دانشكده رياضي و رايانه

گروه رياضي

پايان نامه تحصيلي براي دريافت درجه كارشناسي ارشد

رشته رياضي محض

گرایش سیستم هاي دینامیکی

انتروپي سيستم هاي F- ديناميكي، و فضاهاي F- كوانتوم

استاد راهنما:

دكتر محمد ابراهيمي

مؤلف :

محمد سبزي

خردادماه 1389

مقدمه :

نظریه‌ی مجموعه‌هاي فازي نخستين بار در سال 1965 توسط پرفسور لطفي عسگرزاده دانشمندايراني تبار دانشگاه بركلي مطرح شد. اين نظريه از آن زمان تا كنون گسترش زيادي يافته‌است و همچنين درعلوم متفاوت كاربردهاي زيادي داشته است.

مطالب اين پايان‌نامه در هفت فصل به صورت زير ارائه شده‌است:

در فصل اول مفاهيم و تعاريف پايه مجموعه‌هاي فازي همچون تابع عضويت، تابع مشخصه، زيرمجموعه‌ی فازي، عدد اصلي و عدد نسبي يك زيرمجموعه‌ی فازي، توابع عضويت اجتماع و اشتراك دو مجموعه‌ی فازي و . . . آورده شده است.

در فصل دوم مفاهيمي همچون σ-جبر فازي، اندازه‌ي احتمال فازي، حافظ اندازه‌ي فازي و سيستم ديناميكي فازي به همراه مثال بيان شده است.

در فصل سوم مفهوم m-مجزا بودن دو عضو يك σ-جبر فازي و مفهوم اتم به همراه قضايايي ارائه شده است.

در فصل چهارم مفهوم تظريف زيرσ-جبرهای m-هم ارز دو زير جبر آمده است.

در فصل پنجم به تعريف انتروپي يك زير زيرσ-جبر كه داراي حداكثر تعداد متناهي اتم است پرداخته و چند فرمول ارائه داده و چند قضيه‌ي مربوط به آن نيز اثبات شده است.سپس مفهوم انتروپي يك سيستم ديناميكي آمده است.همچنين مفهوم فاكتور بودن يك سيستم ديناميكي براي سيستم ديناميكي ديگر بيان شده است.نهايتا در اين فصل نشان داده‌ايم كه انتروپي يك سيستم ديناميكي نسبت به هر كلاس m-هم‌ارزي يك m-ايزومورفيسم پوشاست.

در فصل ششم مفهوم انتروپي شرطي زيرσ-جبرهاي فازي كه داراي حداكثر تعداد متناهي اتم هستند بيان شده و چند قضيه با اثبات در اين قسمت آورده ايم.

در فصل هفتم سيستم ديناميكي كوانتوم فازي را تعريف كرده ايم و مفهوم ايزومورفيسم هاي قوي و ضعيف و مزدوج در ديناميك فضاهاي كوانتوم معرفي شده و مورد مداقه قرار گرفته اند.

فصل اول

پیش نیازها

1.1. مجموعه‌های فازی

تعریف 1.1.1: فرض می‌کنیم X یک مجموعه باشد، برای زیرمجموعه‌ی A از X تابع مشخصه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$c_A : X \to \{0,1\}$$

$$c_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

تعریف 2.1.1: برد تابع مشخصه مجموعه‌ی $\{0,1\}$ است . اگر این مجموعه را به بازه‌ي $[0,1]$ توسیع دهیم، تابعي بدست می‌آید که به هر عضو مجموعه‌ي X عددي از بازه‌ي $[0,1]$ را نسبت می‌دهد. این تابع را تابع عضویت می‌نامیم.

تعریف 3.1.1: زیرمجموعه‌ي فازي $\tilde{A}$ در X مجموعه‌اي است از زوج‌هاي مرتب به صورت:

$$\tilde{A} = \left\{ \left(x , m_{\tilde{A}}(x) : x \in X \right) \right\}$$

که $m_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت یا درجه‌ي عضویت x در $\tilde{A}$ نامیده می‌شود.

تعریف 4.1.1: براي مجموعه‌ي فازي متناهي $\tilde{A}$، عدد اصلي $\tilde{A}$ به صورت:

$$\left| \tilde{A} \right| = \sum_{x \in X} m_{\tilde{A}}(x)$$

تعریف می‌شود.

تعریف 5.1.1: براي مجموعه‌ي فازي متناهي $\tilde{A}$، عدد اصلي نسبي به صورت

$$\|\tilde{A}\| = \frac{|\tilde{A}|}{|X|}$$

تعریف می‌شود.

تعریف 6.1.1: دو مجموعه‌ي فازي $\tilde{A}_1$ و $\tilde{A}_2$ را برابر گوييم، هرگاه براي هر $x \in X$ داشته باشيم $m_{\tilde{A}_1}(x) = m_{\tilde{A}_2}(x)$.

تعریف 7.1.1: مجموعه‌ي فازي $\tilde{A}_1$ را زيرمجموعه‌اي از مجموعه‌ي فازي $\tilde{A}_2$ گوييم هرگاه براي هر $x \in A$ داشته باشيم $m_{\tilde{A}_1}(x) \le m_{\tilde{A}_2}(x)$.

تعریف 8.1.1: متمم مجموعه‌ي فازي $\tilde{A}$ را با $(\tilde{A})^c$ نشان مي‌دهيم و تابع عضويت آن برابر است با:

$$m_{(\tilde{A})^c}(x) = 1 - m_{\tilde{A}}(x)$$

تعریف 9.1.1: تابع عضويت اشتراك دو مجموعه‌ي فازي $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت زير مي‌باشند:

$$\tilde{m}_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = \min\{m_{\tilde{A}}(x), m_{\tilde{B}}(x)\}, x \in X$$

تعریف 10.1.1: تابع عضويت اجتماع دو مجموعه‌ي فازي $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت زير مي‌باشد:

$$\tilde{m}_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = \max\{m_{\tilde{A}}(x), m_{\tilde{B}}(x)\}, x \in X$$

قضيه 11.1.1: اگر $\tilde{A},\tilde{B}$ دو مجموعه‌ی فازي باشند، آن‌گاه $\tilde{A}\cap\tilde{B}$ بزرگترين مجموعه‌ي فازي است كه مشمول در $\tilde{B},\tilde{A}$ است.

اثبات: گيريم $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{C}$ و $\tilde{D}$ مجموعه‌اي فازي باشد كه مشمول در دو مجموعه‌ي $\tilde{B}$ و $\tilde{A}$ باشد:

$$m_C(x)=m_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=\min\{m_{\tilde{A}}(x),m_{\tilde{B}}(x)\}$$

اما مي دانيم كه $m_{\tilde{A}}(x)\geq m_{\tilde{D}}(x)$ و $m_{\tilde{B}}(x)\geq m_{\tilde{D}}(x)$

$$\Rightarrow m_{\tilde{D}}(x)\leq\min\{m_{\tilde{A}}(x),m_{\tilde{B}}(x)\}=m_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)$$

$$=m_{\tilde{C}}(x)$$

$$\Rightarrow \tilde{D}\subset\tilde{C}$$

.

■

قضيه 12.1.1: اگر $\tilde{A},\tilde{B}$ دو مجموعه‌ي فازي باشند آن‌گاه $\tilde{A}\cup\tilde{B}$ كوچكترين مجموعه‌ي فازي شامل $\tilde{A},\tilde{B}$ است.

اثبات: فرض مي‌كنيم $\tilde{A}\cup\tilde{B}=\tilde{C}$ ، بايد نشان دهيم كه هر مجموعه‌ي فازي مانند $\tilde{D}$ كه شامل $\tilde{B},\tilde{A}$ است شامل $\tilde{C}$ نيز هست.

$$m_{\tilde{A}}(x)\leq\max\{m_{\tilde{A}}(x),m_{\tilde{B}}(x)\}$$

$$m_{\tilde{B}}(x)\leq\max\{m_{\tilde{A}}(x),m_{\tilde{B}}(x)\}$$

اما $\tilde{D}$ شامل هر دو مجموعه‌ي $\tilde{B},\tilde{A}$ است در نتيجه

$$m_{\tilde{A}}(x)\leq m_{\tilde{D}}(x),m_{\tilde{B}}(x)\leq m_{\tilde{D}}(x)$$

$$\Rightarrow m_{\tilde{C}}(x)=m_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=\max\{m_{\tilde{A}}(x),m_{\tilde{B}}(x)\}\leq m_{\tilde{D}}(x)$$

$$\Rightarrow\tilde{C}\subset\tilde{D}.$$

■

2.1. سیستم‌های F–دینامیکی

تعاریف پایه

تعریف 1.2.1: دنباله‌ي $\{l_i\}_{i=1}^{\infty}$ از مجموعه‌هاي فازي در X به $l\in I^X$ صعود مي‌كند، اگر $\{l_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ به صورت يكنوا صعود كند و براي هر $x\in X$ به $l(x)$ همگرا باشد (كه به صورت $l_i \uparrow l$ نوشته مي‌شود).

يك مجموعه‌ي فازي كه براي هر x عضو X مقدار t را مشخص مي‌كند، كه $t\in I$، با t نشان‌داده‌مي‌شود.

تعریف 2.2.1: يك σ-جبر فازي M روي يك مجموعه ناتهي X يك زيرخانواده از I^X است كه در شرايط زير صدق مي‌كند:

A_1. $1\in M$

A_2. $l\in M \Rightarrow 1-l\in M$

A_3. اگر $\{l_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌اي در M باشد آن‌گاه $\vee_{i=1}^{\infty} l_i = \sup l_i \in M$.

اگر N_1, N_2 σ-جبرهايي روي X باشد، آن‌گاه $N_1 \vee N_2$، نمايش دهنده‌ي كوچكترين σ-جبر فازي روي X است كه شامل $N_1 \cup N_2$ است.

اشتراك دلخواه σ-جبرهاي فازي روي يك مجموعه‌ي X، يك σ-جبر فازي روي X است.

براي $S\subseteq I^X$، $[S]$ نشان دهنده‌ي كوچكترين σ-جبر فازي شامل S است.

تعریف 3.2.1: یک اندازه‌ی F–احتمال روي یک σ-جبر فازي M تابع $m{:}M\to I$ است که در شرایط زیر صدق مي‌کند:

$.M_1$ $m(1)=1$

M_2. براي هر $m(1-l)=1-m(l), l\in M$ ،

M_3. براي هر $l,m\in M$ $m(l\vee m)+m(l\wedge m)=m(l)+m(m),$ ،

M_4. براي هر دنباله‌ي $\{l_i\}_{i=1}^{\infty}$ در M که $l_i\uparrow l$ داشته باشیم $m(l)=\sup m(l_i)$.

سه‌تایي (X,M,m) یک **فضاي اندازه‌ي F– احتمال** نامیده مي‌شود. عناصر M مجموعه‌هاي F–اندازه پذیر نامیده مي‌شوند.

تعریف 4.2.1: گیریم (X,M,m) و (Y,N,n) دو فضاي اندازه‌ي F– احتمال باشند. یک تبدیل $f{:}(X,M,m)\to(Y,N,n)$ یک حافظ F– اندازه نامیده مي‌شود، هر گاه $f^{-1}(N)\subseteq M$ و براي هر $m\in N$ ، $m(f^{-1}(m))=n(m)$.

تعریف 5.2.1: یک سیستم F-دینامیکي چهارتایي (X,M,m,f) است که (X,M,m) یک فضاي اندازه‌ي F-احتمال و f یک تبدیل حافظ F-اندازه است.

مثال 6.2.1: گیریم X یک مجموعه‌ي ناتهي باشد.

(i) $[\{0\}]=\{0و1\}$ یک s–جبر فازي بدیهي روي X است.

(ii) براي $[\{l\}]=\{l,l',l\vee l',l\wedge l',0,1\}, l\in I^x$ ، که $\acute{\lambda}=1-\lambda$.

3.1. اتم‌ها

تعریف 1.3.1: گیریم (X, M, m) یک فضاي اندازه‌ي F–احتمال باشد. عناصر μ و λ از M را m– مجزا می‌نامیم هرگاه $m(l \wedge m)=0$.

یک رابطه‌ی (هنگ m) روي M به صورت

$$m(l)=m(m)=m(l \wedge m),\ l, m \in M$$ اگر

$\lambda = \mu$ (هنگ m)

تعریف می‌شود. هنگ m را به صورت mod m نیز نمایش می‌دهیم.

رابطه‌ي (هنگ m)، یک رابطه‌ي هم‌ارزي است.[11]

$\tilde{M}$ نمایشدهنده‌ي مجموعه‌ي تمام کلاس‌هاي هم‌ارزي منتج به وسیله‌ي این رابطه و $\tilde{m}$ کلاس هم‌ارزي مشخص شده به‌وسیله‌ي m است.

تعریف 2.3.1: گیریم (X,M,m) یک فضاي اندازه‌ي F– احتمال باشد و فرض می‌گیریم N یک زیر σ -جبر فازي از M باشد. عنصر $\tilde{m} \in \tilde{N}$ یک اتم از N است هرگاه $m(m)>0$ و

$$\forall \tilde{l} \in \tilde{N}, m(l \wedge m)=m(l) \neq m(m) \Rightarrow m(l)=0 \ (\text{یا } l \in \tilde{0}).$$

خانواده‌ي تمام اتم‌هاي از N بوسیله‌ي $\bar{N}$ نمایش داده می‌شود. قرار می‌دهیم:

F $(M)=$ $\{N$: N یک زیرσ- جبر فازي از M، و N داراي تعداد اتم‌هاي متناهي باشد $\}$

گزاره 3.3.1: گیریم (X,M,m) یک فضاي اندازه‌ي F–احتمال باشد و N یک زیر σ-جبرفازي از M باشد. گیریم m_2, m_1 اتم‌هاي مجزایي از N باشند. آن‌گاه m_2, m_1، m- مجزا هستند.

اثبات: چون $m_1 \wedge m_2 \le m_1 \ ,m_1 \wedge m_2 \le m_2 \ ,$ $m_1 \ne m_2 \ (\bmod m)$ نتیجه می‌گیریم $m_1 \wedge m_2 \ne m_i$ (m هنگ) برای حداقل یك $i=1,2$. فرض می‌کنیم $m_1 \wedge m_2 \ne m_2$ (m هنگ) . چون m_2 یك اتم است، $m_1 \wedge m_2 = 0$ (m هنگ) .

■

نکته 4.3.1: گیریم M یك σ-جبر فازي باشد و N_1, N_2 عناصري از $F(M)$ باشند . اگر $\{l_i : 1 \le i \le k\}, \{m_j : 1 \le j \le t\}$ به ترتیب اتم-هایي از N_1, N_2 باشند، آن‌گاه اتم‌هاي $N_1 \vee N_2$ دقیقاً $l_i \wedge m_j ; 1 \le i \le k$ و $1 \le j \le t$ هایي هستند كه اندازه‌ي مثبت دارند .

گزاره 5.3.1: گیریم $l_i , i \in N$ ها مجموعه‌هاي F–اندازه‌پذیر دوبه‌دو m–مجزايي در فضاي اندازه‌ي F–احتمال (X, M, m) باشند . آن‌گاه

$$m\left(\mathop{\vee}_{i=1}^{\infty} l_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(l_i) \, .$$

اثبات: در حالتي‌كه m, l مجموعه‌های F– اندازه‌پذیر دوبه‌دو مجزا هستند، داریم که:

$$m(l \vee m) = m(l) + m(m) - m(l \wedge m) = m(l) + m(m)$$

فرض می‌کنیم که نتیجه برای الحاق k مجموعه‌ی F– اندازه‌پذیر دوبه‌دو مجزا درست باشد . آن‌گاه :

$$m\left(\mathop{\vee}_{i=1}^{k+1} l_i\right) = m\left(\mathop{\vee}_{i=1}^{k} l_i \vee l_{k+1}\right) = \sum_{i=1}^{k} m(l_i) + m(l_{l+1})$$

$$-m\left(l_{k+1} \wedge \left(\mathop{\vee}_{i=1}^{k} l_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{k+1} m(l_i)$$

با استقرا، نتیجه می‌شود که نتیجه برای تمام kها درست است .

چون $\left\{ \overset{k}{\underset{i=1}{\vee}} l_i \right\}$ یک دنباله‌ی بطور یکنوا صعودی از مجموعه‌های $F-$اندازه‌پذیر است و $\lim\limits_{k\to\infty} \overset{k}{\underset{i=1}{\vee}} l_i = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\vee}} l_i$ ، نتیجه می‌گیریم :

$$m\left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\vee}} l_i \right) = \lim_{k\to\infty} m\left(\overset{k}{\underset{i=1}{\vee}} l_i \right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} m(l_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(l_i)\ .$$

4.1. زیر σ-جبرهای فازی m-هم‌ارز

تعریف 1.4.1: گیریم (X,M,m) یک فضای اندازه‌ی F-احتمال و N_2,N_1 زیر σ-جبرهای فازی از M باشند. آن‌گاه N_2 یک m-تظریف از N_1 نامیده می‌شود، که با $N_1 \leq_m N_2$ نشان داده می‌شود، اگر برای هر $m \in \overline{N}_2$، وجود داشته باشد l عضو $\overline{N}_1$ به طوری که $m(l \wedge m)=m(m)$.

زیرجبرهای N_1,N_2، $N_1,N_2 \in F(M)$، m- هم‌ارز نامیده می‌شوند و به صورت $N_1 \approx_m N_2$ نشان داده می‌شود اگر

برای هر $m \in \overline{N}_2$

$$m\left(m \wedge \left(\vee\left\{l ; l \in \overline{N}_1\right\}\right)\right) = m(m)$$

و برای هر $l \in \overline{N}_1$

$$m\left(l \wedge \left(\vee\left\{m : m \in \overline{N}_2\right\}\right)\right) = m(l) \text{ .}$$

اگر $\{l_i\}, N \in F(M)$ نشان دهنده‌ی مجموعه‌ی اتم‌های N باشد، آن‌گاه $\vee l_i$ نشان دهنده‌ی الحاق اتم‌های N است.

قضیه 2.4.1: گیریم (X,M,m) یک فضای اندازه‌ی F-احتمال باشد. اگر N_3,N_2,N_1 عناصری از $F(M)$ باشند آن‌گاه

$$N_1 \leq_m N_2 \Rightarrow N_1 \vee N_3 \leq_m N_2 \vee N_3 .$$

اثبات: گیریم $m \in \overline{N_2 \vee N_3}$. آن‌گاه $m = l \wedge J$ برای $l \in \overline{N}_2$ و $J \in \overline{N}_3$. چون $N_1 \leq_m N_2$ وجود دارد $h \in \overline{N}_1$ به طوری‌که $m(h \wedge l)=m(l)$ حال،

$$m(m)\geq m(h\wedge J\wedge m)=m(h\wedge J\wedge l)$$

$$=m(h\wedge l)+m(J)-m((h\wedge l)\vee J)$$

$$=m(l)+m(J)-m((h\vee l)\wedge(l\vee J))$$

$$=m(l)+m(J)-m(h\vee l)-m(l\vee J)+m(h\vee J\vee l)$$

$$\geq m(l\wedge J)=m(m).$$

بنابراین $m(h\wedge J\wedge m)=m(m)$ و نتیجه حاصل می‌شود.

∎

قضیه 3.4.1: فرض می‌کنیم که N_3,N_2,N_1 عناصری از $F(M)$ و $\{J_k\},\{m_j\},\{l_i\}$ به ترتیب اتم‌هایی از N_3,N_2,N_1 باشند، آن‌گاه

i) $N_1\approx_m N_2 \Leftarrow$

(a) $m(l_i\vee(\vee m_j))=\sum m(m_j)=\sum m(l_i)$

(b) $m((\vee l_i)\vee(\vee m_j))=m(\vee m_j)$

ii) $\Leftarrow N_2\approx_m N_3\ ,N_1\approx_m N_2$

$$\sum(m(l_i))=\sum m(m_j)=\sum m(J_k)=$$

$$=m(\vee J_k)=m(\vee m_j)=m(\vee l_i)=m(l_i\vee(\vee m_j))$$

$$=m(m_j\vee(\vee l_i))=m(J_k\vee(\vee m_j))=m(m_j\vee(\vee J_k))$$

اثبات: $(a)(i)$

$$m(l_i\vee(\vee m_j))=m(l_i)+m(\vee m_j)-m(l_i\wedge(\vee m_j))=\sum m(m_j).$$

$(b)\,(i)$

$$m\left(\left(\vee l_i\right)\vee\left(\vee m_j\right)\right)=m\left(\vee l_i\right)+m\left(\vee m_j\right)-m\left(\left(\vee m_i\right)\wedge\left(\vee m_j\right)\right)$$

و چون m_j ها دوبه‌دو $m-$ مجزا هستند،

$$m\left(\left(\vee l_i\right)\wedge\left(\vee m_j\right)\right)=m\left(\vee_{i,j}\left(l_i\wedge m_j\right)\right)$$

$$=m\left(\vee_j\left(\vee_j\left(l_i\wedge m_j\right)\right)=m\left(\vee_j\left(m_j\wedge\left(\vee l_i\right)\right)\right)\right)$$

$$=\sum m\left(m_j\wedge\left(\vee l_i\right)\right)=\sum m\left(m_j\right)$$

$$=m\left(\vee m_j\right)$$

نتیجه از دو تساوی حاصل می‌شود.

(ii) از $(a)(i)$ حاصل مي‌شود.

■

قضیه 4.4.1: رابطه‌ی $m-$هم‌ارزی روی زیر σ-جبرهای فازی یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

اثبات: با‌استفاده از تعریف و با استفاده از قضیه‌ی 3.3 می‌دانیم که $\approx_m$ انعکاسي و تقارني است و نشان می‌دهیم‌که $\approx_m$ متعدی است. فرض می‌کنیم‌که $N_1\approx_m N_2$ و $N_2\approx_m N_3$ گیریم $\{J_k\},\{m_k\},\{l_i\}$ به ترتیب اتم‌هایی از N_3,N_2,N_1 باشند. آن‌گاه با استفاده از قضیه‌ی 3.4.1 $(b)(i)$ داریم

$$m\left(l_i\right)\geq m\left(l_i\wedge\left(\vee J_k\right)\right)\geq m\left(l_i\wedge\left(\vee m_j\right)\wedge\left(\vee J_k\right)\right)$$

$$=m\left(l_i\wedge\left(\vee m_j\right)\right)+m\left(\vee J_k\right)-$$

$$m\left(l_i\wedge\left(\vee m_j\right)\right)\wedge\left(\vee J_k\right)\geq$$

$$m\left(l_i\right)+m\left(\vee J_k\right)-m\left(\left(\vee J_k\right)\vee\left(\vee m_j\right)\right)$$

$$=m(l_i)$$

بنابراین

$$m(l_i)=m(l_i\wedge(\vee J_k))$$

و به‌طور مشابه

$$m(J_k)=m(J_k\wedge(\vee l_i))\ .$$

■

قضیه 5.4.1: گیریم (X,M,m) یک فضای اندازه‌ی $F-$ احتمال باشد، اگر N_2,N_1 عناصری از $F(M)$ باشند، آن-گاه:

$$N_1\approx_m N_2\Rightarrow N_1\approx_m N_1\vee N_2\ .$$

اثبات: گیریم $\overline{N}_1=\{l_i:1\le i\le k\}$ و $\overline{N}_2=\{m_i:1\le j\le t\}$

به‌خاطر می‌آوریم که $\overline{N_1\vee N_2}=\{l_i\wedge m_j: l_i\in\overline{N}_1, m_j\in\overline{N}_2, m(l_i\wedge m_j)>0\}$.

اگر $a=\{(i,j):V_{ij}\equiv l_i\wedge m_j\in\overline{N_1\vee N_2}\}$ ، آن‌گاه

$$a=\mathbf{U}_i\{(i,j):j\in b_i\}$$

که $b_i=\{j:m(v_{ij})>0\}$ ، $1\le i\le k$. توجه می‌کنیم که $m(v_{ij})=0$ برای $j\notin b_i$. داریم:

$$\vee v_{ij}=\vee\{\vee\{v_{ij}:j\in b\}:1\le i\le k\}$$

$$=\vee l_1\wedge(\vee\{m_j:j\in b_i\})$$

چون گردایه‌ی $\{l_i:1\le i\le k\}$ و $\{m_j:1\le j\le t\}$ دوبه‌دو $m-$ مجزا هستند، بدست می‌آوریم:

$$m\left(l_k \wedge \left(\vee v_{ij}\right)\right)=m\left(l_k \wedge \left(\vee_i\ l_i \wedge \left(\vee\{m_j : j\in b_i\}\right)\right)\right)$$

$$=m\left(l_k \wedge \left(\vee\left\{m_j : j \in b_k\right\}\right)\right)$$

$$=m\left(\vee\left\{l_k \wedge m_j : j\in b_k\right\}\right)=\sum_{j\in b_k} m\left(\vee v_{kj}\right)$$

$$=\sum_j m\left(\vee v_{kj}\right)=m\left(l_k \wedge \left(\vee m_j\right)\right)=m\left(l_k\right).$$

براي $v_{kj}\in\overline{N_1 \vee N_2}$، چون $m\left(m_j \wedge l_k \wedge l_i\right)=0$ براي $i \neq k$ ،

$$m\left(v_{kj} \wedge \left(\vee\ l_i\right)\right)= m\left(m_j \wedge l_k \wedge \left(\vee\ l_i\right)\right)$$

$$=m\left(m_j \wedge l_k\right)=m\left(v_{kj}\right)$$

و اين اثبات را تمام ميكند.

■

فصل دوم

انتروپی یک سیستم F- دینامیکی

انتروپی یک سیستم F-دینامیکی

تعریف 1.2: گیریم (X,M,m) یک فضای اندازه‌ی F-احتمال باشد و $N \in F(M)$. انتروپی N ، که به‌وسیله‌ی $H(N)$ نمایش داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(N) = -\sum_{m \in \bar{N}} m(m) \log m(m) .$$

مجموع تهی به‌صورت صفر تعریف می‌شود. بنابراین اگر N دارای هیچ اتمی نباشد، آن‌گاه $H(N)=0$.

تابع $g:[0,1] \to R$ به‌صورت

$$g(x) = \begin{cases} x \log x, & x > 0 \\ 0 \quad , & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

تابعی محدب است. برحسب تابع g ،

$$H(N) = -\sum_{m \in \bar{N}} g(m(m))$$

قضیه 2.2: فرض می‌کنیم که (X,M,m) یک فضای اندازه‌ی F-احتمال باشد و N_2, N_1, N عناصری از $F(M)$ باشند، آن‌گاه تابع انتروپی H در موارد زیر صدق می‌کند:

(i) $H(N) \geq 0$

(ii) اگر $N_1 \approx_m N_2$ ، آنگاه

(a) $H(N_1) \leq H(N_2) \Leftarrow N_1 \leq_m N_2$ و

(b) $H(N_1) \leq H(N_1 \vee N_2)$.

اثبات (i): برای $m(m) \in (0,1], m \in \bar{N}$ ، بنابراین $\log m(m) \leq 0$. در نتیجه $m(m) \log m(m) \leq 0$ ، و $H(N) \geq 0$.

(a)(ii) فرض می‌کنیم $N_1 \leq_m N_2$، $\{l_i\}$، $\{m_j\}$ اتم‌هایی از N_1, N_2 باشند، آن‌گاه برای $m_j \in \overline{N}_2$، وجود دارد $l_k \in \overline{N}_1$ به‌طوری که $m(m_j) = m(l_k \wedge m_j)$. چون $N_1 \approx_m N_2$ و l_i ها دوبه‌دو m-مجزا هستند،

$$m(m_j) = m(m_j \wedge (\vee l_i)) = \sum_i m(m_j \wedge l_i)$$

بنابراین برای $m(m_j \wedge l_i) = 0, i \neq k$. در نتیجه

$$g(m(m_j)) = \sum_1 g(m(m_j \wedge l_i)).$$

قرار می‌دهیم $a = \{(i,j) : m(l_i \wedge m_j) > 0\},\ b = \{i : m(l_i) > 0\}$.

آن‌گاه:

$$H(N_2) = -\sum_j \sum_i g(m(m_j \wedge l_i))$$

$$= -\sum_{i,j \in a} m(l_i \wedge m_j) \log(l_i \wedge m_j)$$

$$\geq -\sum_{(i,j) \in a} m(l_i \wedge m_j) \log m(l_i)$$

$$\geq -\sum_{i \in b} \log m(l_i) \sum_j m(l_i \wedge m_j)$$

چون m_i ها دوبه‌دو مجزا هستند،

$$H(N_2) \geq -\sum_{i \in B} \log m(l_i)\, m(\vee_j (l_i \wedge m_j))$$

$$= -\sum m(l_i) \log m(l_i) = H(N_1)$$

(b) (ii) با توجه به قضیه‌ی 5.4.1 $N_1 \approx_m N_1 \vee N_2$. فرض می‌کنیم $J \in \overline{N_1 \vee N_2}$، آن‌گاه $J = l_i \wedge m_j$. که $m_j \in \overline{N}_2, l_i \in \overline{N}_1$ بنابراین برای