بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی

مرکز تحصیلات تکمیلی تهران

رساله

برای دریافت مدرک دکتری تخصصی (.Ph.D)

رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

عملگرهای رده‌ی J و ابردوری زیرفضایی

میثم اسدی پور

استاد راهنما: دکتر ثریا طالبی

استاد مشاور: دکتر بهمن یوسفی

اسفند ۱۳۹۲

چکیده

فرض می‌کنیم X، یک فضای باناخ مختلط تفکیک‌پذیر بابعدنامتناهی است. یک عملگرخطی کراندار $T \in B(X)$ ابردوری نامیده می‌شود اگر یک بردار $x \in X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که مدار بردار x تحت عملگر T، $Orb(T,x)=\{x,Tx,T^2x,...\}$، در فضای X چگال است، و عملگر T، به ازای یک زیرفضای بسته M از فضای باناخ X، M-ابردوری نامیده می‌شود اگر به ازای یک بردار $x \in X$،

$$\overline{Orb(T,x)\bigcap M}=M.$$

فرض می‌کنیم xیک بردار ناصفر از فضای X است به‌طوری‌که به ازای هر همسایگی باز $U_x \subset X$ و به ازای هر مجموعه باز ناتهی دلخواه $V \subset X$، و هر عدد صحیح مثبت N ، عدد صحیح $n \geq N$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $T^n(U_x)\bigcap V \neq \phi$، دراین صورت عملگر T، J-رده نامیده می‌شود.

در این پایان نامه بیان خواهیم کرد که چگونه از تلفیق مفاهیم ابردوری موضعی و M-ابردوری، برای مساله باز" فرض کنیم T، یک عملگر معکوس پذیر و همچنین یک عملگر M-ابردوری است. در این صورت آیا T^{-1} نیز یک عملگر ابردوری زیرفضایی است؟ و در صورت پاسخ مثبت، عملگر T^{-1} نسبت به کدام زیرفضا از فضای X ،ابردوری زیرفضایی است؟" در یک حالت خاص، پاسخی مثبت ارائه می‌دهیم، و پاسخی منفی برای سوال" آیا عملگر آمیخته $T \in B(X)$ وجود دارد به‌طوری‌که الحاق آن یعنی $T^*: X^* \to X^*$، عملگری آمیخته باشد؟" ارائه می‌دهیم و همچنین عملگرهای M-آمیخته را معرفی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: عملگرابردوری، عملگرابردوری زیرفضایی، مجموعه حد توسیع یافته بردار x تحت عملگر T ، عملگر رده J .

فهرست

فصل سوم: عملگرهای ترایای توپولوژیک موضعی

مقدّمه:

مفهوم ابردوری در واقع مطالعه عملگرهای خطی و پیوسته‌ای است که دارای یک مدار چگال در فضای زمینه هستند. فرض کنیم X یک فضای باناخ تفکیک پذیر روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ است، در این صورت عملگر خطی و پیوسته $T:X\to X$ را ابردوری نامیم هرگاه به ازای حداقل یک بردار ناصفر $x\in X$ ، $\overline{Orb(T,x)}=X$ که درآن $Orb(T,x)=\{T^n x: n\geq 0\}$. به عنوان یک کاربرد از قضیه کاتگوری بئر، عملگر T ابردوری است اگر و فقط اگر ترایای توپولوژیک باشد یا به طور صریح به ازای هر زوج U,V از زیر مجموعه های باز و ناتهی X، عدد صحیح مثبت n موجود است به طوری که مجموعه $T^n(U)\bigcap V$ ناتهی است. عملگر $T\in B(X)$ نسبت به زیرفضای بسته و ناصفر M از فضای باناخ X ، عملگری $M-$ ابردوری است هرگاه

$$\exists x\in X \quad s.t \quad \overline{Orb(T,x)\bigcap M}=M.$$

در این صورت بردار x یک بردار $M-$ ابردوری برای عملگر T است.

دلیل تفکیک‌پذیری فضای X در فرضیات اولیه، باتوجه به توضیحات بالا واضح است و به این ترتیب عملگرهای روی فضاهای باناخ تفکیک ناپذیر مانند $l^\infty(\mathbb{N})$ در دایره مطالعه عملگرهای ابردوری، قرار نمی‌گیرند. البته در مورد فضای زمینه $l^\infty(\mathbb{N})$ ، یک روش برای حل این محدودیت

جایگزینی توپولوژی حاصل از نرم روی فضای باناخ $l^{\infty}(\mathbb{N})$ با ضعیف*توپولوژی[1] است اما نه تنها در مورد فضای باناخ $l^{\infty}(\mathbb{N})$، بلکه در مورد تمام فضاهای باناخ تفکیک ناپذیر، یک روش که اخیرا مورد توجه قرار گرفته است بهره‌گیری از مفهوم ابردوری موضعی است:

عملگر $T \in B(X)$ را در بردار $x \in X$ به طور موضعی ابردوری گوئیم اگر به ازای هر همسایگی باز $U \subset X$ از بردار x و به ازای هر مجموعه باز ناتهی $V \subset X$، یک عدد صحیح مثبت n موجود است به طوری‌که $T^n(U) \bigcap V \neq \phi$.

تعریف معادل دیگری برای مفهوم بالا به این صورت ارائه شده است:

عملگر $T \in B(X)$ در بردار $x \in X$ به طور موضعی ابردوری است اگر و فقط اگر به ازای هر بردار $y \in X$، دنباله $\{x_n\} \subset X$ و دنباله صعودی اکید $\{k_n\}$ از اعداد صحیح مثبت موجوداند به‌طوری‌که $x_n \to x$ و $T^{k_n} x_n \to y$.

عملگرهایی که روی فضای باناخ X (که لزوما تفکیک پذیر نیست) در تعریف اخیرصدق کنند را عملگرهای از رده J گوییم و در این صورت بردار متناظر x، یک J-بردار برای عملگر T است.

در فصل اول مقدماتی از مفهوم ابردوری و مفاهیم مرتبط با آن مانند ترایای توپولوژیکی[2] آمیختگی بطور ضعیف[3] و آمیختگی[4] را شرح خواهیم داد تا زمینه مناسب برای شرح دو مفهوم ابردوری زیرفضایی و عملگرهای رده J در فصل دوم فراهم گردد.

و در انتها فصل سوم را به ارائه نتایجی اختصاص داده ایم که حاصل تلفیق دو مفهوم مورد تاکید در فصل دوم است و از جمله آن نتایج:

- ارائه اثباتی کوتاه از قضیه « الحاق هر عملگر آمیخته روی فضای X، عملگری آمیخته نیست »، مقاله [۵۰]،

---

[1] weak star topology
[2] topological transitivity
[3] weakly mixing
[4] mixing

- تعریف مفهوم ترایای توپولوژیک زیرفضایی موضعی و پاسخ به سوال (i) در مقاله [۳۳] در حالت ترایای توپولوژیک زیرفضایی، مقاله [٤۹]،

- تعریف مفهوم آمیختگی زیرفضایی و ارائه برخی نتایج حاصل از آن، مقاله [۵۱].

در این پایان نامه X همواره نشان دهنده فضای باناخ مختلط است و زیرفضای بسته و ناصفر از فضای باناخ X یا فضای تفکیک‌پذیر هیلبرت مختلط H، را با M نشان خواهیم داد.

فصل اول:

آشنایی با عملگرهای ابردوری

دربخش اول ابتدا تاریخچه‌ای مختصر از پیدایش مفهوم ابردوری را بیان می‌کنیم تا انگیزه پرداختن به این موضوع در خواننده ایجاد گردد و سپس ارتباط این مفهوم با مسئله زیرفضای پایا را شرح خواهیم داد. نگاهی مجدد و توپولوژیک به عملگرهای ابردوری را در بخش دوم می‌توان مشاهده کرد. بخش‌های سوم و چهارم به معرفی زیرمجموعه‌های عملگرهای به طورضعیف‌آمیخته و عملگرهای آمیخته از مجموعه عملگرهای ابردوری می‌پردازند. در بخش پنجم برخی از "دسته گزاره هایی"را مورد توجه قرار می‌دهیم که در مقالات مرتبط با مفهوم ابردوری، با عنوان محک‌های ابردوری از آنها یاد می‌گردد، البته مطلب بااهمیت این است که تاکنون چندین محک برای ابردوری بودن یک عملگر توسط برخی از صاحب‌نظران در عرصه ریاضیات ارائه شده است که ما فقط تعداد محدودی از آنها را بیان می‌کنیم. در بخش دوم که نگاه توپولوژیک به یک عملگرابردوری را شرح می‌دهیم، زیرمجموعه‌ای از بردارها، با نام بردارهای ابردوری به ازای یک عملگر ابردوری معین، معرفی می‌گردد که موضوع اصلی در بخش ششم معرفی برخی ویژگی‌های این مجموعه است. موضوع بخش هفتم نگاه طیفی به عملگر ابردوری است و این فصل مقدماتی را با بخش هشتم خاتمه می‌دهیم که درواقع در این بخش است که یک منبع برای ارائه مثال‌های مناسب در بخش های قبل و همچنین فصل‌های آتی، معرفی می‌نماییم.

۱-۱: تاریخچه و مفهوم ابردوری

یکی از بحث‌های اصلی و با سابقه در زمینه آنالیز یافتن اشیاء تقریب ساز با دقت مورد دلخواه است. مفهوم عمومیت[1] در آنالیز به وجود یک شی اشاره دارد که ما را در تقریب زدن یک رده از اشیا کمک می‌کند و در طول سال‌های گذشته، تعدادی از اشیایی که این رفتار شگفت‌آور را از خود به نمایش گذاشته‌اند، کشف شده‌اند. به نظر می‌رسد اولین مثال‌ها ازاشیا عمومی در [۳۹] و [۳۵] ارائه شده است. شاید یکی از جذاب ترین اشیا عمومی منتسب به *منشو*[2] نگارنده مقاله [۳٦] در سال ۱۹٤٥ است که اثبات وجود یک سری مثلثاتی عمومی با ضرایب همگرا به صفر را ارائه داد. در واقع برای هر دستگاه متعامد یکه $\{\psi_j\}$ در $L^2[0,1]$ یک سری $\sum_{j=1}^{\infty} a_j\psi_j$ و $a_j \in \mathbb{R}$ و $a_j \to 0$ وجود دارد به طوری‌که برای هر تابع اندازه‌پذیر f روی $[0,1]$ یک دنباله $\{n_k\}$ یافت می‌شود به‌طوری‌که:

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j\psi_j(t) \to f(t) \quad a.e \ \ in \ \ [0,1].$$

یک نوع خاص ازمفهوم عمومیت در*فضای برداری توپولوژیک*[3]، پدیده *ابردوری*[4] است. مفهوم ابردوری درواقع مطالعه برخی ویژگی‌های عملگرهای خطی پیوسته $T \in B(X)$ است به‌طوری‌که دارای یک *مدار*[5] چگال در فضای برداری توپولوژیک Xاست. نام ابردوری اولین بار توسط *بیوزمی*[6] در سال ۱۹۸٦ پیشنهاد شد و به نظر می‌رسد که دلیل این نام‌گذاری ارتباط این مفهوم با مفهوم قدیمی تر *عملگرهای دوری*[7] در نظریه عملگرها است. همان‌طورکه این نام‌گذاری نشان می‌دهد، مفهوم ابردوری قوی تر از مفهوم دوری بودن است زیرا عملگر دوری T دارای یک مدار است که *توسیع خطی* آن در X چگال است.

---

[1] Universality
[2] Menshow
[3] Topological Vector Space
[4] Hypercyclicity
[5] Orbit
[6] Beauzamy
[7] Cyclic operators

در این پایان نامه فرض بر این است که X یک *فضای باناخ تفکیک‌پذیر* [1] روی میدان اعداد مختلط و $B(X)$ مجموعه عملگرهای خطی و کراندار روی X است.

تعریف1.1.1 فرض کنیم $T \in B(X)$. بردار $x \in X$ را یک بردارابردوری [2] برای عملگر T می‌نامیم، هرگاه مدار بردار x تحت عملگر T یعنی

$$Orb(T,x) = \{x, Tx, T^2x, ...\}$$

در فضای X چگال باشد. در این صورت عملگر T را یک عملگر ابردوری می‌نامیم ومجموعه بردارهای ابردوری عملگر T را با نماد $HC(T)$ نشان خواهیم داد.

اولین مثال از یک عملگر ابردوری در سال ۱۹۲۹ توسط بیرخوف [3] در [۹] ارائه شده است. بیرخوف وجود یک تابع *تام* [4] f و یک ثابت ناصفر a را نشان داد که هر تابع متعلق به $H(\mathbb{C})$ را می‌توان توسط انتقال های متوالی f تحت عملگر انتقال T_a تقریب زد.

دومین مثال از عملگر ابردوری در سال ۱۹۵۲ توسط *مکلان* [5] [۳۱] ارائه شده است. او وجود یک تابع f را نشان داد که مجموعه مشتقات متوالی f در $H(\mathbb{C})$ چگال است، یا به عبارتی عملگر مشتق $D: f \to f'$ روی $H(\mathbb{C})$ یک عملگر ابردوری است. مثال‌های دیگر را می‌توان در مقاله [٤٦] مشاهده کرد.

---

1 Separable Banach space
2 Hypercyclic
3 Birkhoff
4 Entire
5 Maclane

مفهوم ابردوری به جهت ارتباط با مسئله مشهور *زیرفضای پایا*[1] نیزحائز اهمیت است و مسئله زیر فضای پایا به این صورت است:"«برای هر عملگر T روی فضای X، آیا یک زیرفضای بسته نابدیهی $Y \subset X$ وجود دارد به‌طوری‌که $T(Y) \subseteq Y$ ؟»".

هنوز جوابی برای این سوال در رابطه با عملگرهای روی فضای *هیلبرت*[2] ارائه نشده است اما پاسخ‌هایی منفی توسط *انفلو*[3] در[۲۱] و رد[4] [۴۰] در دو فضای باناخ خاص ارائه شده است که این پاسخ‌ها با توجه به مفهوم ابردوری هستند. در واقع یک عملگر T روی فضای $l^1(\mathbb{N})$ ارائه شده است به‌طوری‌که هر بردار ناصفر آن یک بردار ابردوری است و در صورت وجود زیرفضای بسته $T-$پایای Y می توان هر بردار ناصفر $x \in Y$ را در نظر گرفت و به این ترتیب Y شامل بستار $Orb(T, x)$ است و $Y = X$، یعنی ابردوری بودن هر بردار ناصفر برای این عملگر نتیجه می‌دهد که تنها زیرفضاهای بسته $T-$پایا، زیرفضاهای $\{0\}$ و $l^1(\mathbb{N})$هستند. به هرحال و با هر انگیزه‌ای، مطالعه در زمینه ابردوری از سال ۱۹۸۲ با رساله دکترای *کیتایی*[5] [۲۹] و سپس مقاله [۲۲] توسط جتنر[6] و *شاپیرو*[7] گسترش و سرعت یافته است.

به دلیل مورد توجه بودن مفهوم بردارهای دوری درمدت نسبتا طولانی توسط نظریه پردازان در زمینه عملگرها وهمچنین توجه به مفهوم *سوپردوری*[8] در کنار مفهوم ابردوری در تعداد قابل توجهی از مقالات، تعریف زیر را ارائه می‌دهیم اگرچه دو مفهوم مذکور در این پایان نامه مورد توجه نیستند.

تعریف۲.۱.۱ فرض کنیم $T \in B(X)$. دراین صورت بردار $x \in X$ را یک *بردار دوری*[9] برای عملگر Tمی‌نامیم هرگاه گسترش خطی مدار بردار x تحت عملگر T یعنی:

---

[1] Invariant Subspace
[2] Hilbert
[3] Enflo
[4] Read
[5] Kitai
[6] Genther
[7] Shapiro
[8] Supercyclicity
[9] Cyclic vector

$$Span\{x, T^1x, T^2x, ...\},$$

درفضای X چگال باشد و درصورت چگال بودن *مدارتصویری*[1] بردار x تحت عملگر T یعنی:

$$\{\lambda T^n x : \lambda \in \mathbb{C}, n \geq 0\},$$

درفضای X، گوییم بردار x یک *بردار سوپردوری*[2] برای عملگر T است. عملگری که یک بردار دوری یا سوپردوری دارد را به ترتیب عملگر دوری[3] یا سوپردوری[4] می‌نامیم.

دراین صورت مجموعه عملگرهای ابردوری، به وضوح زیرمجموعه عملگرهای سوپردوری و همچنین زیرمجموعه عملگرهای دوری است.

هنگامی که به مطالعه درمورد مفهوم ابردوری می‌پردازیم درواقع فضای زمینه X تفکیک‌پذیر است زیرا مدار یک بردار x تحت عملگر T یک مجموعه شماراست و از طرفی مفهوم ابردوری در مورد فضاهای با بعد نامتناهی مطرح است زیرا :

قضیه۳.۱.۱([۳۷]) روی یک فضای با بعد متناهی X، هیچ عملگر ابردوری وجود ندارد.

اگرچه در سال ۲۰۱۲ نگارنده‌های مقاله [۲۸] تلاش کرده‌اند که با تعریف مفهوم *عملگرهای ابردوری عددی*[5] دریچه‌ای برای ادغام مفهوم ابردوری و فضاهای با بعد متناهی باز کنند، اما سوال مهم دیگر این است که"«آیا برای هر فضای باناخ تفکیک‌پذیر با بعد نامتناهی X، یک عملگر ابردوری $T \in B(X)$ وجود دارد ؟»". *انصاری*[6] پاسخی برای این سوال ارائه داده است.

[1] Projective orbit
[2] Supercyclic vector
[3] Cyclic operator
[4] Supercyclic operator
[5] Numerically Hypercyclic Operators
[6] Ansari

قضیه۴.۱.۱([۲]) روی هر فضای باناخ تفکیک‌پذیر و با بعد نامتناهی X، یک عملگر ابردوری وجود دارد.

واما نکته آخردر این بخش این است که در تعریف ۱.۱.۱، چگال بودن با توجه به نرم فضای باناخ X است و اگر *توپولوژی ضعیف*[۱] را روی فضای X در نظر بگیریم، آنگاه مفهوم *ابردوری ضعیف*[۲] معنا پیدا می‌کند که کسب اطلاعات بیشتر در این زمینه در مقالات [۵]، [۱۲] و [٤٧] امکان پذیر است.

۱–۲: ترایای توپولوژیک و ارتباط با مفهوم ابردوری

مجموعه‌های باز[۳] در یک فضای توپولوژیک از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند و بعد از تعریف عملگرهای ابردوری در بخش قبل اکنون مایل هستیم که درکی از ارتباط این مفهوم با مجموعه‌های باز یا به طور صریح، گوی‌های باز در فضای باناخ X را به دست آوریم و *مفهوم ترایای توپولوژیک*[٤] در واقع این ارتباط را بیان می‌کند. البته بیان این نکته ضروری است که مجموعه اعداد صحیح نامنفی را با $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ نشان خواهیم داد.

تعریف ۱.۲.۱ عملگر $T \in B(X)$ را ترایای توپولوژیک می‌نامیم هرگاه به ازای هر زوج U و V از زیر مجموعه‌های باز و ناتهی X، عدد $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$T^n(U) \bigcap V \neq \phi.$$

---

1 Weak Topology
2 Weak Hypercyclicity
3 Open sets
4 Topological Transitivity

تعریف۲.۲.۱ فرض کنیم $T \in B(X)$. به ازای هردو زیرمجموعه $A, B \subseteq X$ مجموعه *بازگشت از مجموعه* A *به مجموعه* B [1] را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N_T(A, B) = \{n \in \mathbb{N}^* : \ T^n(A) \bigcap B \neq \phi\}.$$

درادامه نشان خواهیم داد که برای عملگر ترایای توپولوژیک T وهر زوج U و V از زیرمجموعه های باز وناتهی فضای X، نه‌تنها $N_T(U,V)$ ناتهی است بلکه یک مجموعه نامتناهی است. ابتدا یک لم را بیان و اثبات می‌کنیم.

لم۳.۲.۱ فرض کنیم $T \in B(X)$ یک عملگرترایای توپولوژیک و $W \subset X$ یک زیرمجموعه باز ناتهی است. در این صورت $\mathbb{N} \bigcap N(W, W) \neq \phi$.

برهان: دو بردار مجزا x و y متعلق به W و همسایگی‌های باز W_x و W_y به ترتیب از x و y را درون W درنظر می‌گیریم به‌طوری‌که $W_x \bigcap W_y = \phi$ و T یک عملگر ترایای توپولوژیک است در نتیجه:

$$\phi \neq N_T(W_x, W_y) \bigcap \mathbb{N} \subseteq N_T(W, W) \bigcap \mathbb{N}$$

واثبات کامل است. $\square$

قضیه۴.۲.۱ به ازای هر زوج U و V از زیر مجموعه‌های باز و ناتهی X وبه ازای هر عملگر ترایای توپولوژیک T، مجموعه بازگشت $\mathrm{N}_T(U,V)$ یک مجموعه نامتناهی است.

---

[1] Return set from A to B

برهان: اگر $U \cap V = \phi$، آنگاه در تعریف۱.۲.۲، عدد صحیح n، مثبت است و اگر $U \cap V \neq \phi$، آنگاه بنابر لم۱.۲.۳ داریم :

$$N_T(U \cap V, U \cap V) \cap \mathbb{N} \subseteq N_T(U,V) \cap \mathbb{N}.$$

سپس عدد دلخواه $n \in N_T(U,V) \cap \mathbb{N}$ و مجموعه باز وناتهی $W_n = U \cap T^{-n}(V)$ را درنظر می‌گیریم واکنون عدد $k \in N_T(W_n, W_n) \cap \mathbb{N}$ را انتخاب می‌کنیم. بنابراین

$$\phi \neq W_n \cap T^{-k}(W_n) \subseteq U \cap T^{-(k+n)}(V)$$

و درنتیجه $n + \mathrm{N}_T(W_n, W_n) \subset N_T(U,V)$. اکنون در توضیحات بالا اگر عدد $n+k$ را جایگزین عدد $n \in N_T(U,V)$ کنیم، آنگاه عددی مانند $m \in \mathrm{N}_T(U,V)$ وجود دارد به‌طوری‌که $m > n+k$ و به استقرا، اثبات نامتناهی بودن مجموعه بازگشت $\mathrm{N}_T(U,V)$، کامل است. □

قضیه زیر در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرد:

قضیه۱.۲.۵ (گزاره۱.۱۰ [۲۵]) فرض کنیم $T \in B(X)$. دراین صورت گزاره‌های زیر باهم معادل هستند.

i) عملگر T ترایای توپولوژیک است.

ii) به ازای هر زیرمجموعه باز و ناتهی U از X، مجموعه $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(U)$ درفضای X چگال است.

iii) به ازای هر زیرمجموعه باز و ناتهی U از X، مجموعه $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U)$ در فضای X چگال است.

قضیه زیر یک قاعده جالب توجه «صفر–یا–یک» برای مجموعه بردارهای ابردوری یک عملگر $T \in B(X)$ بیان می‌کند و درواقع این قاعده «صفر–یا–یک» به این صورت است که مجموعه

بردارهای ابردوری یک عملگر دلخواه T، یا تهی است یا یک مجموعه چگال در فضای X است. به عبارت دیگر، مجموعه بردارهای ابردوری یک عملگرابردوری T، با نگاه توپولوژیک، یک مجموعه بسیار بزرگ است.

قضیه۶.۲.۱ (*قضیه ترایایی بیرخوف*) فرض کنیم $T \in B(X)$. دراین صورت گزاره‌های زیر باهم معادل هستند.

i) عملگر T، ابردوری است.

ii) عملگر T، ترایای توپولوژیک است.

واگر هرکدام از موارد بالا رخ دهد، آنگاه مجموعه $HC(T)$ یک زیرمجموعه G_δ و چگال از فضای X است.

برهان: ابتدا فرض کنیم T یک عملگر ابردوری، $x \in HC(T)$ و U و V دو مجموعه ی باز و ناتهی در فضای X هستند، در این صورت عدد صحیح $n \geq 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $T^n x \in U$ زیرا $\overline{Orb(T, x)} = X$. ازطرفی عدد صحیح $m \geq n$ وجود دارد به‌طوری‌که $T^m x \in V$ زیرا مجموعه حاصل ازحذف تعداد متناهی از اعضای $Orb(T, x)$ و به ویژه $Orb(T, T^n x)$ در فضای X چگال است. درنتیجه $T^{m-n}(U) \cap V \neq \phi$ و عملگر T ترایای توپولوژیک است.

فرض کنیم عملگر T ترایای توپولوژیک است. به‌دلیل این‌که فضای X شامل یک مجموعه شمارا و چگال از بردارها مانند $\{y_i , i \geq 1\}$ است، گوی‌های باز به مراکز بردارهای y_iها وشعاع‌های $\frac{1}{m}$، $(i \geq 1, m \geq 1)$،یک پایه شمارای $\{U_k\}_{k \geq 1}$ برای توپولوژی X تشکیل می‌دهند. بنابراین بردار $x \in HC(T)$ اگر و تنهااگر به ازای هر $k \geq 1$ ، عدد صحیح $n_k \geq 0$ موجود باشد به‌طوری‌که $T^{n_k} x \in U_k$ و به بیان دیگر

$$HC(T)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=0}^{\infty}T^{-n_k}(U_k).$$

بنابر قضیه۵.۲.۱ هر اجتماع $\bigcup_{n=0}^{\infty}T^{-n_k}(U_k)$ در فضای X باز و چگال است و از طرفی بنابر قضیه *کاتگوری بئر*[1] $HC(T)$ یک زیرمجموعه G_δ و چگال از فضای X است. □

در مورد عملگرهای معکوس‌پذیر از قضیه ترایایی بیرخوف، نتیجه زیر به دست می‌آید.

نتیجه۷.۲.۱ فرض کنیم $T\in B(X)$ عملگری معکوس‌پذیر است. در این صورت عملگر T ابردوری است اگر و تنها اگر $HC(T^{-1})\neq\phi$.

۱–۳ : *آمیختگی به‌طور ضعیف*[2]

سوالی که در مورد عملگرهای ابردوری به ذهن خطور می‌کند این است که آیا با داشتن یک عملگر ابردوری T، می‌توان عملگرهای ابردوری دیگری تولید کرد؟. در این بخش زیر مجموعه‌ای سره از مجموعه عملگرهای ابردوری روی فضای X را معرفی خواهیم کرد و در واقع یک روش برای ارائه یک پاسخ مثبت به سوال بالا شرح می‌دهیم.

[1] Baire category theorem
[2] Weakly Mixing

تعریف۱.۳.۱ فرض کنیم عملگرهای $S, T \in B(X)$. در اینصورت عملگر $T \oplus S$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T \oplus S : X \times X \to X \times X, \quad (T \oplus S)(x, y) = (Tx, Sy).$$

دراین صورت $(T \oplus S)^n = T^n \oplus S^n$ ویادآوری این نکته باارزش است که خانواده تمام حاصل ضرب‌های $U \times V$ از زیرمجموعه‌های باز و ناتهی Uو V از فضای X، تشکیل یک پایه توپولوژیک برای فضای حاصلضربی $X \times X$ می‌دهد و نرم روی فضای $X \times X$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

تعریف۲.۳.۱ درصورت ابردوری بودن عملگر $T \oplus T \in B(X \times X)$، عملگر $T \in B(X)$ را *به‌طور ضعیف‌آمیخته* می‌نامیم.

با توجه به پایه توپولوژیک برای فضای حاصلضربی $X \times X$، عملگر $T \in B(X)$ به‌طور ضعیف آمیخته است اگر و تنها اگر برای هر٤-تایی U_1, U_2, V_1, V_2 از زیرمجموعه‌های باز و ناتهی فضای X،

$$N_T(U_1, V_1) \cap N_T(U_2, V_2) \neq \phi.$$

نکته حائزاهمیت دیگر این است که اگر در توضیحات بالا $U_1 = U_2 = U$ و $V_1 = V_2 = V$، آنگاه ناتهی بودن $N_T(U, V)$ نشان دهنده این مطلب است که مجموعه عملگرهای به‌طورضعیف‌آمیخته روی فضای X، زیرمجموعه‌ایی از مجموعه عملگرهای ابردوری روی فضای X است. محتوای سوال هیررو[1] در [۲۷] این بود که « آیا مجموعه عملگرهای به‌طورضعیف‌آمیخته روی فضای X، یک

[1] Herrero

زیرمجموعه سره از مجموعه عملگرهای ابردوری است؟». پاسخ به این سوال حدود ۱٤ سال به طول انجامید و در مقاله [۲۰] یک فضای باناخ خاص X و یک عملگر ابردوری $T \in B(X)$ معرفی شده است به طوری که عملگر T به‌طورضعیف‌آمیخته نیست و سپس در [٦] وجود عملگرهای ابردوری دیگری روی فضاهای l^p، $1 \leq p < \infty$ و $C[0,1]$ اثبات شده است به‌طوری‌که عملگرهای به‌طور ضعیف‌آمیخته نیستند. اما می‌توان ادعا کرد که حداقل نتایجی که ضمن تلاش برای معرفی عملگرهایی که با وجود ابردوری بودن، به‌طورضعیف‌آمیخته نیستند، یافتن شرایطی است که یک عملگر ابردوری در صورت داشتن آن شرایط، به‌طورضعیف‌آمیخته است. نمونه هایی را بیان می‌کنیم.

قضیه۳.۳.۱ (قضیه۲.٤٥ [۲۵]) فرض کنیم $T \in B(X)$ عملگری ابردوری و به ازای هر مجموعه ناتهی و باز $U \subset X$ و هر همسایگی W از صفر، یک نگاشت پیوسته $S : X \to X$ موجود است به طوری‌که $TS = ST$ و $S(W) \cap U \neq \phi$ و $S(U) \cap W \neq \phi$ در این صورت عملگر T به‌طورضعیف آمیخته است.

قضیه۴.۳.۱ فرض کنیم عملگر $T \in B(X)$ ابردوری است و زیرمجموعه‌ی چگال X_0 از فضای X وجود دارد به‌طوری‌که $Orb(T, x)$ به ازای هر بردار $x \in X_0$، کراندار است، دراین صورت عملگر T به‌طورضعیف‌آمیخته است.

برهان: فرض کنیم W یک همسایگی بردار صفر و U یک زیرمجموعه باز و ناتهی از فضای X است. در این صورت $\varepsilon > 0$ را به اندازه کافی کوچک انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که $B(0,\varepsilon) \subset W$. اکنون بردار دلخواه $x \in X_0 \cap U$ و عدد حقیقی $M = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|T^n x\|$ را درنظر گرفته و بنابراین:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \qquad \frac{\varepsilon}{2M} T^n x \in W .$$