بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ارومیه

نگاشت جمعی تعمیم یافته در مدولهای باناخ و یکریختی ها بین C^*– جبرها

رقیه علوی

دانشکده‌ی علوم
گروه ریاضی

تابستان ۱۳۸۹

پایان نامه کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر سعید استاد باشی

پایان نامه خانم : **رقیه علوی** به تاریخ **۸۹/۵/۱۲** شماره **۱۰۵۶-۲**

مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۹/۲ (به حروف [illegible]) قرار گرفت.

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران: دکتر سعید استاد باشی

۲- داور خارجی: دکتر علی عبادیان

۳- داور داخلی: دکتر سعید شمس

۴- نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر حبیب اذانچیلر

تقدیر و تشکر

به نام خداوند بخشنده و مهربان

سپاس و ستایش پروردگاری را سزاست که انسان را آفرید و به او نعمت تفکر را ارزانی داشت و او را شکر می گویم که لطف خویش را شامل حالم نمود تا موفق به نگاشتن این رساله شدم : پس هر چه هست لطف اوست و بس .

وظیفه خود می دانم از کلیه کسانی که مرا در به ثمر رساندن این مجموعه یاری کردند به خصوص استاد راهنمای دلسوز و مهربانم جناب آقای دکتر سعید استاد باشی و خانواده ام صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم .

در پایان از زحمات جناب آقای دکتر علی عبادیان به عنوان داور خارجی ، جناب آقای دکتر سعید شمس به عنوان داور داخلی و از راهنمایی های تمامی دوستان و همکلاسی های عزیزم کمال تشکر و قدردانی را دارم .

تقدیم به

پدر و مادر دلسوز و مهربانم

و تقدیم به

برادر شهیدم علیرضا

فهرست مندرجات

فهرست مندرجات

چکیده

این تحقیق بر اساس مقالهٔ زیر نوشته شده است :

Choonkil Baak, Deok-Hoon Boo, Themistocles M. Rassias , Generalized additive mapping in Banach modules and isomorphisms between C^* -algebras , J. Math. Anal. Appl. 314 (2006) 150-161.

Keywords: Banach module over C^* -algebra; Functional equation in d variables; Hyers-Ulam stability; C^* -algebra isomorphism

فرض کنید X,Y فضاهایی برداری باشند نشان داده شده است که اگر نگاشت فرد $f : X \to Y$ در معادلهٔ تابعی

$$rf\left(\frac{\sum_{j=1}^{d} x_j}{r}\right) + \sum_{\iota(j)=0,1} rf\left(\frac{\sum_{j=1}^{d}(-1)^{\iota(j)}x_j}{r}\right)$$
$$= ({}_{d-1}C_l - {}_{d-1}C_{l-1} + 1)\sum_{j=1}^{d} f(x_j) \qquad s.t \qquad \sum_{j=1}^{d}\iota(j) = l \qquad (1)$$

صدق کند آنگاه نگاشت فرد $f : X \to Y$ جمعی است. همچنین پایداری هایرز – اولام معادلهٔ تابعی (۱) در مدول های باناخ روی یک C^*– جبر یک دار ثابت شده است. همچنین ثابت شده است که هر دوسویی تقریباً خطی $h : A \to B$، از C^*– جبر یک دار A بروی C^*– جبر یک دار B، یک یکریختی C^*– جبر می باشد هرگاه

فهرست مندرجات

$$h\left(\frac{۲^n}{r^n}uy\right) = h\left(\frac{۲^n}{r^n}u\right)h(y) \qquad (u \in A, y \in A, n = ۰, ۱, ۲, \ldots)$$

پیش گفتار

این پایان نامه بر اساس مراجع [۱] و [۲] در ۳ فصل نوشته شده است.

درفصل اول به تعاریف، مفاهیم اولیه و تاریخچهٔ پایداری پرداخته شده است که شامل چهار بخش می باشد که سه بخش اول آن شامل مباحثی از آنالیز حقیقی و آنالیز تابعی و جبرهای باناخ می باشد. و در بخش اول آن مفهوم یک C^*– جبر بیان شده است. همچنین در بخش چهار به بررسی مفهوم پایداری و تاریخچهٔ آن پرداخته شده است که در آن پایداری هایرز – اولام، پایداری هایرز – اولام – راسیّاس و پایداری هایرز – اولام – راسیّاس تعمیم یافته معادلات تابعی جمعی بیان شده است .

فصل دوم که قسمت اصلی پایان نامه را تشکیل می دهد در سه بخش نوشته شده است. که ابتدا معادلهٔ تابعی فرد با d متغیر و سپس پایداری معادلهٔ تابعی فرد در مدول های باناخ روی یک C^*– جبر یکدار بررسی شده است. و بخش آخر این فصل به بررسی یکریختی ها ما بین C^*– جبرهای یکدار پرداخته است. هدف اصلی در این فصل حل و اثبات پایداری هایرز – اولام معادلهٔ تابعی

$$rf\left(\frac{\sum_{j=1}^{d} x_j}{r}\right)+\sum_{\iota(j)=0,1} rf\left(\frac{\sum_{j=1}^{d}(-1)^{\iota(j)}x_j}{r}\right)$$
$$=({}_{d-1}C_l-{}_{d-1}C_{l-1}+1)\sum_{j=1}^{d} f(x_j) \qquad s.t \qquad \sum_{j=1}^{d}\iota(j)=l$$

در مدول های باناخ روی یک C^*– جبر یکدار می باشد. این نتایج را برای بررسی یکریختی های C^*– جبر مابین C^*– جبرهای یکدار به کار می بریم.

فهرست مندرجات

فصل سوم شامل ۲ بخش می باشد که بخش اول، به معرفی فضاهای شبه – باناخ و فضاهای p – باناخ پرداخته است. بخش دوم به بررسی پایداری هایرز – اولام – راسیاس معادلهٔ تابعی :

$$\sum_{i=1}^{m} f\Big(mx_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{m} x_j\Big) + f\Big(\sum_{i=1}^{m} x_i\Big) = 2f\Big(\sum_{i=1}^{m} mx_i\Big)$$

در فضاهای شبه باناخ با استفاده از مقاله‌ای توسط آقای زمانی پرداخته است.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه و تاریخچهٔ پایداری

۱.۱ مفاهیم مقّدماتی از آنالیز تابعی

تعریف ۱.۱.۱ مجموعه نا تهی V را یک فضای برداری [۱] (خطی) روی میدان $\mathbb{F}$ می نا میم، اگر V با عمل (جمع برداری) یک گروه آبلی بوده و به ازای هر $v \in V$ و $\alpha \in \mathbb{F}$ ، $\alpha v \in V$. (این عمل را ضرب اسکالر می نا میم.) همچنین به ازای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ و $v, w \in V$ داشته باشیم:

۱) $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$ ؛

۲) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ ؛

۳) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ ؛

۴) $ev = v$

که در آن e نشان دهندهٔ عنصر یکّهٔ $\mathbb{F}$ تحت عمل ضرب می باشد. اعضای V را بردار و اعضای $\mathbb{F}$ را اسکالر می نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم A یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ همراه با ضرب $(x, y) \to x.y$ از $A \times A$ بتوی A باشد به طوری به ازای هر x, y, z و هر اسکا لر $\alpha \in \mathbb{F}$ داشته باشیم :

---

[۱] Vector space

۱) $x(y+z) = xy + xz$؛

۲) $(x+y)z = xz + yz$؛

۳) $x(yz) = (xy)z$؛

۴) $\alpha(xy) = x(\alpha y) = (\alpha x)y$

در این صورت A را یک جبر[۲] می نا میم. جبر A را تعو یض پذیر گو ییم، هرگاه به ازای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $ab = ba$. همچنین جبر A را یک دار گوییم، هرگاه عضوی مانند $e \in A$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم $ea = ae = a$. هرگاه $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ فرض شود، A یک جبر حقیقی و هرگاه $\mathbb{F} = \mathbb{C}$، A را یک جبر مختلط می نامیم.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم A یک جبر باشد و $B \subseteq A$. در این صورت B را زیر جبر A گوئیم، هرگاه B زیر فضای A باشد و نسبت به عمل ضرب بسته باشد.

تعریف ۴.۱.۱ (الف) یک فضای توپولوژیک [۳] مجموعه‌ای است مانند X که در آن گردایه‌ای مانند τ از زیر مجموعه های X که آنهارا مجموعه های باز می نامیم موجود باشد به طوری که در خواص زیر صدق کند:

۱) $X, \phi \in X$؛

۲) اگر $A, B \in \tau$، آن گاه $A \cap B \in \tau$؛

۳) اگر به ازای هر $\alpha \in I$ ، $A_\alpha \in \tau$، آن گاه $\cup_\alpha A_\alpha \in \tau$

که در آن I مجموعه اندیس گذار دلخواه میباشد.

ب) فرض کنیم Y, X دو فضای توپولوژیک بوده و f نگاشتی از X به توی Y باشد. در این صورت

[۲] Algebra
[۳] Topological space

گوئیم f پیوسته است اگر به ازای هر مجموعهٔ باز V در Y، $f^{-1}(V)$ مجموعهٔ بازی در X باشد.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنیم X یک مجموعه باشد، در این صورت تابع $d : X \times X \to \mathbb{R}$ را یک متر گوییم، در صورتی که به ازای هر $x, y, z \in X$ شرایط زیر برقرار باشد:

۱) به ازای هر $x, y \in X$، $d(x,y) \geq 0$؛

۲) $d(x,y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$؛

۳) $d(x,y) = d(y,x)$؛

۴) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

(X,d) را یک فضای متریک [۴] می نامیم. همچنین متر d را یک متر پایا بر X گوئیم اگر

$$d(x+z, y+z) = d(x,y) \qquad (x,y,z \in X) \quad .$$

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. در این صورت یک نیم نرم [۵] روی X تابع حقیقی مقدار ρ روی X است بطوری که در شرایط زیر صدق کند:

الف) به ازای هر $x \in X$، $\rho(x) \geq 0$؛

ب) به ازای هر اسکالر α و هر $x \in X$، $\rho(\alpha x) = |\alpha|\rho(x)$؛

پ) به ازای هر $x, y \in X$، $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

ρ یک نرم بر X می باشد اگر علاوه بر شرایط فوق در شرط زیر نیز صدق کند:

ت) اگر $\rho(x) = 0$ آنگاه $x = 0$.

نرم را معمولاً با نماد $\|.\|$ نشان میدهیم. یک فضای برداری همراه با یک نرم $\|.\|$ را یک فضای نرمدار می نامیم . نرم ρ را یک نرم جبری [۶] روی X گوییم اگر

---

[۴] Metric space

[۵] Semi-norm

[۶] Algebra-norm

$$\rho(xy) \leq \rho(x)\rho(y) \qquad (x, y \in X) \ .$$

زوج (A, ρ) را که درآن A یک جبر و ρ یک نرم جبری روی A است جبر نرمدار[۷] می نامیم.هر فضای نرمدار را می توانیم به عنوان یک فضای متریک در نظر بگیریم که در آن فاصله بین هر دو نقطه x و y یا $d(x, y)$ همان $||x - y||$ است و توپولوژی آن را توپولوژی حاصل از نرم یا توپولوژی یکنواخت [۸] می نامیم.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنیم d یک متر بر X باشد. در این صورت دنباله $(x_n)_{n \in N}$ در X یک دنباله کشی[۹] است اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیح N چنان نظیر باشد که اگر $n, m \geq N$ آن گاه $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنیم A یک جبر مختلط روی میدان اعداد مختلط باشد و یک نرم بر A موجود باشد که A را به یک فضای خطی نرمدار بدل کرده و در نامساوی ضربی

$$||xy|| \leq ||x|| \ ||y|| \qquad (x, y \in A) \ .$$

صدق کند بعلاوه اگر A با متر

$$d(x, y) = ||x - y|| \qquad (x, y \in A) \ .$$

تام باشد (هر دنباله کشی در A به عضوی از A همگرا باشد). یعنی A یک فضای باناخ باشد، آن گاه A را یک جبر باناخ [۱۰] می نامیم.

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند. در این صورت مجموعهٔ تمامی نگاشتهای خطی و کراندار از X بتوی Y را با $B(X, Y)$ نشان می دهیم، با اعمال جمع و ضرب

---

[۷] normed-algebra
[۸] uniform topology
[۹] Cauchy sequence
[۱۰] Banach algebra

اسکالر زیر $B(X,Y)$ به یک فضای برداری تبدیل می شود:

$$(\alpha\Lambda)(x)=\alpha\cdot\Lambda(x) \quad , \quad (\Lambda_1+\Lambda_2)(x)=\Lambda_1 x+\Lambda_2 x, \qquad (x\in X,\alpha\in\mathbb{F}) \ .$$

و در حالت خاص $X=Y$، $B(X,Y)$ را با $B(X)$ نشان می دهیم و در حالتی که $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ یا $\mathbb{F}=\mathbb{C}$، $B(X,\mathbb{F})$ را با نماد X^* نشان میدهیم.که به آن فضای دوگان X گوییم

قضیه ۱۰.۱.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند به ازای $\Lambda\in B(X,Y)$ تعریف می کنیم

$$\| \Lambda \|=\sup\{\| \Lambda x \|_Y : x\in X, \| x \|\leq 1\} \ .$$

با این تعریف $B(X,Y)$ یک فضای نرمدار است و در صورتی که Y باناخ باشد، $B(X,Y)$ نیز باناخ می باشد.

برهان : به مرجع [۱۴]، قضیه ۴.۱ مراجعه شود. □

قضیه ۱۱.۱.۱ به ازای تبدیل خطی Λ از فضای خطی نرمدار X بتوی فضای خطی نرمدار Y، هر یک از سه شرط زیر دو شرط دیگر را ایجاب می کند.

الف) Λ کراندار است ($\|\Lambda\|<\infty$)؛

ب) Λ پیوسته است؛

پ) Λ در یک نقطه از X پیوسته است

برهان : به مرجع [۱۵]، قضیه ۴.۵ مراجعه شود. □

قضیه ۱۲.۱.۱ اگر A یک جبر باناخ با یکّهٔ e، و برای هر $x\in A$ داشته باشیم $\|x\|<1$، و G مجموعه عناصر معکوسپذیر جبر باناخ A باشد آن گاه

الف) $e+x\in G$

ب) $||(e-x)^{-1}-e-x|| \leq \frac{||x||^2}{1-||x||}$

پ)به ازای هر همریختی مختلط φ، بر A داریم $|\varphi(x)| < 1$.

برهان : به مرجع [۱۵]، قضیهٔ ۳.۱۸ رجوع کنید. □

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنیم A و B جبرهایی روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. یک همریختی[11] از A بتوی B نگاشتی خطی مانند φ است بطوری که :

$$\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y) \qquad (x,y\in A) \ .$$

در صورتی که $B=\mathbb{C}$ و $\varphi \neq 0$، گوئیم φ یک همریختی مختلط می باشد. اگر φ دوسویی باشد آن گاه آن را یکریختی [12] از A بروی B می نامیم و می گوییم A و B یکریختند.

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ باشد یک برگشت خطی[13] روی X نگاشتی مانند $x \to x^\star$ از X بتوی X می باشد به طوری که به ازای هر $x,y\in X$ و هر $\alpha \in C$ داشته باشیم:

الف) $(x+y)^\star = x^\star + y^\star$؛

ب) $(\alpha x)^\star = \bar{\alpha} x^\star$؛

پ) $(x^\star)^\star = x$.

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنیم A یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. یک برگشت جبری[14] روی A، یک برگشت خطی روی A است بطوری که:

$$(xy)^\star = y^\star x^\star \qquad (x,y\in A) \ .$$

[11] homomorphism
[12] Isomorphism
[13] liner involution
[14] algebra involution

اگر یک برگشت جبری روی جبر A وجود داشته باشد آن گاه A را همراه با این برگشت $\star-$ جبر می نامیم.

تعریف ۱۶.۱.۱ جبر نر مدار A را یک $\star-$ جبر نرمدار گوئیم، هرگاه A یک $\star-$ جبر بوده و به ازای هر $x \in A$ در شرط $||x^\star|| = ||x||$ صدق کند. به علاوه اگر A کامل باشد آن گاه A را $\star-$ جبر باناخ می نامیم.

تعریف ۱۷.۱.۱ $\star-$ جبر باناخ که به ازای هر $a \in A$ در شرط $||aa^\star|| = ||a||^2$ صدق کند را یک $C^\star-$ جبر می نامیم.

مثال ۱۸.۱.۱ می دانیم $\mathbb{C}$ یک جبر روی $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ می باشد و تابع قدر مطلق یک نرم بر $\mathbb{C}$ می باشد و برای هر $x, y \in \mathbb{C}$،داریم $|xy| = |x||y|$ پس $\mathbb{C}$ یک جبر نرمدار می باشد و به راحتی می توان دید که نگاشت $x \to x^\star = \bar{x}$ یک برگشت خطی می باشد و چون برای هر $x, y \in \mathbb{C}$ داریم، $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$ ، $|x| = |\bar{x}|$ و $|x\bar{x}| = |x|^2$. بنابراین $\mathbb{C}$ یک $C^\star-$ جبر می باشد.

تذکر ۱۹.۱.۱ فرض کنیم A یک $C^\star-$ جبر با عنصر واحد e باشد در این صورت باتوجه به روابط

$$||a|| = ||a^\star|| \qquad , \qquad ||aa^\star|| = ||a||^2 \qquad (a \in A) \ .$$

می توان نتیجه گرفت $||e|| = ||e^\star|| = 1$. همچنین با توجه به روابط

$$(a^\star)^\star = a \qquad , \qquad (ab)^\star = b^\star a^\star \qquad (a, b \in A) \ .$$

باقرار دادن $a = e$ و $b = e^\star$ داریم $e = e^\star$.

تعریف ۲۰.۱.۱ فرض کنیم $(X, d), (Y, \rho)$ فضاهایی متری باشند. اگر $E \subseteq X$، $p \in E$ و $f : E \to Y$، آن گاه گوییم f در p پیوسته[15] است اگر استلزام زیر برقرار باشد

[15] continuous

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad (x \in E\ ,\ d(x,p) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(p)) < \varepsilon)\ .$$

f را بر E پیوسته گوییم، اگر در هر نقطهٔ E، پیوسته باشد.

تذکر ۲۱.۱.۱ فرض کنیم A یک $C^\star$- جبر باشد. اگر $a \to a^\star$ یک برگشت خطی از A بتوی A باشد، آن گاه چون برای هر $a \in A$ داریم $||a^\star|| = ||a||$، لذا با فرض اینکه $p \in A$ عنصری دلخواه و $\varepsilon > 0$ مفروض باشد داریم

$$||x^\star - p^\star|| = ||(x-p)^\star|| = ||x - p|| \qquad (x \in A)\ .$$

لذا با فرض $\delta = \varepsilon$ استلزام تعریف ۲۰.۱.۱ برای $p \in A$ برقرارمی باشد و چون $p \in A$ دلخواه می باشد درنتیجه $a \to a^\star$ بر A پیوسته است .

تعریف ۲۲.۱.۱ عنصر u واقع در $\star$- جبر A را هرمیتی [۱۶] گوییم اگر $u = u^\star$. مجموعهٔ شامل تمام عناصر هرمیتی $\star$- جبر A را با A_{sa} می دهیم. با توجه به تذکر ۱۹.۱.۱، عضو یک دار(واحد) هر $\star$- جبر یک عنصر هرمیتی است. همچنین با توجه به اینکه برای هرهر عدد حقیقی a در $\star$- جبر $\mathbb{C}$ داریم $a^\star = \bar{a} = a$ لذا تمام اعداد حقیقی در $\star$- جبر $\mathbb{C}$ هرمیتی‌اند.

تعریف ۲۳.۱.۱ فرض کنید e عنصر یکّه و A^{-1} مجموعه عناصر معکوس پذیر $C^\star$- جبر A باشند. عنصر a در $C^\star$- جبر A را مثبت گوییم، اگر a هرمیتی و $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda e \in A - A^{-1}\}$ شامل اعداد حقیقی نامنفی باشد.

تعریف ۲۴.۱.۱ فرض کنیم e عنصر یک دار $\star$- جبر A باشد. در این صورت عنصر u واقع در $\star$- جبر A را یکّه‌ای [۱۷] گوییم اگر $uu^\star = u^\star u = e$. با توجه به تعریف فوق عناصر $i, -i, 1, -1$ در $\mathbb{C}$ با $e = 1$ یکه‌ای هستند.

---

[۱۶] Hermitian
[۱۷] Unitary

تعریف ۲۵.۱.۱ فرض کنیم A یک $C^\star-$ جبر با عنصر یک دار e باشد. در اینصورت مجموعه تمام عناصر یکّه‌ای $C^\star-$ جبر A را با $U(A)$ نشان می دهیم. بعبارت دیگر

$$U(A) = \{a \in A : aa^\star = a^\star a = e\} \ .$$

با توجه به خواص $C^\star-$ جبر A، $U(A)$ یک گروه با عمل ضرب می باشد که به آن گروه یکانی [۱۸] می گوییم.

مثال ۲۶.۱.۱ با توجه به اینکه $\mathbb{C}$ یک $C^\star-$ جبر با $e = ۱$ می باشد داریم:

$$U(\mathbb{C}) = \{u \in \mathbb{C} : uu^\star = u^\star u = ۱\} = \{u \in \mathbb{C} : u\bar{u} = \bar{u}u = ۱\} = \{u \in \mathbb{C} : |u| = ۱\}.$$

$U(\mathbb{C})$ را با نماد $S^۱$ نشان می دهیم.

قضیه ۲۷.۱.۱ هر عنصر a از $C^\star-$ جبر A را می توان به صورت ترکیب خطی و متناهی از عناصر یکه‌ای در A نوشت.

برهان : به مرجع [٦]، قضیهٔ ۴.۱.۷ رجوع کنید. □

تعریف : فرض کنیم $(A,\star)$ و $(B,\star)$، $C^\star-$ جبر باشند. $\star-$ همریختی φ، یک همریختی از A بتوی B است به طوری که

$$\varphi(a^\star) = \varphi(a)^\star \qquad (a \in A) \ .$$

به علاوه اگر φ یک دوسویی باشد، آن گاه نگاشت $\varphi : A \to B$ را یکریختی $C^\star-$ جبر می نامیم.

مثال ۲۸.۱.۱ با در نظر گرفتن $A = B = \mathbb{C}$ به وضوح ، A و B جبرهایی روی میدان حقیقی و مختلط می باشند و نگاشت همانی φ از A بتوی B با ضابطهٔ $\varphi(a) = a$ یک همریختی می باشد و با قرار دادن $a^\star = \bar{a}$ برای هر $a \in A$ و $b^\star = \bar{b}$ برای هر $b \in B$، داریم $\varphi(a^\star) = (\varphi(a))^\star = \bar{a}$. لذا

[۱۸] Unitary group