وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تفرش

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

معادلات اویلر لاگرانژ برای تابعی‌های تعریف شده روی منیفلدهای فرشه

استاد راهنمای اول:

دکتر علی پارسیان

استاد راهنمای دوم:

دکتر اسماعیل نظری

دانشجو:

مریم خدیور

۱۳۹۰

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تفرش

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

معادلات اویلر لاگرانژ برای تابعی‌های تعریف شده روی منیفلدهای فرشه

استاد راهنمای اول:

دکتر علی پارسیان

استاد راهنمای دوم:

دکتر اسماعیل نظری

دانشجو:

مریم خدیور

۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به پدر و مادر مهربانم

در دایره‌ی قسمت ما نقطه‌ی تسلیمیم لطف آنچه تو اندیشی حکم آنچه تو فرمایی

والاترین تقدیرها شایسته‌ی نام اوست، پروردگارا، تو را سپاس می گویم...

در آغاز بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم بوسه می‌زنم که بی‌شک، بزرگترین معلمان و حامیانم و محبت‌ها و زحمات ایشان بزرگترین سرمایه‌ی زندگی‌ام و برایم غیر قابل بیان و جبران است. همچنین از برادر عزیزم، خواهر مهربانم و جناب آقای عبداله امیری به پاس عاطفه‌ی سرشار ایشان وگرمای امیدبخش وجودشان تشکر می کنم.

بدینوسیله تشکراتم را به استاد فرهیخته و ارجمندم دکتر علی پارسیان که در طول این دوره‌ی تحصیلی درنگارش و ذکر نکات مهم این مکتوب یاری‌ام نموده و همواره پشتیبان و راهگشایم بوده‌اند تقدیم می‌دارم. و همچنین از استاد بزرگوارم دکتر اسماعیل نظری که زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده داشته‌اند، سپاسگزاری و قدردانی می‌نمایم.

در این دوره‌ی تحصیلی برای من آشنایی با استاد ارجمندم دکتر علی سوری فرصتی بزرگ بود و اینجانب نگارش این مکتوب را وامدار زحمات و لطف ایشان می‌باشم و نه آنچنان که شایست، تنها از رهگذر سپاس و ادب، مراتب امتنان خود را به ایشان تقدیم می‌دارم.

بر خود لازم می‌دانم از اساتید محترم، دکتر دوستعلی مژده و دکتر محمد اکبری که زحمت داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشتند و در فرصتی کوتاه نکاتی ارزشمند به من آموختند، تشکر و قدردانی نمایم.

چکیده

در این پایان‌نامه مدلی از معادلات اویلر لاگرانژ برای یک تابعی تعریف شده بر منیفلدهای فرشه ارائه شده است. در فیزیک ساختارهایی کلی در ارتباط با میدان‌ها وجود دارد. یک میدان برداری یک نگاشت مشتق‌پذیر $\psi : M \to \Gamma^{\infty}E$ است،که M یک منیفلد و E کلاف برداری روی آن و $\Gamma^{\infty}E$ فضای برش‌های مشتق‌پذیر کلاف برداری می‌باشد. برای مثال در نظریه‌ی میدان کوانتوم، E یک کلاف چرخشی روی M ، در نظریه‌ی میدان پیمانه‌ای، E کلاف هموستارهای روی یک کلاف اصلی روی M ، و در نظریه‌ی نسبیت‌عام، E ،کلاف مترهای ریمانی روی M می‌باشد. معادلات دینامیکی برای چنین میدان‌هایی، معادلات اویلر-لاگرانژ برای تابعی به شکل(1) است که L به میدان‌های $\psi(x^{\mu})$ و مشتق‌هایش $\partial_r \psi(x^{\mu})$ بستگی دارد.

از نقطه نظر آنالیز سرتاسری چنین میدان‌های ψ به‌عنوان نگاشت‌های $\psi : M \to N$ هستند که N یک منیفلد تانسوری می‌باشد. بنابراین به بررسی و یافتن نقاط بحرانی تابعی‌های از گونه‌ی

$$A[\psi] = \int_M L(\psi, \partial\psi) dx \qquad (1)$$

می‌پردازند که، $L \in TC^{\infty}(M,N)$.

فضای نگاشت‌های مشتق‌پذیر $C^{\infty}(M,N)$ به‌عنوان منیفلدی با بعد نامتناهی مدل‌شده روی فضای فرشه معرفی می‌شود که در آن M فشرده است، اگرچه این نظریه را می‌توان به هر M دلخواه تعمیم داد. بنابراین، هم‌اینکه یک منیفلد با بعد نامتناهی فرشه معرفی شده و هم تابعی‌های تعریف شده بر آن بررسی شده است.

به‌طور کلی‌تر برای سر وکار داشتن با موقعیت‌های دینامیکی منحنی‌های $c : J \subset R \to M$ (M یک منیفلد با بعد نامتناهی فرشه) و لاگرانژین‌های وابسته به منحنی و مشتق‌هایش را بررسی می‌کنند. هدف اصلی به دست آوردن یک بیان برای معادلات اویلر-لاگرانژ در این دستگاه به دقیقی امکان آن برای حساب تغییرات در فضاهای با بعد متناهی می‌باشد.

درواقع نتیجه‌ی اصلی این پایان‌نامه بیان می‌کند که، اگر $L \in C^{\infty}(TM,R)$ چنین لاگرانژینی باشد، آن‌گاه یک منحنی c یک نقطه‌ی بحرانی برای آن است، اگر وتنهااگر در معادلات اویلر-لاگرانژ صدق کند.

واژگان کلیدی: منیفلد نگاشت‌ها، لم اساسی تعمیم یافته‌ی حساب تغییرات، معادلات اویلر-لاگرانژ.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

پیشگفتار **۱**

فصل اول : مفاهیم مقدماتی از آنالیز و هندسه

۱-۱ تعاریف اولیه **۵**

۱-۲ کلاف‌های برداری **۹**

۱-۳ ویژگی‌ها و مشکلات فضاهای فرشه **۱۴**

فصل دوم: منیفلد نگاشت‌ها

۲-۱ هموستارها روی کلاف‌های برداری **۱۸**

۲-۲ فضای باناخ برش‌ها **۲۴**

۲-۳ منیفلد نگاشت‌ها **۲۵**

فصل سوم: فضاهای برداری توپولوژیک

۳-۱ پیش‌نیازها **۳۱**

۳-۲ توپولوژی‌های مختلف روی فضاهای موضعا محدب **۴۳**

۳-۳ فضاهای بشکه‌ای **۵۴**

۳-۴ فضاهای بورنولوژیک ۵۶

۳-۵ فضاهای برداری مناسب ۵۷

۳-۶ توپولوژی C^∞ ۵۸

فصل چهارم : معادلات اویلر-لاگرانژ برای تابعی‌های تعریف شده روی منیفلدهای فرشه

۴-۱ انتگرال‌گیری روی دوگان فضاهای فرشه ۶۳

۴-۲ لم DuBois-Reymond ۶۹

۴-۳ معادلات اویلر-لاگرانژ ۷۲

مراجع

پیشگفتار

مطالعه‌ی خمینه‌های با بعد نامتناهی به دلیل ارتباط آن با فیزیک نظری و هندسه‌ی دیفرانسیل موضوع تحقیق بسیاری از پژوهشگران بوده است. در حالت کلی مساله‌های باز زیادی در مورد خمینـــه‌های با بعد نامتناهی وجود دارد. به‌خصوص در مورد خمینه‌هایی که روی فضاهای غیر باناخ مدل‌بندی می‌شوند. برای مثال کلاف مماس[۱] یک خمینه‌ی هموار را که روی فضای برداری توپولوژیک غیر باناخ $\mathbb{F}$ مدل شده است، می‌توان مطرح نمود.

در مورد چنین خمینه‌هایی وجود ساختار کلاف برداری برای TM مورد سئوال است. همین امر باعث می‌شود مطالعه‌ی بسیاری از خواص هندسی روی چنین خمینه‌ای غیر ممکن باشد. مهمترین مشکل در مطالعه‌ی این نوع خمینه‌ها به ساختار گروه خطی اصلی $GL(\mathbb{F})$ از فضای فرشه‌ی $\mathbb{F}$ مربوط می‌شود. در واقع $GL(\mathbb{F})$ حتی یک گروه توپولوژیک نمی‌باشد.[۱۳].

درطول بیش از دو قرن گذشته حساب تغییرات[۲] یکی از توانمندترین افزارهای ریاضی بوده است. با بهره گیری از این افزار می‌توان آگاهانه به مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های جهان پرداخت و افزون بر آن به حل شمـــاری بی‌کران از مسایل مهندسی و علوم کاربردی به اشکالی بسیار ساده و دقیق نایل آمد. از عمده‌ترین انگیزه‌های ابداع و گسترش حساب تغییرات را می‌توان نیازهای تدریجی مکانیک کلاسیک به فرافکنی مشکلات محاسباتی

[۱] Tangent bundle
[۲] Calculus of variations

از حوزه‌ی مشتق‌ها و حل معادلات دیفرانسیل به حوزه‌ی انتگرال‌ها و بهینه‌سازی ذکر نمود. به‌علاوه آن به‌عنوان عامل وحدت‌بخش در مکانیک و به‌عنوان راهنمایی در تعبیر ریاضی بسیاری از پدیده‌های فیزیکی نقش مهمی را ایفا می‌کند. مثلا، معلوم‌شده هرگاه آرایش دستگاهی از ذرات متحرک از جاذبه‌ی متقابل بین آنان پیروی کند، آن‌گاه مسیر واقعی آن‌ها منحنی‌های مینیمم کننده‌ی انتگرال تفاضل انرژی‌های جنبشی و پتانسیل دستگاه نسبت به زمان خواهد بود. این قضیه‌ی پرکاربرد از مکانیک کلاسیک به افتخار یابنده‌اش به اصل هامیلتون[۳] شهرت دارد. در فیزیک نوین نیز، اینشتین در اثر خود راجع به نسبیت‌عام[۴] از حساب تغییرات استفاده‌ی گسترده‌ای کرد، و شرودینگر[۵] آن‌را برای یافتن معادله‌ی موج مشهورش که یکی از پایه‌های مکانیک کوانتومی است، به‌کار گرفت.

معنای فیزیکی منحنی‌های ژئودزیک[۶] به ساده‌ترین صورت خود در نتیجه‌ی زیر از اصل هامیلتون در حساب تغییرات ظاهر می‌شود: هرگاه ذره‌ای مقید به حرکت روی رویه‌ی خمیده باشد و هیچ نیرویی به آن وارد نشود، آن‌گاه این ذره در امتداد یک منحنی ژئودزیک حرکت خواهد کرد. تعمیم صریحی از این مفهوم، هسته‌ی نظریه‌ی نسبیت عام را تشکیل می‌دهد، که اساسا یک نظریه‌ی گرانشی است. اینشتین هندسه‌ی فضا را به‌عنوان یک هندسه‌ی ریمانی در نظر گرفت که در آن انحنا و منحنی‌های ژئودزیک به‌وسیله‌ی توزیع ماده تعیین می‌شود. در این فضای خمیده، سیارات روی منحنی‌های ژئودزیک در مدارهای خود حول خورشید می‌گردند، به‌جای این‌که به وسیله‌ی نیروی گرانشی مرموزی که هرگز کسی واقعا ماهیت آن را درک نکرده است روی مسیرهای خمیده کشیده شوند.

تعدادی از مسایل حساب تغییرات بسیار قدیمی‌اند و توسط یونانیان باستان مورد بررسی قرار گرفته و در مواردی حل شده‌اند. پیدایش حساب دیفرانسیل و انتگرال معمولی توسط نیوتن و لایب‌نیتس انگیزه‌ی مطالعه‌ی تعدادی از مسایل تغییراتی شد و برخی از این مسایل با روش‌های ویژه‌ی هوشمندانه‌ای حل شدند. ولی این مبحث با کشف معادله‌ی دیفرانسیل اساسی اویلر برای منحنی مینیمم‌کننده، در سال ۱۷۴۴، به‌عنوان شاخه‌ای منسجم از آنالیز وارد صحنه گردید.

حساب تغییرات در فیزیک، معمولاً به‌صورت زیر به‌کار می‌رود:

---

[۳] Hamilton
[۴] General Relativity
[۵] Schrodinger
[۶] Geodezic

یک ذره در R^n را که از یک نقطه‌ی P به یک نقطه‌ی Q در حال حرکت است، در نظر می‌گیریم. در بین تمامی مسیرهای ممکن $c: R \to R^n$، ذره مسیری را طی می‌کند که تابعی

$$A[c] = \int_{t_P}^{t_Q} L(c(t), c^{'}(t))dt \qquad (۱-۱)$$

را مینیمم سازد، که در آن $L \in C^{\infty}(R^n \times R^n)$ تابع لاگرانژ یا لاگرانژین[۷] نامیده می‌شود. (با شرایط نقاط پایانی $c(t_P) = P$ و $c(t_Q) = Q$.) این مسیر با حل معادلات اویلر-لاگرانژ[۸] زیر مشخص شده است،

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}(c(t), c^{'}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y^i}(c(t), c^{'}(t)) = 0, \quad 1 \le i \le n \qquad (۱-۲)$$

که $\{x^i, y^i\}$ یک مجموعه از مختصات روی $R^n \times R^n$ است.

این دستگاهی از مکانیک ذره است، اما در فیزیک ساختارهای کلی‌تری در ارتباط با میدان‌ها وجود دارد. یک میدان (برداری) یک نگاشت مشتق‌پذیر،

$$\psi : M \to \Gamma^{\infty} E$$

است که M یک منیفلد و E کلاف برداری آن و $\Gamma^{\infty} E$ فضای برش‌های مشتق‌پذیر آن می‌باشد. برای مثال در نظریه‌ی میدان کوانتوم، E یک کلاف چرخشی[۹] روی M [۲۶،۹،۸]، در نظریه‌ی میدان پیمانه‌ای، E کلاف هموستارهای روی یک کلاف اصلی روی M [۱۷،۷،۵]، و در نظریه‌ی نسبیت‌عام، E، کلاف متره‌ای ریمانی روی M [۲۳،۱۹،۱۴] می‌باشد. برای مثال نظریه‌های پیمانه‌ای که بر اساس نظریه‌ی میدان کوانتوم ساخته می‌شوند و این شرط در آن‌ها لحاظ می‌شود که ساختار نظریه تحت تقارن‌های خاصی که تقارن پیمانه‌ای نامیده می‌شود، بدون تغییر بماند. موردی از آن در نظریه‌ی میدان پیمانه‌ای الکترومغناطیسی است که آن‌را الکترودینامیک کوانتومی (q.e.d) می‌نامند، این تقارن از نظر مفهومی مانند تعریف مجدد بار الکتریکی است که بقائ بار الکتریکی از آن ناشی می‌شود، در این نظریه‌ها یک تابع لاگرانژی نوشته می‌شود که از میدان‌های موجود در نظریه و مشتقاتش ساخته می‌گردد. ناوردایی نظریه تحت تبدیلات پیمانه‌ای به معنای ناوردایی

---

۷ Lagrangian
۸ Euler-Lagrange equations
۹ Spinor bundle

لاگرانژی تحت این تبدیلات است. بنابراین در هر مورد معادلات دینامیکی برای چنین میدان‌هایی معادلات اویلر-لاگرانژ برای یک تابعی به شکل (۱-۱) است که L به میدان‌های $\psi(x^{\mu})$ و مشتق‌هایش $\partial_r\psi(x^{\mu})$ بستگی دارد.

از نقطه نظر آنالیز سرتاسری[۱۰] چنین میدان‌های ψ به‌عنوان نگاشت‌های $\psi : M \to N$ هستند که N یک منیفلد تانسوری می‌باشد. بنابراین به بررسی و یافتن نقاط بحرانی تابعی‌های از گونه‌ی

$$A[\psi] = \int_M L(\psi, \partial\psi)dx$$

می‌پردازند که، $L \in TC^{\infty}(M,N)$.

به‌طور کلی‌تر برای سر و کار داشتن با موقعیت‌های دینامیکی منحنی‌های $c : J \subset R \to M$ (M یک منیفلد با بعد نامتناهی فرشه) و لاگرانژین‌های وابسته به منحنی و مشتق‌هایش را بررسی می‌کنند. هدف اصلی به‌دست آوردن یک بیان برای معادلات اویلر-لاگرانژ در این دستگاه به دقیقی امکان آن برای حساب تغییرات در فضا های با بعد متناهی می‌باشد.

درواقع نتیجه‌ی اصلی این پایان‌نامه بیان می‌کند که، اگر $L \in C^{\infty}(TM, R)$ چنین لاگرانژینی باشد، آن‌گاه یک منحنی c یک نقطه بحرانی برای آن است، اگر وتنهااگر در معادلات اویلر-لاگرانژ،

$$(D_1L)(u(t),u^{'}(t)) - \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=t}(D_2L)(u(\varepsilon),u^{'}(\varepsilon)) = 0$$

صدق کند. در یک کارت موضعی، L و $u(t)$ بیان موضعی برای $L^{'}$ و $c(t)$ و $D_iL(i \in \{1,2\})$ مشتق‌های جزئی L هستند،که این تعمیمی مستقیم از حساب تغییرات روی فضاهای باناخ نمی‌باشد.

فضای نگاشت‌های مشتق‌پذیر $C^{\infty}(M,N)$ به‌عنوان یک منیفلد با بعد نامتناهی مدل‌شده روی فضـــــای فرشه، در فصل ۲ معرفی شده، که در آن M فشرده می‌باشد و در آخر (در فصل پنجم) تابعی‌های تعریف شده روی آن‌را بررسی می‌کنیم.

[۱۰] Global analysis

در فصل ۳ منیفلدهای با بعد نامتناهی مدل‌شده روی فضاهای برداری مناسب[۱۱] را که کلی‌تر از فضـاهای فرشه‌اند معرفی کرده و در فصل ۴ چند نتیجه‌ی ابزاری از انتگرال‌گیری برداری و لم Dubois-Reymond را برای استفاده در برهان قضیه‌ی اصلی بیان کرده‌ایم و در آخر، نتیجه‌ی اصلی پایان‌نامه را بیان و اثبـات آن‌را ارائه داده‌ایم.

[۱۱] Convenient vector spaces

فصل یک

مفاهیم مقدماتی از آنالیز و هندسه

۱-۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۱ گروه جمعی آبلی X تحت عمل ضرب اسکالر از میدان F را یک فضای برداری روی F گوئیم. هرگاه برای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha, \beta \in F$ داشته باشیم:

الف) $\alpha x \in X$،

ب) $1.x = x$،

پ) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$،

ت) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$،

ث) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

تعریف ۲.۱.۱ فرض‌کنیم $X \neq \phi$ و $d : X \times X \to R^+ \bigcup \{0\}$ تابعی باشد که برای عناصر دلخواه $x, y, z \in X$ داشته باشیم:

الف) $d(x, y) = 0$ اگر وتنهااگر $x = y$،

ب) $d(x, y) = d(y, x)$،

پ) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$،

در این‌صورت d را یک متر روی X و (X,d) را یک فضای متری می‌نامند.

تعریف ۳.۱.۱ فرض‌کنیم X مجموعه‌ای و τ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد. $\tau \subseteq p(X)$ را یک توپولوژی در X گوییم، هرگاه:

الف) $X, \phi \in \tau$،

ب) اگر $A, B \in \tau$، آن‌گاه، $A \bigcap B \in \tau$،

پ) به‌ازای هر زیرگردایه‌ی دلخواه τ مانند A، $\bigcup A \in \tau$.

در این‌صورت (X, τ) را یک فضای توپولوژیک گوییم.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان F، τ یک توپولوژی روی X باشد، (X, τ) را یک فضای برداری توپولوژیک گوییم، هرگاه:

الف) $(x,y) \mapsto x+y$ از $X \times X$ به X پیوسته باشد،

ب) $(\alpha,x) \mapsto \alpha x$ از $F \times X$ به X پیوســـــته باشد.

تعریف ۵.۱.۱ دنباله‌ی $\{a_n\}$ را در فضای متری (X,d)، کوشی گوییم هرگاه:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad s.t \quad \forall n,m \geq N \quad d(a_n, a_m) < \varepsilon.$$

تعریف ۶.۱.۱ فضای متری (X,d) را کامل گوییم، هرگاه هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا باشد.

تعریف ۷.۱.۱ یک نیم‌نرم بر فضای برداری X تابعی حقیقی مانند P بر X است به‌طوری‌که به‌ازای هر $x, y \in X$ و جمیع اسکالرهای α،

الف) $P(x+y) \leq P(x) + P(y)$

ب) $P(\alpha x) = \alpha P(x)$

پ) $x = 0 \Rightarrow P(x) = 0$.

تعریف ۸.۱.۱ فضای برداری X را یک فضای نرم‌دار خطی گوییم هرگاه، به‌ازای هر $x \in X$، عدد حقیقی نامنفی $\|x\|$ متناظر باشد، به‌طوریکه:

الف) برای هر $x, y \in X$، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$،

ب) برای هر اسکالر α و $x \in X$، $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$،

پ) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$،

در این‌صورت $(X, \|.\|)$ را یک فضای نرم‌دار می‌نامند.

تعریف۹.۱.۱ فضای نرم‌دار خطی را که با متر القا شده توسط نرم فضا کامل باشد، یک فضای باناخ یا B-فضا می‌نامند.

مثال۱۰.۱.۱ ساده‌ترین فضای باناخ میدان مختلط C با نرم $\|x\| = |x|$ است، که در آن $d(x, y) = |x - y|$.

مثال۱۱.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک دلخواه باشد. فضای خطی تمامی توابع پیوسته و کراندار $f : X \to R$ را با $CB(X)$ نشان می‌دهیم. اگر برای هر $f \in CB(X)$ قرار دهیم: $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ و روی $CB(X)$ جمع و ضرب نقطه‌وار تعریف کنیم، آن‌گاه $CB(X)$ یک فضای باناخ است. نشان می‌دهیم $CB(X)$ فضایی تام است.

فرض می‌کنیم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کوشی در $CB(X)$ و $\varepsilon \geq 0$ داده شده باشد. وجود دارد n_0 بقسمی‌که $m, n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$.

بنابراین به ازای هر $x \in X$ و هر $m, n \geq n_0$ داریم: پس،

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon.$$

$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ برای هر $x \in X$ دنباله‌ای کوشی در R است. قرار می‌دهیم:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_m(x)| + \|f_m - f_n\| \leq |f(x) - f_m(x)| + \varepsilon$$

حال اگر در رابطه‌ی فوق $m \to \infty$، برای $n \geq n_0$ داریم: $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.

پس دنباله‌ی $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ روی X به‌طور یکنواخت همگرا به f است. هم‌چنین f به‌عنوان حد یکنواخت دنباله‌ای از توابع پیوسته، پیوسته است. به‌علاوه برای n باندازه‌ی کافی بزرگ داریم، $\|f - f_n\| \leq 1$ بنابراین،

$$\|f\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n\| \leq 1 + \|f_n\| < \infty،$$

یعنی $f\in CB(X)$ و در نتیجه $CB(X)$ تام است.

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنیم X, Y دو فضای توپولوژیک باشند، نگاشت پیوسته، دوسویی و باز (بسته) $f: X\to Y$ را یک همانریختی[۱۲] می‌نامند.

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض‌کنیم M یک مجموعه و $\{E_i\}$ خانواده‌ای از فضاهای باناخ باشد. یک اطلس[۱۳] از کلاس C^p $(p\ge 0)$ روی M، گردایـــه‌ای از زوج‌های $\{(U_i,\varphi_i): i\in I\}$ است که در شرایط زیر صدق کنند:

الف) برای هر $i\in I$ $\quad U_i\subseteq M \quad , \quad M\subseteq \bigcup U_i$.

ب) هر φ_j یک نگاشت دوسویی از U_i به $\varphi_i U_i$ است و $\varphi_i U_i\subset E_i$ باز است و $\varphi_i(U_i\bigcap U_j)$ برای هر $i, j\in I$ در E_i باز است.

پ) نگاشت $\varphi_i o\varphi_j^{-1}:\varphi_j(U_i\bigcap U_j)\to\varphi_i(U_i\bigcap U_j)$ یک C^p ـهـــــمانریختی برای هر i, j است.

با شرایط فوق می‌توان یک توپولوژی یکتا روی Mچنان تعریف کرد که U_iها باز و φ_iها، C^p همـــــانریختی باشند. هر زوج (U_i,φ_i) را یک کارت اطلس گوییم و اگر نقطه‌ای مانند p از M عضو U_i باشد، گوییم (U_i,φ_i) یک کارت حول p است. در شرط (ب) اگر همه‌ی E_iها برابر E باشند، آن‌گاه اطلس را یک E–اطلس می‌گوییم. زوج (U,φ) با اطلس $\{(U_i,\varphi_i)\}$ از M سازگار است، اگر برای هر $i\in I$ که $U_i\bigcap U\neq\varnothing$، آن‌گاه $\varphi_i o\varphi^{-1}:\varphi U\to\varphi_i U_i$ یک C^p–همانریختی باشد. دو اطلس روی M سازگارند، هرگاه هر کارت اطلس اول با هر کارت از اطلس دوم سازگار باشد. به‌راحتی می‌توان نشان داد رابطه‌ی سازگاری بین اطلس‌ها یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. می‌گوییم یک کلاس هم‌ارزی از اطلس‌های C^p روی M یک ساختار C^p– خمینـــــه روی M تعریف می‌کند. اگر برای یک اطلس همه‌ی E_iها یکسان باشند، یعنی برای هر $i\in I$، $E_i=E$، در این‌صورت M را یک E–خمینه می‌گوییم یا این‌که گوییم M روی E مدل[۱۴] شده است. در حالت خاص $E=R^n$ منیفلد را n بعدی (موضعا اقلیدسی) گویند.

۲.۱ کلاف‌های برداری[۱۵]

تعریف ۱.۲.۱ یک نگاشت پیوسته و پوشای C^p، $\pi: E\to M$ از منیفلدهای C^p موضعاً بدیهی[۱۶] از رتبه‌ی r است، هرگاه:

---

[۱۲] homeomorphism
[۱۳] atlas
[۱۴] model
[۱۵] Vector bundels

الف) هر تار $\pi^{-1}(p)$ ساختار یک فضای برداری از بعد r داشته باشد.

ب) بـــــــرای هر $p\in M$ یک همسایگی باز U از p و یک دیفیومورفیسم[۱۷] حـــــــافظ تار $\Phi:\pi^{-1}(U)\to U\times R^r$ موجود باشد که هر تار $\pi^{-1}(p)$ را به تار متناظر $\{p\}\times R^r$ به‌صورت یکریختی فضاهای برداری بنگارد.

دراین‌صورت، یک کلاف برداری C^p از رتبه‌ی r، یک سه‌تایی (E,M,π) شامل منیفلدهای E و M و یک نگاشت C^p و پوشای $\pi:E\to M$ است، که موضعاً بدیهی از رتبه‌ی r می‌باشد. گردایه‌ی $\{(U,\varphi,\Phi)\}$ که (U,φ) کارتی برای M است، اطلس کلافی[۱۸] و هر عضو آن یک بدیهی‌سازی موضعی[۱۹] نامیده می‌شود. به‌جهت اختصـــــار به ســــــه‌تایی (E,M,π) کلاف برداری $\pi:E\to M$ یا کلاف E یا کـلاف π نیز گفته می‌شود.

تعریف۲.۲.۱ منیفلد M مفروض است. در هر نقطه‌ی $p\in M$ فضای مماس T_pM متشکل از فضای برداری تمامی عملگرهای مشتق توابع $C_p^{\infty}(M)$ (توابع $f:M\to R$، که روی یک همســـــایگی از $p\in M$ مشتق‌پذیرند.) تعریف می‌شود. کلاف مماس، اجتماع گسسته‌ی $TM=\coprod T_pM=\bigcup_{p\in M}\{p\}\times T_pM$ از تمامی فضاهای مماس می‌باشد و با نگاشت تصویر متعارف $\pi:TM\to M$، $(p,X_p)\mapsto p$، تبدیل به یک کلاف برداری با اطلس کلافی $\{(U,\varphi,d\varphi)\}$ می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱ یک برش[۲۰] از یک کلاف برداری $\pi:E\to M$ یک نگاشت $X:M\to E$ است به‌طوریکه $\pi o X=1_M$.

گوییم یک برش C^p است، اگر به‌عنوان نگاشتی از M به E، C^p باشد. فضای برداری تمامی برش‌های C^p از کلاف برداری π را با $\Gamma^p E$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۴.۲.۱ یک میدان برداری[۲۱] روی منیفلد M، یک تابع $X:M\to TM$ است، که به هر نقطه‌ی $p\in M$، یک بـــردار $X_p\in T_pM$ مربوط می‌کند. به‌طور معـــادل یک برش از کلاف مماس $\pi:TM\to M$ را گویند.

---

[۱۶] Locally trivial

[۱۷] diffeomorphism
[۱۸] Bundle atlas
[۱۹] Local trivialzation
[۲۰] section

اکنون تعریفی از کلاف برداری باناخ را بیان می‌کنیم.

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنیم M یک خمینه‌ی C^p و B یک فضای باناخ و $\pi : E \to M$ یک نگاشت پوشای C^p, $(p \geq 1)$ باشد. فرض‌کنیم $\{U_i\}_{i\in I}$ یک پوشش باز برای M باشد و برای هر $i \in I$ نگاشت $\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times B$ دارای شرایط زیر باشد:

الف) Φ_i یک C^p همانریختی باشد که نمودار زیر را جابه‌جایی کند.

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_i) \arrow[r, "\Phi_i"] \arrow[d, "\pi"'] & U_i \times B \arrow[dl, "pr_1"] \\
U_i &
\end{tikzcd}$$

به‌طور معادل داشته باشیم: $pr_1 o \varphi_i = \pi$

به‌خصوص بر روی هر تار، یکریختی $\Phi_i\big|_{\pi^{-1}(m)} : \pi^{-1}(m) \to B$ حاصل شود.

ب) اگر $\Phi_i\big|_{\pi^{-1}(m)} = \Phi_{i,m}$، آن‌گاه برای مجموعه‌های باز U_i, U_j نگاشت $\Phi_{j,m} o \Phi_{i,m}^{-1} : B \to B$ یک یکریختی خطی باشد.

پ) اگر U_i, U_j دو عضو از پوشش M باشند، آن‌گاه نگاشت،

$$\Phi : U_i \cap U_j \to L(B,B)$$
$$x \mapsto (\Phi_j o \Phi_i^{-1})x$$

یک C^p-همانریختی باشد.

در این صورت سه‌تایی (E, M, π) را یک کلاف برداری باناخ $\{(U_i, \varphi_i, \Phi_i)\}_{i\in I}$ را یک اطلس کلافی و هر عضو آن را یک بدیهی‌سازی موضعی می‌نامیم.

---

۲۱ Vector field

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنیم (E, M, π) یک کلاف برداری باناخ $\{(U_i,\varphi_i,\Phi_i)\}_{i\in I}$ یک بدیهی‌سازی آن باشد، برای هر $(\alpha,\beta)\in I\times I$ که $U_\alpha \bigcap U_\beta \neq \varnothing$ تابع،

$$T_{\alpha\beta}: U_\alpha \bigcap U_\beta \to GL(B,B)$$

به‌صورت

$$T_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha o \Phi_\beta^{-1}\big|_{(U_\alpha \bigcap U_\beta)\times B} : (U_\alpha \bigcap U_\beta)\times B \to (U_\alpha \bigcap U_\beta)\times B$$

$$(m,e) \to (m, T_{\alpha\beta}(m)(e))$$

تعریف می‌شود.

اعضای $\{T_{\alpha\beta} \,|\, \alpha,\beta\in I\}$ را توابع انتقالی[۲۲] اطلس کلاف $\pi : E \to M$ می‌گویند. توابع انتقالی در شرط هم‌دور[۲۳] صدق می‌کنند، یعنی،

الف) $T_{\alpha\alpha} = id$

ب) $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}^{-1}$

پ) $T_{\alpha\beta} o T_{\beta\gamma} = T_{\alpha\gamma}$.

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنیم M', M دو خمینه باشند که روی فضاهای باناخ E', E مدل شده‌اند و نیز (π, E, M) و (π', E', M') دو کلاف برداری به ترتیب با تارهایی یکریخت با فضاهای باناخ E^2, E^1 باشند. جفت (f, f_0) از نگاشت‌های C^p که در آن $f : E \to E', f_0 : M \to M'$ را یک C^pریخت کلاف برداری[۲۴] گوییم، هرگاه:

الف) نمودار

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f_0"'] & M' \end{tikzcd}$$

[۲۲] Transition functions
[۲۳] cocycle
[۲۴] Vector bundle morphism