\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta t \;. \tag{۴-۲}$$

اگر دما در میله بالا یک تابعی از x باشد طبق اصل موضوعه دوم داریم؛



شکل ۲-۱: *تغییرات دما بر حسب مکان درون میله*

$$\frac{\partial Q}{\partial t}|_{x_\circ} = -lA\frac{\partial u}{\partial x}|_{x_\circ} . \qquad (۵-۲)$$

این آهنگ جریان در سرتاسر سطح $x = x_\circ$ است که متناسب با گرادیان دمای آن می‌باشد. حال باید نشان دهیم که از دو اصل موضوعه بالا می‌توان به معادله گرما زیر رسید،

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} . \qquad (۶-۲)$$

میله حالت قبل را در نظر می‌گیریم که دما در نقطه x و در زمان t با $u(x,t)$ معین می‌شود. ما نشان می‌دهیم که $u(x,t)$ با توجه به اصول موضوعه بالا در معادله گرما صدق می‌کند.

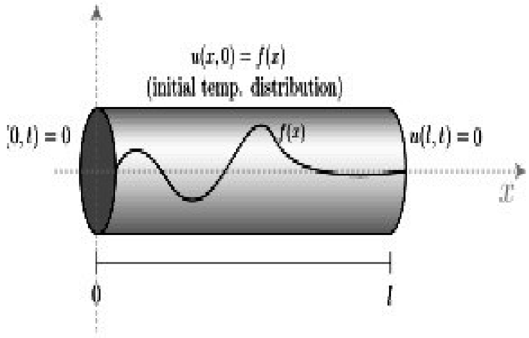
یک بخش عایقی از میله بین نقاط $x_\circ$ و $x_\circ + \Delta x$ در نظر می‌گیریم. با توجه به (۲-۳) می‌بینیم که آهنگ جذب $(\partial Q/\partial t)(x, t_\circ)$ در نقطه x و در زمان $t_\circ$ متناسب با $(\partial u/\partial t)(x, t_\circ)$ است. مقدار میانگین روی تابع دومی در رابطه (۲-۵) در بخشی از نقاط داخلی در $(x_\circ + \theta\Delta x)$ اتفاق می‌افتد، بنابراین آهنگ جذب گرما در تمام بخش برابر است با:

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=t_\circ} = c\rho\Delta xA\frac{\partial u}{\partial t}(x_\circ + \theta\Delta x, t_\circ) \quad \circ < \theta < ۱ , \qquad (۷-۲)$$

که در اینجا $m = \rho\Delta xA$ است. حال این آهنگ گرما را بوسیله اصل موضوعه دیگر تخمین می‌زنیم. با توجه به (۲-۵) آهنگ جریان گرما در بازه $(x_\circ, x_\circ + \Delta x)$ برابر است با؛

$$-lA\frac{\partial u}{\partial x}(x_\circ + \Delta x, t_\circ) + lA\frac{\partial u}{\partial x}(x_\circ, t_\circ). \qquad (۸-۲)$$

این یعنی گرما از نقطه اولیه $x_\circ$ تا نقطه پایانی $x_\circ + \Delta x$ جریان می‌یابد. می‌توان این رابطه را بصورت



شکل ۲-۲: *میله همگن برای بررسی معادله گرما*

زیر نوشت؛

$$lA\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_\circ+\Delta x,t_\circ)-\frac{\partial u}{\partial x}(x_\circ,t_\circ)\right]=lA\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}(x_\circ+\theta\Delta x,t_\circ)\Delta x \quad . \tag{۲-۹}$$

اگر Δx را نزدیک صفر در نظر بگیریم، با برابر قرار دادن دو رابطه (۲-۷) و (۲-۹) داریم:

$$l\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}(x_\circ,t_\circ)=c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x_\circ,t_\circ). \tag{۲-۱۰}$$

که ثابت $a=l/(c\rho)$ رسانندگی گرمایی(ماکسول) یا ضریب پخش نامیده می‌شود. پس می‌توان معادله بالا را بازنویسی کرد:

$$a\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}=\frac{\partial u}{\partial t} \quad . \tag{۲-۱۱}$$

همچنین با انتخاب یک بازه زمانی جدید $(t'=at)$ ضریب a را حذف کرده و خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}=\frac{\partial u}{\partial t'} \quad . \tag{۲-۱۲}$$

از این پس ما این رابطه را در نظر می‌گیریم. البته اگر این شکل را در نظر بگیریم باید از $u(x,at)$ بجای $u(x,t)$ استفاده کنیم. برای یک توزیع دما در یک میله، می‌توانیم مجموع گرما را در بازه (a,b) و در زمان $t_\circ$ بصورت زیر در نظر بگیریم[۳]:

$$Q(t_\circ)=c\rho\int_a^b u(x,t_\circ)dx. \tag{۲-۱۳}$$

۲-۲ معانی فیزیکی و تفسیر معادله گرما

یک گاز محصور در حجم V را در نظر می‌گیریم($V \in \mathbb{R}^۳$) . دمای گازدر هر نقطه ($x \in V$) و در زمان t با $u(x,t)$ معین می‌شود. اگر Ω یک حوزه از V باشد $\partial\Omega$ یک المان (سطحی) از این حوزه می‌باشد و ν بردار یکه سرعت[۱]برای این المان است. با فرض اینکه هیچ جذب یا نشر گرمایی وجود ندارد (یعنی هیچ افزایش یا کاهشی برای جرم نداریم)، ما می‌توانیم قانون بقای انرژی گرمایی را برای این ناحیه بررسی کنیم. قانون بقای انرژی گرمایی از تعریف زیر بدست می‌آید:

آهنگ تغییرات انرژی کل نسبت به زمان درناحیه Ω معادل جریان خالص انرژی در سرتاسر مرز $\partial\Omega$ می‌باشد.

انرژی گرمایی کل (گرما) در ناحیه Ω در زمان t از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$U(t) = \int_{\Omega} u(x,t)dx. \qquad (۲-۱۴)$$

جریان خالص انرژی سرتاسر مرز ناحیه با توجه به قانون فوریه بدست می‌آید:

$$Q(t) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} d\sigma, \qquad (۲-۱۵)$$

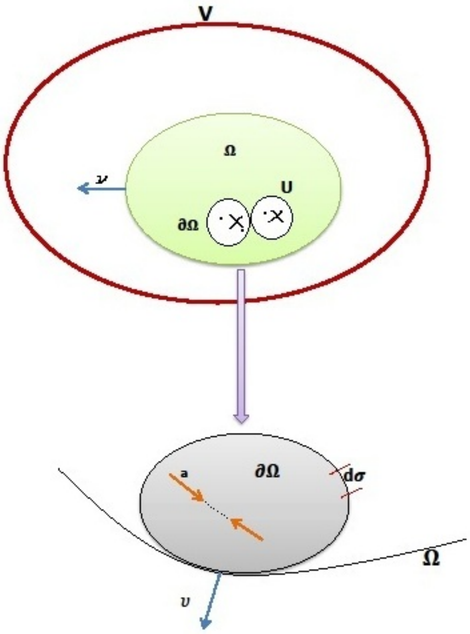
$d\sigma$المان بر روی ناحیه $\partial\Omega$می باشد. در رابطه بالا مشتق نرمال از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = \langle \nabla_x u(x,t), \nu(x) \rangle, \qquad x \in \partial\Omega, \qquad (۲-۱۶)$$

که چگالی جریان نرمال در مرز $\partial\Omega$ می‌باشد. اگر $x \in \partial\Omega$ باشد آنگاه فقط ذراتی از گاز درجریان خالص انرژی $Q(t)$ سهم دارند که به صورت عمودی بر المان $\partial\Omega$ وارد می‌شوند و بقیه ذرات گاز که درجهت‌های دیگر وارد $\partial\Omega$ می‌شوند، به علت برخورد با یکدیگر در$Q(t)$ سهمی ندارند. با توجه به شکل (۲-۲) می‌توان دید که U یک همسایگی از $\partial\Omega$ می‌باشد و ذراتی مانند a و b که به صورت غیر عمود از U وارد ناحیه $\partial\Omega$ می‌شوند، با برخورد به یکدیگر حذف می‌شوند. پس جریان خالص انرژی برابر مجموع ذراتی که با دمای $u(x,t)$ به طور عمودی با سرعت ν از سطح خارج می‌شوند، می‌باشد.

ما جریان خالص انرژی را برای $\partial\Omega$ بدست آوردیم. حال اگر این جریان را به ناحیه Ω بسط دهیم، آهنگ تغییرات انرژی کل را که همان قانون پایستگی انرژی گرمایی است، را بدست می‌آوریم. با توجه

[۱]normal unit



شکل ۲-۳: *فقط ذراتی در شارش کلی جریان سهیم هستند که بطور عمودی وارد ناحیه شوند*

به قانون گاوس[1] می‌توان تغییرات گرما در سرتاسر مرز را بدست آوریم:

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} d\sigma = \int \overrightarrow{\nabla_x} \cdot \overrightarrow{\nabla_x} u(x,t) dv = \int_{\Omega} \Delta_x u(x,t) dx = Q(t). \qquad (۱۷-۲)$$

پس می‌توان قانون بقای انرژی را (با توجه به تعریف آن) به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t) = Q(t), \qquad (۱۸-۲)$$

با جایگذاری رابطه‌های (۲-۱۴) و (۲-۱۷) در رابطه بالا داریم:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) dx = \int_{\Omega} \Delta_x u(x,t) dx. \qquad (۱۹-۲)$$

ازآنجائیکه $\Omega \subset V$ می‌توان حالت کلی معادله گرما را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \Delta_x u(x,t), \qquad x \in V, t \geqslant 0 \qquad (۲۰-۲)$$

که معادله گرما برای لاپلاسی Δ_x روی فضای $\mathbb{R}^3$ نامیده می شود.

لاپلاسی روی فضاها و نیز در دستگاه‌های مختلف از هر فضا، شکل‌های متفاوتی دارد. مثلاً در فضای

[1] $\int_v \nabla . A d^3 x = \int_s A.n da$