فصل اول

مفاهیم و تعاریف مقدماتی

1-1 مجموعه‌های فازی

1-1-1 مقدمه

در منطق کلاسیک بر خلاف منطق فازی یک گزاره می‌تواند تنها دارای دو ارزش وجودی باشد، به این معنی که یک عنصر یا متعلق به یک مجموعه هست و یا نیست. اهمیت ریاضیات در توصیف پدیده‌ها غیر قابل بحث است، اما فایده و امکان استفاده از ریاضیات مبتنی بر تئوری مجموعه‌های کلاسیک در بسیاری از پدیده‌ها محدود می‌باشد. چرا که شرایط واقعی بیشتر اوقات معین و قطعی نیستند، لذا نمی‌توان آن‌ها را با روش‌های متداول و با دقت مناسب توصیف کرد.

در سال 1965 پروفسور زاده استاد ایرانی دانشگاه برکلی، منطقی را ارائه کرد که تلاش داشت واقعیات فیزیکی را به همان صورتی‌که هستند، مدل کند. این ایده به پیدایش دسته جدیدی از سیستم‌ها با نام عمومی فازی منجر شده است. در آن سال لطفی زاده از دانشگاه کالیفرنیا در برکلی مقاله‌ای با عنوان "مجموعه‌های فازی" در مجله اطلاعات و کنترل به چاپ رساند. این مقاله گویا دو سال قبل از چاپ و انتشارش تدوین و تکمیل شده بود، اما به خاطر نظرات و اندیشه‌های اساسی و ریشه‌ای ارائه شده در آن هیچ مجله علمی و پژوهشی جرأت پذیرش و چاپ آن را نداشت.

در آن دوره از زمان قبول ابهام و عدم صراحت در زمینه مسائل مهندسی دور از ذهن به نظر می رسید. چندی بعد زاده اندیشه الگوریتم فازی را که مبنائی برای منطق فازی و استدلال فازی است را ارائه کرد. در سال 1972 میلادی میشیو سوگنو از انستیتو تکنولوژی توکیو نظرات زاده را با ارائه مفاهیم اندازه فازی و انتگرال فازی تعقیب نمود [8].

سال 1974 نقطه عطفی برای منطق فازی بود. ابراهیم ممدانی از دانشگاه لندن برای نخستین بار منطق فازی را در زمینه کنترل یک موتور بخار ساده به کار گرفت [32].

اولین کاربرد صنعتی منطق فازی شش سال بعد به منصه ظهور رسید. در سال 1980 میلادی اسمیت از دانمارک برای نخستین بار از منطق فازی برای کنترل کوره سیمان استفاده کرد. در دهه 1980 میلادی مؤسسه فوجی الکتریک منطق فازی را برای کنترل یک فرآیند تصفیه آب به کار گرفت. متعاقب آن شرکت هیتاچی یک سیستم کنترل خودکار قطار را بر مبنای منطق فازی توسعه داد. شایان ذکر است که در اوایل دهه 1990 میلادی مؤسسات ژاپنی ذکر شده در زمینه کاربرد منطق فازی پیشتاز بودند [8].

انجمن بین المللی سیستم‌های فازی[1] به عنوان اولین سازمان آکادمیک برای نظریه پردازی منطق فازی و مجریان کاربردهای آن در سال 1984 تأسیس شد. این انجمن هر دو سال یک بار سمپوزیوم بین المللی تشکیل می‌دهد. در همین سال‌ها بود که گزارش کاربردهای عملی منطق فازی در ژاپن به ویژه در زمینه کنترل آغاز شد. در سال 1989 میلادی انجمن سیستم‌ها و نظریه فازی[2] پایه‌گذاری شد و آزمایشگاه بین المللی مهندسی فازی[3] در ژاپن افتتاح گردید. در اوایل دهه 1990 میلادی منطق فازی در ساخت محصولات الکتریکی خانگی به کار گرفته شد و عموم نیز در مورد سیستم‌های فازی آگاهی یافتند [8].

هنگامی‌که اولین مقاله در زمینه منطق فازی در سال 1965 میلادی منتشر شد، روش کنترل جدیدی که به وسیله رادلف کالمن ارائه شده بود، به تدریج به عنوان کنترل نوین شناخته می‌شد

1-International Fuzzy System Association (IFSA)
2-Society of Fuzzy Theory and Systems (SOFT)
3-Laboratory of International Fuzzy Engineering (LIFE)

[27]. قدری قبل از آن زاده بر روی موضوعات مربوطه مثل انتقال -z تحقیق می‌کرد و مطالعات پیشگامانه‌ای نیز به انجام رسانده بود. جالب است توجه داشته باشیم که او از کنترل دقیق مهندسی به منطق فازی که امکان بروز ابهامات و عدم صراحت را فراهم می‌آورد، روی آورد. او بعدها اظهار داشت که محدودیت‌هایی را در چنان دقت و صراحت دیده است. او در مقاله 1973 خود این نظریه و اندیشه را اصل ناسازگاری[1] نامید. براساس اصل ناسازگاری هنگامی که پیچیدگی یک سیستم از مرز تعیین شده‌ای فراتر می‌رود، تعریف صریح، دقیق و با معنی عمل‌کرد آن سیستم دیگر غیرممکن می‌شود [42].

منطق فازی نظریه گسترده‌ای است که نظریه مجموعه فازی، منطق فازی، اندازه فازی و ... را در بر می‌گیرد. نظریه مجموعه فازی توسعه نظریه مجموعه معمولی است. منطق فازی نیز توسعه منطق معمولی است. اندازه فازی توسعه اندازه احتمالی است. فازی‌بودن، همان‌طور که در منطق فازی به کار می‌رود، به انواع مختلف ابهام و عدم اطمینان و به خصوص به ابهامات مربوط به زبان بیانی و طرز فکر بشر اشاره دارد و با عدم اطمینانی که به وسیله نظریه احتمال بیان می‌شود، متفاوت است [8].

1-Principle of Incompatibility

2-1-1 مجموعه‌های فازی و مفاهیم وتعاریف مربوط به مجموعه‌های فازی

در این بخش مفاهیم اساسی نظریه مجموعه فازی با تأکید بر کاربردهای آن مد نظر است. نخست به بیان تعریفی از مجموعه‌های فازی و خصوصیات اساسی آن پرداخته و سپس آن‌ها را با مجموعه‌های معمولی مقایسه می‌کنیم. عملیات مجموعه‌های فازی، α-برش و اصل تجزیه را نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم و بالاخره اعداد فازی و اصول تعمیم را بررسی می‌کنیم.

3-1-1 مجموعه‌های فازی

در یک گفتگوی روزانه کلمات مبهم بسیاری به کار گرفته می‌شوند، مثلاً "درخت سرو زیباست" و یا "ارزش دلار نسبتاً بالاست". مجموعه‌های فازی برای برخورد با همین کلمات و گزاره‌های نادقیق ارائه شده است. مجموعه‌های فازی می‌توانند با مفاهیم نادقیقی مثل مجموعه‌ی افراد قد بلند و افرادی که نزدیک توکیو به سر می‌برند که قابل بیان به وسیله مجموعه‌های معمولی نیستند، برخورد کند.

در عبارات گفته شده کلمات "قد بلند" و "نزدیک" نادقیق هستند. بیان این عبارات نادقیق به وسیله مجموعه‌های معمولی امکان‌پذیر نیست و ما حتماً باید عبارات را به صورت دقیق مثل "مجموعه‌ی افرادی که بیش از 190 سانتیمتر قد دارند" یا "مردمی که در توکیو زندگی می‌کنند"، بیان کنیم. اندازه‌گیری قد یک فرد تعلق و یا عدم تعلق او را به مجموعه‌ی گفته شده بیان می‌کند. این مجموعه‌های معمولی که به صورت دقیق بیان می‌شوند، در نظریه‌ی مجموعه‌های فازی به مجموعه‌های قاطع معروف هستند [8].

4-1-1 مجموعه‌های فازی و توابع عضویت

فرض کنید X یک مجموعه مرجع دلخواه باشد. تابع عضویت هر زیر مجموعه A از X، یک تابع از X به مجموعه دو عضوی {1, 0} می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_A : X \rightarrow \{0 , 1\}.$$

اگر برد تابع مشخصه از مجموعه دو عضوی {1, 0} به بازه [0,1] توسعه یابد، تابعی داریم که به هر x از X عددی از بازه [0,1] را نسبت می‌دهد. این تابع را با $\mu_{\tilde{A}}(X)$ نشان می‌دهیم.

مقدار $\mu_{\tilde{A}}(X)$ عبارت از مقدار عضویت یا درجه عضویت $x \in X$ است. مقدار عضویت بیانگر درجه تعلق x به مجموعه فازی X است.

مقدار توابع مشخصه برای مجموعه‌های قاطع یا برابر 0 است یا 1، در حالی‌که مقدار عضویت مجموعه فازی می‌تواند یک مقدار حقیقی دلخواه بین 0 تا 1 باشد. هر چه مقدار $\mu_{\tilde{A}}(X)$ به 1 نزدیک‌تر باشد، درجه تعلق عنصر x به مجموعه فازی $\tilde{A}$ بیشتر است و اگر $\mu_{\tilde{A}}(X) = 0$ باشد، آن‌گاه می‌گوییم، عنصر x به مجموعه فازی $\tilde{A}$ اصلاً تعلق ندارد [7].

تعریف1-1 فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد. هر زیر مجموعه فازی $\tilde{A}$ از X توسط یک تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow [0,1]$ مشخص می‌شود که در آن برای هر $x \in X$ مقدار $\mu_{\tilde{A}}(X)$ در بازه [0,1] میزان عضویت X در $\tilde{A}$ را نشان می‌دهد. همچنین مجموعه تمام زیر مجموعه‌های فازی X را با F(X) نشان می‌دهیم، به عبارتی داریم:

$$F(X) = \{\tilde{A} | \tilde{A}: X \longrightarrow [0,1]\}$$

مثال 1-1 آزمایش پرتاب یک تاس را در نظر بگیرید. فضای نمونه این آزمایش $X=\{1,...,6\}$ است. زیر مجموعه معمولی "برآمدهای کوچکتر از 4" از X به صورت $A=\{1,2,3\}$ است و تابع نشانگر آن عبارت است از:

$$\mu_A(X) = \begin{cases} 1 & x = 1,2,3 \\ 0 & x = 4,5,6 \end{cases}$$

مثلاً $\mu_A(2) = 1$ یعنی برآمد 2، ویژگی کوچکتر از 4 بودن را داراست و $\mu_A(6) = 0$ یعنی برآمد 6 ویژگی کوچکتر از 4 بودن را دارا نیست. حال یک زیر مجموعه فازی از X که برآمد "تقریباً 4" را نشان می‌دهد، می‌تواند توسط تابع عضویت زیر تعریف گردد:

$$\mu_{\tilde{B}}(X) = \begin{cases} ۰ & x=۱ \\ ۰/۴ & x=۲,۶ \\ ۰/۸ & x=۳,۵ \\ ۱ & x=۴ \end{cases}$$

حال $\mu_{\tilde{B}}(3) = 0/8$ به این معناست که برآمد 3، با درجه 0/8 ویژگی "تقریباً 4" را داراست.

$\mu_{\tilde{B}}(1) = 0$ یعنی برآمد 1 فاقد ویژگی "تقریباً 4" است.

روش‌های بیان مجموعه‌های فازی را می‌توان بنا به تعاریف زیر به دو دسته تقسیم کرد:

الف) بیان گسسته (وقتی مجموعه مرجع متناهی است): فرض کنید که مجموعه مرجع X به صورت زیر باشد:

$$\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

آن‌گاه یک مجموعه فازی مثل $\tilde{A}$ بر روی X را به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

$$\tilde{A} = \mu_{\tilde{A}}(x_1)/x_1 + \mu_{\tilde{A}}(x_2)/x_2 + \ldots + \mu_{\tilde{A}}(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_{\tilde{A}}(x_i)/x_i.$$

ب) بیان پیوسته (وقتی مجموعه مرجع نامتناهی است): وقتی مجموعه مرجع X یک مجموعه نامتناهی است، یک مجموعه فازی مثل $\tilde{A}$ بر روی X را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\tilde{A} = \int_x \mu_{\tilde{A}}(x_i)/x_i \, dx.$$

نماد / در روابط فوق جداکننده نامیده می‌شود. در سمت راست جداکننده عنصری از مجموعه مرجع و در سمت چپ مقدار عضویت عنصر در مجموعه تعریف‌شده را می‌نویسیم. هر عنصر را به همین صورت لیست می‌کنیم و برای مربوط کردن جملات از + استفاده می‌کنیم. هرچند در ریاضیات معمولی نمادهای / و + به معنی تقسیم و جمع هستند، اما معانی آن‌ها در تعریف مجموعه‌های فازی متفاوت است [8].

5-1-1 مجموعه نرمال، مجموعه محدب، عدد اصلی و تکیه‌گاه مجموعه‌ی فازی

فرض کنید $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی بر روی مجموعه مرجع X است. یک مجموعه نرمال فازی، یک مجموعه محدب فازی و عدد اصلی یک مجموعه فازی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

تعریف1-2 مجموعه فازی نرمال: مجموعه فازی $\tilde{A}$ نرمال است اگر:

$$\max_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(X) = 1.$$

تعریف1-3 مجموعه فازی محدب: مجموعه $\tilde{A}$ محدب است اگر:

$$\mu_{\tilde{A}} (\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \geq \min (\mu_{\tilde{A}} (x_1), \mu_{\tilde{A}} (x_2)), \forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X, \forall \lambda \in [0, 1].$$

تعریف1-4 عدد اصلی: وقتی X یک مجموعه متناهی است، عدد اصلی مجموعه فازی $\tilde{A}$ بر X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(X).$$

تعریف1-5 تعداد نسبی عناصر: تعداد نسبی عناصر مجموعه فازی $\tilde{A}$ بر X عبارت است از:

$$\|\tilde{A}\| = \frac{|\tilde{A}|}{|X|}.$$

که در آن $|\tilde{A}|$ تعداد عناصر مجموعه $\tilde{A}$ و $|X|$ تعداد عناصر مجموعه مرجع X است [8].

تعریف1-6 اگر X یک مجموعه مرجع و $\tilde{A}$ یک زیر مجموعه فازی از آن باشد، مجموعه نقاطی از X که برای آن نقاط $\mu_{\tilde{A}}(X) > 0$ باشد، تکیه‌گاه $\tilde{A}$ نامیده و به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\mathrm{Supp}(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(X) > 0\}.$$

1-1-6 مجموعه فازی تهی و تام

تعریف1-7 مجموعه فازی $\tilde{A}$ را تهی گوییم اگر و فقط اگر:

$$\forall\, x \in X,\ \mu_{\tilde{A}}(x) = 0.$$

تعریف1-8 مجموعه فازی $\tilde{A}$ را تام گوییم اگر و فقط اگر:

$$\forall\, x \in X,\ \mu_{\tilde{A}}(x) = 1.$$

7-1-1 اجتماع، اشتراک و متمم مجموعه‌های فازی

تعریف9-1 اجتماع: اگر $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه دلخواه باشند. اجتماع $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ برابر است با ماکزیمم تابع عضویت مجموعه $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ و آن را به صورت $\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)$ نشان می‌دهند.

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)).$$

تعریف10-1 اشتراک: اگر $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه دلخواه باشند، آن‌گاه اشتراک آن‌ها برابر است با مینیمم تابع عضویت مجموعه $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ و آن را به صورت $\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)$ نشان می‌دهند.

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)).$$

تعریف11-1 متمم: اگر S یک مجموعه باشد و $\tilde{A}$ زیرمجموعه‌ای از آن باشد. متمم مجموعه $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود و آن را با $\mu_{\bar{\tilde{A}}}(x)$ نشان می‌دهند [8].

$$\mu_{\bar{\tilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x).$$

اعمال اجتماع و اشتراک بین دو مجموعه فازی دارای ویژگی خودتوانی، جابه‌جایی و شرکت پذیری هستند. همچنین عمل اجتماع نسبت به اشتراک وعمل اشتراک نسبت به اجتماع ویژگی توزیع‌پذیری دارند. قوانین دمورگان نیز برای مجموعه‌های فازی برقرار است.

8-1-1 تساوی و شمول مجموعه های فازی

فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه فازی بر روی مجموعه مرجع X باشند.

تعریف12-1 تساوی مجموعه‌های فازی: تساوی دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x), \quad \forall\, x \in X.$$

تعریف13-1 شمول مجموعه‌های فازی: شمول مجموعه فازی $\tilde{A}$ در $\tilde{B}$ یا زیرمجموعه بودن $\tilde{A}$ نسبت به $\tilde{B}$ به صورت زیر تعریف می‌شود [8]:

$$\tilde{A} \subset \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \le \mu_{\tilde{B}}(x), \quad \forall\, x \in X.$$

9-1-1 α-برش ها و اصل تجزیه

تعریف14-1 مجموعه‌ای از اعضای مجموعه‌ای مرجع که حداقل دارای درجه عضویت α در $\tilde{A}$ باشد را α-برش می‌نامند و آن را با $\tilde{A}_\alpha$ نشان می‌دهند. برای مجموعه فازی $\tilde{A}$ برش‌های α زیر را تعریف می‌کنیم:

α-برش قوی:

$$\tilde{A}_{\alpha^o} = \{X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}, \; \alpha \in [0,1).$$

α-برش ضعیف:

$$\tilde{A}_\alpha = \{X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \ge \alpha\}, \; \alpha \in [0,1).$$

10-1-1 اصل تجزیه

با استفاده از برش‌های α می‌توانیم یک تابع عضویت، $\mu_{\tilde{A}}(x)$ را به تعداد نامتناهی توابع عضویت مستطیلی تجزیه کنیم. وقتی این توابع عضویت مستطیلی را در یکدیگر جمع‌بندی نموده و عمل max را در مورد آن‌ها اجرا کنیم، مجموعه فازی اولیه $\tilde{A}$ را می‌توانیم به دست آوریم:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \max_{\alpha\in[0,1)} [\alpha \wedge \mathcal{X}_{\tilde{A}_\alpha}(x)],$$

که در آن $\mathcal{X}_{\tilde{A}_\alpha}(x)$ یک معادله مشخصه برای مجموعه $\tilde{A}_\alpha$ است [7].

11-1-1 اصل توسیع

اصل توسیع یکی از مفاهیم اساسی در نظریه مجموعه‌های فازی است. با معرفی اصل توسیع می‌توانیم عملیات مختلف مجموعه‌های فازی را تعریف کنیم. اینک به معرفی مفاهیم اساسی که برای اصل توسیع لازمند می‌پردازیم. نگاشتی از مجموعه X به مجموعه دیگری مثل Y را در نظر بگیرید. به عبارتی:

$$f: X \rightarrow Y.$$

با فرض اینکه A زیرمجموعه‌ای از X است، آن‌گاه:

$$f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\},$$

تصویر A به وسیله f نامیده می‌شود. $f(A)$ زیرمجموعه‌ای از Y است.

به روش مشابه، فرض کنید B زیرمجموعه‌ای از Y است. آن‌گاه:

$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) = y, y \in B\},$$

تصویر معکوس B به وسیله f نامیده می‌شود. ضمناً $f^{-1}(B)$ زیرمجموعه‌ای از X است.

این رابطه‌ها برای مجموعه‌های فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به وسیله اصل توسیع به صورت زیر تعریف می‌شوند [8]:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y) = \begin{cases} \sup \mu_{\tilde{A}}(x), & f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, & f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

تعریف15-1 فرض کنید: $\tilde{A}_i \in F(X_i),\ i = 1, 2, \ldots, n$ و $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ حاصل ضرب دکارتی X_i ها باشد. در این صورت حاصل‌ضرب دکارتی $\tilde{A} = \tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \ldots \times \tilde{A}_n$ نیز یک زیرمجموعه فازی از X است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \ldots \times \tilde{A}_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min\{\tilde{A}_1(x_1), \tilde{A}_2(x_2), \ldots, \tilde{A}_n(x_n)\}.$$

با توجه به تعریف فوق و اصل توسیع می‌توان اعمال دوتائی $\mathbb{R}$ را به $F(\mathbb{R})$ به صورت زیر گسترش داد:

اگر $\circ$ یک عمل دوتایی روی $\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه این عمل روی $F(\mathbb{R})$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\widetilde{A \circ B})(x) = \sup_{a \circ b = x}\{\inf \tilde{A}(a), \tilde{B}(b)\} = \vee_{a \circ b = x}\{\tilde{A}(a) \wedge \tilde{B}(b)\}.$$

که در آن سوپریمم روی مجموعه تهی صفر تعریف می‌شود [8].

به عنوان مثال:

$$(\widetilde{A \oplus B})(x) = \vee_{a+b=x}\{\tilde{A}(a) \wedge \tilde{B}(b)\}.$$
$$(\widetilde{A \ominus B})(x) = \vee_{a-b=x}\{\tilde{A}(a) \wedge \tilde{B}(b)\}.$$
$$(\widetilde{A \otimes B})(x) = \vee_{a.b=x}\{\tilde{A}(a) \wedge \tilde{B}(b)\}.$$
$$(\widetilde{A \oslash B})(x) = \vee_{a \div b=x}\{\tilde{A}(a) \wedge \tilde{B}(b)\}.$$

تعریف1-16 اصل توسیع تعمیم‌یافته: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ ،n مجموعه مرجع و $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ حاصل‌ضرب دکارتی آن‌ها باشد. همچنین $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ ،n زیر مجموعه فازی به ترتیب از $X_1, X_2, \dots, X_n$ باشند. همچنین فرض کنید که f یک تابع از X به مجموعه Y باشد، یعنی $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

حال حاصل عمل تابع f بر n مجموعه فازی $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ به عنوان یک زیر مجموعه فازی $\tilde{B}$ از Y به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y) = \begin{cases} \sup \min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)\}, & f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, & f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

تعریف1-17 یک عدد فازی را بسته گویند، هرگاه تابع عضویت آن نیم پیوسته بالایی باشد، به عبارتی عدد فازی $\tilde{A}$ بسته است هرگاه مجموعه $\{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ بسته باشد.

بدیهی است که اگر $\tilde{A}$ یک عدد فازی بسته باشد، α-برش‌های آن به ازای هر $0 < \alpha \leq 1$، بازه‌ها یا مجموعه‌های بسته حقیقی هستند که آن‌ها را به صورت $[A_\alpha^L, A_\alpha^U]$ نشان می‌دهیم که در آن نقاط پایینی و بالایی به ترتیب به صورت زیر هستند:

$$A_\alpha^L = \text{Inf}\,\{x \mid x \in \tilde{A}_\alpha\},$$
$$A_\alpha^U = \text{Sup}\,\{x \mid x \in \tilde{A}_\alpha\}.$$

1-1-12 اعداد فازی و عملیات بر روی آن‌ها

اعداد فازی مجموعه‌های فازی هستند که با راه‌بردهای خاص به منظور ساده‌سازی محاسبات استفاده می‌شوند. عملیات اعداد فازی را می‌توانیم به کمک اصل توسیع تعریف کنیم. ابتدا تعریفی برای اعداد فازی بیان می‌کنیم.

تعریف 1-18 اعداد فازی: اگر یک مجموعه فازی مثل $\tilde{A}$ بر روی مجموعه مرجع R از اعداد حقیقی در شرایط زیر صدق کند، آن را عدد فازی می‌نامیم.

الف) $\tilde{A}$ تک نمایی باشد، یعنی دقیقاً یک $x \in R$ موجود باشد که $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$.

ب) همه‌ی α-برش‌های $\tilde{A}$ بازه بسته باشند.

پ) تکیه‌گاه $\tilde{A}$ کران‌دار باشد [7].

1-1-1-12 اعداد فازی L-R

اعداد فازی L-R نوع خاصی از اعداد فازی هستند. اعمال جبری بر روی این اعداد فازی بسیار ساده و دارای الگویی مشخص است. توابع L و R که شرایط زیر در مورد آن‌ها برقرار باشد را در نظر بگیرید:

الف) $L(x) = L(-x),\ R(x) = R(-x)$.

ب) $L(0) = 1,\ R(0) = 1$.

پ) توابع L و R نزولی هستند.

پس یک عدد فازی L-R مثل $\tilde{M}$ به وسیله L و R به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right), & x \le m,\ \alpha > 0, \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right), & x \ge m,\ \beta > 0. \end{cases}$$

در اینجا L و R توابع شکل و m میانگین نامیده می‌شود. این در حالی است که α و β به ترتیب طول قاعده را در مجموعه فازی مثلثی در چپ و راست میانگین نشان می‌دهند.

عدد فازی L-R به وسیله توابع شکل L(x) و R(x) ، میانگین m و پارامترهای α و β که دامنه عدد فازی را معین می‌کنند، تعریف می‌شوند. به عبارتی داریم:

$$\tilde{M} = (m, \alpha, \beta)_{LR} .$$

2-12-1-1 اعمال بر روی اعداد فازی L-R

تعریف1-19 جمع اعداد فازی $\tilde{M}$ L-R و $\tilde{N}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(m, \alpha, \beta)_{LR} \oplus (n, \gamma, \delta)_{LR} = (m + n,\ \alpha + \gamma,\ \beta + \delta)_{LR}.$$

تعریف1-20 تفریق اعداد فازی L-R، $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(m, \alpha, \beta)_{LR} \ominus (n, \gamma, \delta)_{LR} = (m - \delta,\ \alpha - \gamma,\ \beta - n)_{LR}.$$

از تعریف پیشین می‌توان نتیجه گرفت:

$$-(m, \alpha, \beta)_{LR} = (-m, \beta, \alpha)_{LR}.$$

تعریف1-21 ضرب اعداد فازی L-R، $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

به ازای $\tilde{M} > 0$ و $\tilde{N} > 0$،

$$(m, \alpha, \beta)_{LR} \otimes (n, \gamma, \delta)_{LR} \approx (m\,n,\ n\alpha + m\,\gamma,\ n\beta + m\delta)_{LR}.$$

به ازای $\tilde{M} < 0$ و $\tilde{N} > 0$،

$$(m, \alpha, \beta)_{LR} \otimes (n, \gamma, \delta)_{LR} \approx (m\,n,\ n\alpha - m\,\gamma,\ n\beta - m\delta)_{RL}.$$

به ازای $\tilde{M} < 0$ و $\tilde{N} < 0$،

$$(m, \alpha, \beta)_{LR} \otimes (n, \gamma, \delta)_{LR} \approx (m\,n,\ -n\beta - m\delta,\ -n\alpha - m\gamma)_{RL}.$$

از تعاریف فوق نتیجه می‌گیریم،

به ازای $\lambda > 0$،

$$\lambda \otimes (m, \alpha, \beta)_{LR} = (\lambda m, \lambda\alpha, \lambda\beta)_{LR}.$$

به ازای $\lambda < 0$،

$$\lambda \otimes (m, \alpha, \beta)_{LR} = (\lambda m, -\lambda\alpha, -\lambda\beta)_{LR}.$$

تعریف 1-22 همچنین برای معکوس اعداد فازی L-R، $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ داریم:

$$(m, \alpha, \beta)_{LR}^{-1} \approx (m^{-1}, -\beta m^{-2}, -\alpha m^{2})_{RL}.$$

تعریف 1-23 در نهایت برای تقسیم اعداد فازی L-R، $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ داریم:

به ازای $\tilde{M} > 0$ و $\tilde{N} > 0$،

$$(m, \alpha, \beta)_{LR} \oslash (n, \gamma, \delta)_{RL} \approx \left(\frac{m}{n},\ \frac{m\delta+n\alpha}{n^2},\ \frac{m\gamma+n\beta}{n^2}\right)_{LR}.$$

1-1-12-3 اعداد فازی مثلثی

ساده‌ترین نوع اعداد فازی، اعداد فازی مثلثی هستند. به عدد فازی L-R با توابع مرجع $L(x)=R(x)=\max(0, 1 - x)$ عدد فازی مثلثی می‌گوییم. تابع عضویت یک عدد فازی به شکل مثلث، شامل توابع خطی افزایشی و کاهشی در فرم مثلث می‌باشد، تابع عضویت عدد فازی مثلثی را به صورت زیر می‌توان تعریف نمود:

$$\mu_{\tilde{M}(x)} = \begin{cases} 1-\frac{(m-x)}{\alpha}, & m-a \le x \le m, \\ 1-\frac{(x-m)}{\beta}, & m \le x \le m+\beta, \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

یک عدد فازی مثلثی به وسیله (a, α, β) مشخص می‌شود که $a \in \mathbb{R}$ مرکز و $\alpha > 0$ پهنای چپ و $\beta > 0$ پهنای راست عدد فازی مثلثی می‌باشند. اگر $\alpha = \beta$ باشد، عدد فازی مثلثی، متقارن می‌باشد.

درصورتی‌که $\tilde{M} = (m, \alpha, \beta)$ و $\tilde{N} = (n, \gamma, \delta)$ اعداد فازی مثلثی باشند، آن‌گاه روابط فازی به صورت زیر برقرار است [8]:

$$\tilde{M} + \tilde{N} = (m + n, \alpha + \gamma, \beta + \delta),$$
$$\tilde{M} - \tilde{N} = (m - n, \alpha - \delta, \beta - \gamma),$$
$$r \otimes \tilde{M} = (rm, r\alpha, r\beta).$$

13-1-1 روش‌های غیر فازی‌سازی

برخی اندازه‌های گرایش مرکزی در آمار توصیفی می‌توانند برای تبدیل مجموعه‌های فازی به عددی استفاده شوند، که آن‌ها را روش‌های غیر فازی‌سازی می‌نامند. از جمله این روش‌ها مد فازی، میان دامنه فازی سطح α، میانه فازی و میانگین فازی هستند. برای انتخاب این اندازه‌های فازی پایه تئوری وجود ندارد. این انتخاب اساساً مبنی بر سهولت محاسبه یا اولویت محاسبه کننده می‌باشد.

1-13-1-1 میان دامنه فازی سطح α

میان دامنه فازی سطح $\alpha(f_{mr}^{\alpha})$، به عنوان نقطه میانی دو انتهای برش‌های سطح α تعریف می‌شود. یک برش سطح α به وسیله نماد $\tilde{A}_{\alpha}$ نشان داده می‌شود، که یک مجموعه‌ی غیر فازی است و همه عناصری را که تابع عضویت آن‌ها بزرگتر یا مساوی α هستند را در بر می‌گیرد. اگر a^{α} و β^{α} نقاط انتهایی $\tilde{A}_{\alpha}$ باشند، آن‌گاه:

$$f_{mr}^{\alpha} = \frac{1}{2}(a^{\alpha} + \beta^{\alpha})$$

میان دامنه فازی سطح α، برای اعداد فازی مثلثی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{mr}^{\alpha} = \frac{(a+\alpha)+ a[(\alpha-a)-(\beta-\alpha)]}{۲} = \frac{(a^{\alpha} + \beta^{\alpha})}{۲}$$

2-13-1-1 مد فازی

مد یک مجموعه فازی(f_{mod}) ، برابر با مقدار متغیر xای است که مقدار تابع عضویت در آن برابر 1 است.

$$f_{mod} = \{x \in X \mid \mu_f(x) = 1\}.$$

در حقیقت مد فازی یک حالت خاص میان دامنه فازی سطح α است، وقتی که $\alpha=1$ باشد. برای عدد فازی مثلثی$\tilde{A} = (a, \alpha, \beta)$، مد فازی برابر α است زیرا $\mu_f(\alpha) = 1$.

3-13-1-1 میانه فازی

میانه فازی (f_{med})، نقطه‌ای است که منحنی تحت تابع عضویت را به دو ناحیه‌ی مساوی تقسیم می‌کند.

$$\int_{a}^{f_{med}} \mu_f(x)dx = \int_{f_{med}}^{\beta} \mu_f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{a}^{\beta} \mu_f(x)dx.$$

a و β دونقطه بر اساس مجموعه فازی f هستند.

4-13-1-1 میانگین فازی

میانگین فازی (f_{avg})، اولین بار توسط زاده معرفی گردید. میانگین فازی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f_{avg} = \frac{\int x\, \mu_f(x)dx}{\int \mu_f(x)dx}.$$