بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی

ترکیبی از روش جواب‌های بنیادی برای حل مسئله معکوس شناسایی تابع منبع مجهول

استاد راهنما:

دکتر فرید(محمد) مالک قائینی

استاد مشاور:

دکتر حمیدرضا نواب‌پور

پژوهش‌گر:

ساناز بختیاری نسب

مهر ۱۳۹۲

تقدیم:

به پدر بزرگوار و مادر مهربانم

آن دو فرشته‌ای که از خواسته‌هایشان گذشتند، سختی‌ها را به جان خریدند و خود را سپر بلای مشکلات و ناملایمات کردند تا من به جایگاهی که اکنون در آن ایستاده‌ام برسم.

به همسرم

به پاس قدردانی از قلبی آکنده از عشق و معرفت که محیطی سرشار از سلامت، امنیت، آرامش و آسایش برای من فراهم آورده است.

سپاس‌گزاری

به مصداق « من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق » بسی شایسته است از استاد فرهیخته و فرزانه جناب دکتر فرید(محمد) مالک قائینی که با نکته‌های دلاویز و گفته‌های بلندشان، صحیفه‌های سخن را علم پرور نمود و همواره راهنما و راه‌گشای اینجانب در اتمام و اکمال پایان‌نامه بوده است، تشکر و قدردانی فراوان کنم.

معلما مقامت ز عرش برتر باد   همیشه توسن اندیشه‌ات مظفر باد

به نکته‌های دلاویز و گفته های بلند   صحیفه‌های سخن از تو علم پرور باد

چکیده

در این پایان نامه یک روش عددی جدید برای حل مسائل منبع معکوس که براساس ترکیبی از دو روش جواب بنیادی [1] و دوگان معکوس [2] پایه گذاری شده است، را مورد بررسی قرار می‌دهیم. هدف تعیین یک تابع منبع معکوس نامعلوم f است. هرگاه تابع سمت راست همساز باشد، روش پیشنهادی برای حل مسئله منبع معکوس، تبدیل آن به یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه چهار است. لازم به ذکر است که مسائل با تابع سمت راست غیرهمساز از طریق معادلات با مشتقات جزئی مرتبه چهار قابل حل نمی‌باشند. روش دیگر برای حل مسائل منبع معکوس روش دوگان معکوس است که روش جواب‌های خصوصی نیز نامیده می‌شود. هدف کلی این روش دو بخش کردن جواب به صورت مجموعی از یک جواب همگن باشرایط مرزی جدید $u_h = u_h\left(x\right)$ و یک جواب خصوصی $u_p = u_p\left(x\right)$ از معادله غیرهمگن پواسن $\Delta u_p = f$ با شرط مرزی همگن است. نتایج عددی این روش نسبت به روش‌های مشهور قبلی که مورد مقایسه قرار می‌گیرند از دقت، سرعت همگرایی و قابلیت اجرایی بالاتری برخوردار است.

[1] The method of fundamental solution (MFS)

[2] Dual reciprocity method (DRM)

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ معادله لاپلاس

در ریاضیات و فیزیک عملگر لاپلاس یا لاپلاسین که با ∇^2 و $\nabla.\nabla$یا Δ نمایش داده می‌شود یکی از عملگر های بیضوی به شمار می‌رود. عملگر لاپلاس یک عملگر دیفرانسیلی مرتبه دوم است که برای فضای اقلیدسی n بعدی عمل می‌کند و تاثیر آن روی هر تابع n متغیره و دوبار مشتق پذیر برابر با دیورژانس گرادیان آن است. بنابراین اگر f تابعی حقیقی و دوبار مشتق‌پذیر باشد، آنگاه :

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla.\nabla f$$

تعریف ۱.۱.۱ هر جواب معادله‌ی لاپلاس $\Delta u = 0$ را یک تابع همساز گوییم و همچنین معادله غیرهمگن زیر را نیز معادله پواسن می‌نامیم.

$$\Delta u = f(x_1, ...x_n)$$

مسائل متعارف مورد مطالعه برای معادله لاپلاس، مسائل مقدار مرزی در دامنه‌ی $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ است که آن را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Delta u = f \qquad in \;\; \Omega$$

که شرایط همراه با آن روی مرز $\partial\Omega$ دامنه‌ی Ω به یکی از صورت‌های زیر داده می‌شوند:

$$u|_{\partial\Omega} = h \quad , \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = h \quad , \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} + au\right)|_{\partial\Omega} = h$$

به‌طوری‌که n بردار نرمال برون‌سوی این مرز است[۴].

۲.۱ تابع گرین

معادلات دیفرانسیل خطی همگن را با استفاده از تبدیل‌های فوریه و لاپلاس می‌توان حل نمود. برای حل معادلات دیفرانسیل (معمولی و جزیی) غیرهمگن می‌توان از یک تبدیل انتگرالی که توسط تابعی به نام تابع گرین تعریف می‌شود، استفاده نمود. به عبارت دیگر اگر برای یک معادله دیفرانسیل غیرهمگن تابع گرین آن را بدانیم به‌راحتی می‌توانیم آن معادله دیفرانسیل را با یک تبدیل انتگرالی حل نماییم.

برای روشن شدن موضوع یک معادله دیفرانسیل را به‌صورت کلی زیر در نظر بگیرید:

$$Lu(x) = f(x) \tag{۱-۱}$$

در این رابطه L یک عملگر دیفرانسیلی خطی است که بر تابع $u(x)$ عمل می‌کند و $f(x)$ یک تابع معلوم در طرف دوم معادله‌ی غیرهمگن می‌باشد. بنابراین هدف یافتن $u(x)$ است به‌طوری‌که در معادله دیفرانسیل (۱-۱) صدق کند. برای حل معادله (۱-۱) می‌توانیم بنویسیم:

$$u\left(x\right) = L^{-1} f\left(x\right) \tag{۲-۱}$$

که عملگر L^{-1} معکوس عملگر دیفرانسیلی L می‌باشد. می‌توان نتیجه گرفت:

$$L^{-1} L = I \tag{۳-۱}$$

که I عملگر همانی می‌باشد. اکنون عملگر معکوس انتگرالی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. در تبدیل معکوس عملگر لاپلاس از هسته‌ای مثل $G\left(x,s\right)$ استفاده می شود، در واقع

$$u\left(x\right) = L^{-1}\{f\} = \int\limits_{\Omega} G\left(x,s\right) f\left(s\right) ds$$

در این رابطه، هسته‌ی $G\left(x,s\right)$ تابع گرین متناظر با عملگر L نامیده می‌شود. توجه داریم که تابع $G\left(x,s\right)$ یک تابع دو متغیره از x و s است. s یک نقطه‌ی دلخواه روی دامنه‌ی تعریف تابع $u(x)$ است که انتگرال نسبت به آن گرفته می‌شود. اکنون به رابطه‌ی (۱-۳) توجه کنید. عملگر همانی در این رابطه با هسته‌ای به‌صورت تابع دلتای دیراک تعریف می‌گردد؛ زیرا همان‌طور که می‌دانیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x-s\right) f\left(s\right) ds = f\left(x\right) \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(s\right) ds = 1 \tag{۴-۱}$$

با جایگزینی عملگرها در رابطه‌ی (۱-۳) می‌توان نتیجه گرفت که کافیست داشته باشیم:

$$LG\left(x,s\right) = \delta\left(x-s\right) \tag{۵-۱}$$

اکنون جواب معادله (۱-۲) را می‌توان از رابطه‌ی (۱-۵) به‌دست آورد:

$$u\left(x\right) = \int_{-\infty}^{\infty} G\left(x,s\right) f\left(s\right) ds$$

زیرا

$$Lu\left(x\right)=L\int_{-\infty}^{\infty}G\left(x,s\right)f\left(s\right)ds=\int_{-\infty}^{\infty}LG\left(x,s\right)f\left(s\right)ds=\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(x-s\right)f\left(s\right)ds=f\left(x\right)$$

باید دقت کرد که تابع گرین در معادله‌ی (۱-۱) صدق نمی‌کند بلکه این تابع در معادله (۱-۵) صدق می‌کند[۷].

فرض کنید Ω یک میدان در $\mathbb{R}^2$ با مرز $\partial\Omega$ و Δ مانند قبل عملگر لاپلاس در $\mathbb{R}^2$ باشد.

تعریف ۱.۲.۱ تابع $G\left(x,y;\xi,\eta\right)$ را تابع گرین معادله لاپلاس روی Ω برای مسئله‌ی دیریکله گویند اگر

$$\begin{cases} \Delta G=\delta\left(x-\xi,y-\eta\right) & in \quad \Omega \\ G\left(x,y\right)=0 & x,y\in\partial\Omega \end{cases}$$

می‌توان تابع گرین G را بدین صورت تفسیر کرد که میدان مغناطیسی‌ای را نشان می‌دهد که در اثر وجود یک منبع واحد در نقطه‌ی $\left(\xi,\eta\right)$ به‌دست آمده است بنابراین می‌توان انتظار داشت که این تابع متقارن باشد، یعنی اگر میدان در اثر قرار گرفتن یک منبع واحد در نقطه‌ی $\left(x,y\right)$ به‌دست بیاید، مقدار تابع در نقطه‌ی $\left(\xi,\eta\right)$ برابر مقدار قبل است.

قضیه ۲.۲.۱ اگر $\phi\left(x,y;\xi,\eta\right)$ یک جواب معادله‌ی

$$\Delta\phi=\phi_{xx}+\phi_{yy}=\delta\left(x-\xi,y-\eta\right)\qquad\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 \tag{۱-۶}$$

برای نقطه ثابت $\left(\xi,\eta\right)\in\mathbb{R}^2$ و تابع $\psi\left(x,y\right)$ جواب مسئله‌ی همگن

$$\Delta\psi=0\qquad in\ \ \Omega\ \ ,\quad \psi=\phi\quad on\ \ \partial\Omega \tag{۱-۷}$$

باشد آنگاه $G=\phi-\psi$ تابع گرین مسئله‌ی دیریکله روی Ω است.

تذکر ۳.۲.۱ از آن جا که تابع گرین مسائل نیومن و روبین نیز مشابه مسئله‌ی دیریکله و تنها با تغییر نوع شرط مرزی مربوط تعریف می‌شود، قضیه‌ای مشابه قضیه فوق برای مسائل نیومن و روبین نیز برقرار است.

برای پیدا کردن تابع ϕ با توجه به این که تابع متقارن و تنها وابسته به

$$r=\left(\left(x-\xi\right)^2+\left(y-\eta\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

است، یعنی $\phi\left(x,y;\xi,\eta\right)=\varphi\left(r\right)$. معادله (۱-۶) تبدیل می‌شود به

$$\Delta\phi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=\delta\left(r\right)$$

برای $r\neq 0$ جواب این معادله به‌صورت $\varphi\left(r\right)=a+b\,\ln\,r$ به‌دست می‌آید. برای برقراری تساوی در $r=0$ از تساوی (۱-۷) استفاده می‌کنیم.

به این منظور مرز گوی B_ϵ به شعاع ϵ و به مرکز $r=0$ را در نظر می‌گیریم و با ∂B_ε نشان می‌دهیم. در این‌صورت بنابر قضیه دیورژانس داریم:

$$1=\int\!\!\int_{B_\varepsilon}\delta\left(x-\xi,y-\eta\right)dxdy=\int\!\!\int_{B_\varepsilon}\Delta\phi\;dxdy=\oint_{\partial B_\varepsilon}\frac{\partial\phi}{\partial n}\,dS=$$

$$\int_{\partial B_\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,dS=\int_0^{2\pi}\frac{b}{r}r\,d\theta=2\pi b$$

پس $b=\frac{1}{2\pi}$ بوده و مقدار a اختیاری است. برای سادگی امر $a=0$ را در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\phi\left(x,y;\xi,\eta\right)=\frac{1}{2\pi}\,\ln\,r\qquad,\qquad r=\left(\left(x-\xi\right)^2+\left(y-\eta\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

[۱۹].

۳.۱ جواب‌های بنیادی

معادلات دیفرانسیل روی همه فضای $\mathbb{R}^n$ (یعنی با $\Omega=\mathbb{R}^n$) را در نظر می‌گیریم. یک روش قوی برای مطالعه این معادلات، براساس جواب‌های بنیادی آن‌ها پایه‌گذاری شده است.

تعریف ۱.۳.۱ یک تابع آزمون $\omega\left(x\right)=\omega\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ تابعی است به‌طوری‌که بینهایت بار روی $\mathbb{R}^n$ دیفرانسیل‌پذیر باشد (بدین معنی که تمام مشتقات جزئی برای همه‌ی مرتبه‌های آن موجود باشند) و خارج از یک همسایگی مبدا صفر شود و در واقع محمل آن فشرده باشد، (که ممکن است از یک تابع آزمون به تابع آزمون دیگر متفاوت باشد). فضای همه توابع آزمون روی $\mathbb{R}^n$ را با $C_0^\infty(\Omega)$ نمایش می‌دهیم که فضایی از توابع دیفرانسیل‌پذیر با محمل‌های فشرده می‌باشد.

تعریف ۲.۳.۱ توزیع U جوابی از معادله دیفرانسیل $L[U] = f \ (x \in \Omega)$ روی Ω است، هرگاه به ازاء هر $\omega \in C_0^\infty(\Omega)$ داشته باشیم:

$$\langle U, L^*\omega\rangle = \langle f, \omega\rangle \tag{۱-۸}$$

که $\langle .,.\rangle$ ضرب داخلی توابع و همچنین L^* عملگر الحاقی L است.

تعریف ۳.۳.۱ یک جواب بنیادی برای عملگر L با قطب در ξ یک جواب معادله‌ی

$$L[U] = \delta_\xi(x) = \delta(x-\xi) \tag{۱-۹}$$

است، که ξ معمولا یک پارامتر در نظر گرفته می‌شود.

تذکر ۴.۳.۱ معادله (۱-۸) برحسب توزیع‌ها تفسیر شده است. جواب معادله فوق را به‌صورت $\varphi(x,\xi)$ در نظر می‌گیریم که یک توزیع نسبت به x است وξ پارامتر مربوطه می‌باشد. اغلب φ متناظر با یک تابع انتگرال‌پذیر موضعی برحسب x است که بنابر رابطه‌ی (۱-۸) φ در رابطه‌ی (۱-۹) صدق می‌کند اگر و تنها اگر برای هر تابع آزمونω در $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ داشته باشیم:

$$\langle \varphi, L^*\omega\rangle = \omega(\xi) \tag{۱-۱۰}$$

تذکر ۵.۳.۱ معادله (۱-۸) معمولا دارای جواب‌های متفاوت از یکدیگر تا حد یک جواب از معادله‌ی همگن است. این مسائل را می‌توان به عنوان مسائلی در یک فضای هندسی همسانگرد [۱] تفسیر کرد و اغلب یک جواب خاص را براساس تقارن و رفتار در بینهایت آن انتخاب می‌کنیم.

تذکر ۶.۳.۱ اگر L دارای ضرایب ثابت باشد، کافیست جواب بنیادی را با قطب در صفر (یعنی $\varphi(x,0)$) را بیابیم و سپس جواب به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\varphi(x,\xi) = \varphi(x-\xi, 0)$$

به‌علاوه جواب بنیادی $\varphi(x,0)$ را می‌توان به‌صورت $\varphi(x)$ نیز نشان داد.

[۱] کمیتی را همسانگرد ($Isotrop$) می‌نامیم که اندازه‌گیری آن در هر جهت فضایی به نتیجه‌ای یکسان منجر شود. یعنی اگر آن کمیت را رو به سمت خاصی از فضا اندازه‌گیری کنیم، همان نتیجه‌ای را بگیریم که همان خاصیت را رو به سمت دیگری اندازه گرفته باشیم. به زبان فنی‌تر (به زبان نظریه گروه‌ها)، یک خاصیت همسانگرد نسبت به گروه دوران‌های فضایی تقارن دارد.

یک جواب بنیادی شامل دو قسمت است: ابتدا توجه خود را متمرکز بر استناد های شهودی از یک نامزد احتمالی کرده و سپس رابطه‌ی (۱-۹) را در مورد این نامزد احتمالی بررسی می‌کنیم. مرحله‌ی اول می‌تواند شامل دو قسمت باشد:

الف) حل معادله‌ی همگن برای $x \neq \xi$ با رعایت حالات فیزیکی آن

ب) تکینگی در تابع سمت راست در $x = \xi$ را با انتگرال‌گیری از معادله (۱-۹) نزدیک نقطه $x = \xi$ مدنظر قرار می‌دهیم.

کار را با یک مثال ادامه می‌دهیم:

مثال ۷.۳.۱ تابع انتگرال‌پذیر موضعی $f\left(x\right) = \dfrac{1}{|x|}$ روی $\mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید. مشاهده می‌کنیم که این تابع در مبدا به مفهوم کلاسیک دیفرانسیل‌پذیر نیست، لاپلاسین f را به مفهوم توزیعی آن محاسبه می‌کنیم.

حل: با توجه به رابطه‌ی

$$\langle Lf, \omega \rangle = \langle f, L^* \omega \rangle$$

داریم:

$$\left\langle \Delta \frac{1}{|x|}, \omega \right\rangle = \left\langle \frac{1}{|x|}, \Delta \omega \right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta \omega}{|x|}\, dx$$

این انتگرال همگراست زیرا تکینگی تابع $f\left(x\right) = \dfrac{1}{|x|}$ در مبدا ضعیف است. بنابراین داریم:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta \omega}{|x|}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\Delta \omega}{|x|}\, dx$$

برای محاسبه این انتگرال با استفاده از قضیه گرین و این نکته که ω در خارج از یک ناحیه‌ی فشرده متحد صفر است، داریم:

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\Delta \omega}{|x|}\, dx = \int_{|x| > \varepsilon} \omega \Delta \left(\frac{1}{|x|}\right) dx + \int_{|x| = \varepsilon} \left[\frac{1}{|x|} \frac{\partial \omega}{\partial n} - \omega \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|x|}\right)\right] dS$$

که در آن n بردار قائم برون سوی در دامنه $|x| > \varepsilon$ است. اگر مرز $|x| = r$ باشد آنگاه داریم $\frac{\partial}{\partial n} = -\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)$ و با استفاده از این نکته که $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ برای $r \neq 0$ داریم:

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\Delta\omega}{|x|}\, dx = -\oint_{|x|=\varepsilon} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r} + \frac{\omega}{r^2}\right) dS$$

با توجه به این که مشتق یک تابع آزمون روی $|x| = \varepsilon$ تابعی کراندار است، یعنی $M > 0$ موجود است که برای هر x که $|x| = \varepsilon$ داریم:

$$\left|\frac{\partial\omega}{\partial r}\right| < M$$

در نتیجه

$$\left|\int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}\, dS\right| \leq \frac{M}{\varepsilon}\left(4\pi\varepsilon^2\right) = 4\pi\varepsilon M$$

در نتیجه وقتی $\varepsilon \to 0^+$، این انتگرال به صفر میل می‌کند. همچنین داریم:

$$\int_{|x|=\varepsilon} \frac{\omega}{r^2}\, dS = \int_{|x|=\varepsilon} \frac{\omega(0) + [\omega(x) - \omega(0)]}{r^2}\, dS = 4\pi\omega(0) + \int_{|x|=\varepsilon} \frac{\omega(x) - \omega(0)}{r^2}\, dS$$

ولی چون $\omega(x)$ در $x = 0$ پیوسته است، به سادگی می‌توان نشان داد که آخرین انتگرال به ازای $\varepsilon \to 0$ به صفر میل می‌کند، بنابراین داریم:

$$\left\langle \Delta\frac{1}{|x|}, \omega \right\rangle = -4\pi\omega(0)$$

در نتیجه به مفهوم توزیعی داریم:

$$\Delta\frac{1}{|x|} = -4\pi\delta(0).$$

تعریف ۸.۳.۱ گوییم φ' در ξ یک پرش واحد دارد اگر φ در ξ پیوسته باشد و

$$\varphi'(\xi_+, \xi) - \varphi'(\xi_-, \xi) = -1$$

و همچنین اگر φ و φ' در ξ پیوسته باشد و

$$\varphi''(\xi_+, \xi) - \varphi''(\xi_-, \xi) = -1$$

آنگاه گوییم φ'' در ξ یک پرش واحد دارد، و به همین ترتیب... .

مثال ۹.۳.۱ یک جواب بنیادی را برای عملگر $-\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)+q^2$ بیابید.

حل: باید تابع $\varphi\left(x\right)$ را طوری بیابیم که

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2}+q^2\varphi=\delta\left(x\right)\qquad\qquad -\infty<x<\infty$$

بنا به تعریف (۸.۳.۱) φ در $x=0$ پرش واحد دارد پس در این نقطه پیوسته است و همچنین

$$\varphi'\left(0_+,0\right)-\varphi'\left(0_-,0\right)=-1$$

است. اگر φ نشان دهنده تراکم در یک ناحیه‌ی جاذب باشد می‌خواهیم که φ در $|x|=\infty$ به صفر برسد که منجر می‌شود به این که

$$\varphi\left(x\right)=\frac{e^{-q|x|}}{2q}\qquad,\qquad\varphi\left(x,\xi\right)=\frac{e^{-q|x-\xi|}}{2q}$$

حال بررسی می‌کنیم که $\varphi\left(x\right)$ یک جواب بنیادی این معادله با قطب در صفر است، همچنین می‌توان رابطه‌ی (۱-۱۰) را نیز ثابت کرد:

$$\langle\varphi,L^*\omega\rangle=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{qx}}{2q}L^*\omega\,dx+\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-qx}}{2q}L^*\omega\,dx$$

باز هم با استفاده از قضیه‌ی گرین در هر کدام از بازه‌ها همانند مثال قبل می‌توان ثابت کنیم که برای هر ω در $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^1\right)$ داریم:

$$\langle\varphi,L^*\omega\rangle=\omega\left(0\right)$$

مثال ۱۰.۳.۱ یک عملگر دیفرانسیل معمولی کلی L از مرتبه p را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم $\varphi\left(t,\tau\right)$ یک جواب بنیادی عملگر L باشد، به‌طوری‌که اگر $t<\tau$ جواب صفر می‌شود(با توجه به تعریف دلتای کرونکر). داریم:

$$L\varphi=a_p\frac{d^p\varphi}{dt^p}+...+a_1\frac{d\varphi}{dt}+a_0\varphi=\delta\left(t-\tau\right)\qquad,\qquad-\infty<t,\tau<\infty\qquad(۱۱\text{-}۱)$$

با روند مستقیم، برای هر $t>\tau$ داریم $\varphi\equiv 0$ و $\varphi,\varphi',...,\varphi^{(p-2)}$ در $t=\tau$ پیوسته‌اند(بنابراین همگی در τ_+ صفر می‌شوند)، بنابر تعریف (۸.۳.۱) $a_p\varphi^{(p-1)}$ نقطه پرش واحد است پس

$$\varphi^{(p-1)}\left(\tau_+,\tau\right)=\frac{1}{a_p\left(\tau\right)}$$

آخرین رابطه با انتگرال‌گیری از معادله (۱-۱۱) در محدوده τ_- و τ_+ حاصل می‌شود. بنابراین باید برای $t > \tau$، $\varphi(t,\tau)$ منطبق بر جواب $u_\tau(t)$ از مسئله مقدار اولیه زیر باشد:

$$Lu_\tau(t) = 0 \quad , \quad u_\tau(\tau) = u'_\tau(\tau) = ... = u_\tau^{(p-2)}(\tau) = 0 \quad , \quad u_\tau^{(p-1)}(\tau) = \frac{1}{a_p(\tau)}$$
(۱-۱۲)

زیرا با توجه به قضیه وجود و یکتایی مسئله‌ی (۱-۱۲) برای هر شرط اولیه دارای دقیقا یک جواب است، پس قرار می‌دهیم:

$$\varphi(t,\tau) = H(t-\tau)\, u_\tau(t) \tag{۱-۱۳}$$

که در آن H تابع هوی ساید است، که به‌صورت $H(t-\tau) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \tau \\ 1 & \tau < x < \infty \end{cases}$ تعریف می‌شود. حال تابع فوق را در رابطه‌ی (۱-۱۰) به ازای $x = t$ و $\xi = \tau$ قرار می‌دهیم و داریم:

$$\langle \varphi, L^*\omega \rangle = \int_\tau^\infty u_\tau(t) L^*\omega \, dt$$

حال با استفاده از فرمول زیر(که در آن تساوی $\nu Lu - uL^*\nu = \frac{d}{dx} J(u,\nu)$ به‌عنوان اتحاد لاگرانژ شناخته می‌شود.) فرمول گرین را داریم:

$$\int_a^b (\nu Lu - uL^*\nu)\, dx = J(u,\nu)]_a^b$$

که در آن:

$$J(u,\nu) = \sum_{m=1}^{p} \sum_{j+k=m-1} (-1)^k D^k (a_m \nu) D^j u \quad , \quad D = \frac{d}{dx} \tag{۱-۱۴}$$

و داریم:

$$\langle \varphi, L^*\omega \rangle = \int_\tau^\infty \omega L u_\tau(t)\; dt = J(u_\tau, \omega)]_{t=\tau}^{t=\infty}$$

چون $Lu_\tau = 0$ پس انتگرال صفر می‌شود، در واقع بنا به تعریف (۱.۳.۱) در خارج از بازه‌ی کرانداری $\omega \equiv 0$ است، این حقیقت را نشان می‌دهد که در حد بالایی $t = \infty$، J برابر صفر است.

حال حد پایینی $t=\tau$ برای J را مورد بررسی قرار می‌دهیم. تمام جملات مشتق u_τ از مرتبه‌های $p-2$ و پایین‌تر با توجه به مسئله‌ی (۱-۱۲) صفر شده‌اند و بنا به فرمول (۱-۱۴) فقط یک جمله به ازای $j=p-1$ ، $k=0$ و $m=p$ باقی می‌ماند. بنابراین به ازای $t=\tau$ داریم:

$$J\left(u_\tau,\omega\right)=u_\tau^{(p-1)}\left(\tau\right)a_p\left(\tau\right)\omega\left(\tau\right)=\omega\left(\tau\right)$$

و به‌دست می‌آوریم:

$$\left\langle\varphi,L^*\omega\right\rangle=\omega\left(\tau\right)$$

که سبب حذف همه توزیع‌ها از جواب بنیادی شده است. اگر تمام ضرائب در مسئله‌ی مقدار اولیه (۱-۱۲) را ثابت در نظر بگیریم، داریم:

$$u_\tau\left(t\right)=\nu\left(t-\tau\right)$$

به‌طوری‌که $\nu(t)$ جواب مسئله مقدار اولیه (۱-۱۲) در $\tau=0$ باشد که تناظر ساده‌ای با رابطه‌ی (۱-۱۳) وجود دارد[۱۱].

حال تعریفی دیگر از جواب بنیادی را در نظر می‌گیریم:

تعریف ۱.۳.۱۱ یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی n ام همگن را به‌شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$L\left[y\right]\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}f_k\left(x\right)y_x^{(k)}\left(x\right)=0\qquad\left(a<x<b\right),\tag{۱-۱۵}$$

به‌طوری‌که هر $f_k\left(x\right)$ در بازه‌ی $\left(a<x<b\right)$ پیوسته بوده و $f_n\left(x\right)\neq0$ باشد. یک جواب بنیادی از معادله دیفرانسیل (۱-۱۵) یک تابع دو متغیره $G\left(x,\xi\right)$ روی $a\le x,\xi\le b$ است که دارای خواص زیر می‌باشد:

الف) در دو حالت $a\le x<\xi\le b$ و $a\le\xi<x\le b$ تابع $G\left(x,\xi\right)$ دارای مشتقات جزئی نسبت به x از مرتبه کوچکتر یا مساوی n بوده و این مشتقات نسبت به x و ξ در هر دو حالت فوق پیوسته هستند.

ب) $G\left(x,\xi\right)$ به‌عنوان یک تابع از x در هر کدام از حالات فوق در معادله‌ی (۱-۱۵) صدق می‌کند.

ج) تابع $G\left(x,\xi\right)$ پیوسته در کل مربع $a\le x,\xi\le b$ و پاره‌ای مشتق‌پذیر نسبت به x تا مرتبه‌ی $(n-2)$ بوده و روی این مربع، مشتقات نسبت به x و ξ پیوسته هستند،

و به‌علاوه:

$$\left.\frac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi+0}-\left.\frac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi-0}=\frac{1}{f_n\left(\xi\right)},$$

می‌توان ثابت کرد که با برقراری شرایط فوق جواب بنیادی همواره موجود است.

به‌طور مثال مجموعه $\{y_1\left(x\right),\cdots,y_n\left(x\right)\}$ را که جواب‌های مستقل خطی معادله همگن فوق می‌باشند، در نظر گرفته و تعریف می‌کنیم:

$$G\left(x,\xi\right)=\frac{sgn\left(x-\xi\right)}{2f_n\left(\xi\right)\omega\left(\xi\right)}\begin{vmatrix} y_1\left(\xi\right) & \cdots & y_n\left(\xi\right) \\ y_1'\left(\xi\right) & \cdots & y_n'\left(\xi\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}\left(\xi\right) & \cdots & y_n^{(n-2)}\left(\xi\right) \\ y_1\left(x\right) & \cdots & y_n\left(x\right) \end{vmatrix}$$

که در آن

$$\omega\left(x\right)=\begin{vmatrix} y_1\left(x\right) & \cdots & y_n\left(x\right) \\ y_1'\left(x\right) & \cdots & y_n'\left(x\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}\left(x\right) & \cdots & y_n^{(n-2)}\left(x\right) \\ y_1^{(n-1)}\left(x\right) & \cdots & y_n^{(n-1)}\left(x\right) \end{vmatrix}$$

در این صورت $G\left(x,\mu\right)$ جواب بنیادی معادله‌ی (۱-۱۵) می‌باشد و همچنین این جواب بنیادی دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد:

$$G\left(\xi,\xi\right)=G_\xi'\left(\xi,\xi\right)=\cdots=G_x^{(n-2)}\left(\xi,\xi\right)=0$$

مجموعه جواب‌های بنیادی را می‌توان با حاصل جمع زیر نیز نمایش داد:

$$G\left(x,\xi\right)+c_1\left(\xi\right)y_1\left(x\right)+...+c_n\left(\xi\right)y_n\left(x\right)$$

به‌طوری‌که c_k ها $k=1,...,n$ توابع پیوسته دلخواه باشند[۱۰] .

فصل ۲

روش جواب‌های بنیادی و روش دوگان معکوس