دانشگاه پیام نور مرکز مشهد

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی محض

عنوان پایان نامه

بررسی قضایای نقطه ثابت و تقریب نقطه ثابت برای نگاشتهای واقع در رده $A(T, \alpha)$

مولف:

اعظم کیانی نوزاده

استاد راهنما :

سرکار خانم دکتر ثریا طالبی

زمستان ١٣٨٥

تاریخ ۸۵/۱۰/۱۴
شماره ۸۵/۱۰/۱۹/۲۵۶۷
پیوست ....

دانشگاه پیام نور
مرکز مشهد

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم و تحقیقات و فناوری

بسمه تعالی

تصویب نامه پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان: بررسی قضایای نقطه ثابت و تقریب نقطه ثابت درنگاشتهای واقع دررده A(T,@)

که توسط اعظم کیانی نوزاده هیئت داوران ارائه گردیده است مورد تائید می باشد.

تاریخ دفاع: ۸۵/۱۰/۱۴ نمره: ~~عالی~~ ۱۹/۵ نوزده و نیم درجه ارزشیابی: عالی

اعضای هیئت داوران:

نام ونام خانوادگی	هیئت داوران	مرتبه علمی	امضاء
	استادراهنما:دکتر ثریا طالبی	استادیار	
	استادرهنمای همکار یا مشاور		
	استاد ممتحن: دکتر شیرین حجازیان	دانشیار	
	نماینده گروه آموزشی:دکتر علی جلیلیان عطار	استادیار	

اقدام کننده:تحصیلات تکمیلی

مشهد – صندوق پستی ۴۳۳-۹۱۷۳۵ ، تلفن ۵-۶۸۰۹۰۴

به نام خدا

تقدیم به

پدر ومادر عزیزم که برایم الگویی ازایمان به خدا وایثار، عطوفت و مهرند .

و همسر مهربانم که مرا در تحصیل علم ونوشتن این پایان نامه یاری زیادی فرمودند.

و همه کسانی که صادقانه و با تمام وجود در امر تعلیم وتربیت من تلاش کردند بخصوص استاد ارجمندم جناب آقای فلکی

چکیده

فرض کنیم X زیر مجموعه ای از فضای E و $f: X \to E$ یک نگاشت باشد در حالت کلی قضایای نقطه ثابت روی سه مؤلفه مجموعه X ، فضا E و نگاشت f تغییر می کنند. ابتدا قضایایی که تغییرات آنها وابسته به مؤلفه فضا می‌باشد را مورد بررسی قرار می دهیم . در قرن ۱۹ مقالات زیادی به این موضوع که زیر مجموعه های محدب و بسته یک فضا با بعد متناهی دارای خاصیت نقطه ثابت هستند ، پرداختند. در فصل دوم قضایایی رابیان می کنیم که طبق آنها زیر مجموعه های محدب وبسته فضاهای با بعد نامتناهی نیز دارای خاصیت نقطه ثابت هستند. سپس به بررسی قضایای نقطه ثابت که روی مؤلفه نگاشت تغییر کرده پرداخته و قضیه نقطه ثابت باناخ را به خود نگاشتهایی که پیوسته نیستند تعمیم می دهیم . سپس توابعی را معرفی می کنیم که غیر خود نگاشتند ولی دارای نقطه ثابت هستند. در فصل سوم توابع اینفیموم مطلق منظم را معرفی کرده و به بررسی قضایای نقطه ثابت با استفاده از توابع اینفیموم مطلق منظم می پردازیم. در فصل چهارم ابتدا به بررسی قضایای مربوط به نقطه ثابت مشترک دو خود نگاشت پرداخته و سپس به تقریب نقاط ثابت برای نگاشتهای واقع در رده $A(T,\alpha)$ می پردازیم .

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمات

۱.۰.۱ تعریف

فرض کنیم که X یک مجموعه غیر تهی باشد. در اینصورت هر تابع مانند $d : X \times X \to R$ را که واجد سه خاصیت زیر باشد ، یک متریک در مجموعه X می گوییم.

۱) برای هر $x, y \in X$ و $d(x,y) \geq 0$ وتساوی برقرار است اگر وتنها اگر $x = y$;

۲) برای هر $x, y \in X$ و $d(x,y) = d(x,y)$

۳) برای هر $x, y, z \in X$ ، $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

معمولاً، $d(x,y)$ را فاصله x و y می گویند ; و اصل موضوع ۳ را نامساوی مثلث می نامند.

تبصره: فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد.در اینصورت به ازای هر $x, y, z \in X$ داریم $|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z)$.

۲.۰.۱ تعریف

فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد. و A و B زیر مجموعه‌های غیر تهی از X باشند.همچنین فرض می کنیم $x \in X$.در اینصورت فاصله x از A ، عبارت است از $d(x,A) = \inf\{d(x,y) \mid y \in A\}$.

به علاوه ، فاصله A و B ، که با $d(A,B)$ نشان داده می شود ، برابراست با

$d(A,B) = \inf\{d(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$.

۳.۰.۱ قضیه

فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد. به علاوه $x \in X$ و A زیر مجموعه غیر تهی از X باشد.

در اینصورت $d(x,A) = 0$ اگر وتنها اگر $x \in \overline{A}$.

اثبات: رجوع شود به [۳۳]

۴.۰.۱ تعریف

فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک و A زیر مجموعه غیر تهی از X باشد.در اینصورت قطر A که آن را با $diam(A)$ نشان می دهیم ، عبارت است از $diam(A) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\}$.

۵.۰.۱ تعریف

فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد، $A \neq \varphi$ زیر مجموعه ای از X باشد. در اینصورت A را کراندار می گوییم اگر وفقط اگر $diam(A) < \infty$ است.

۶.۰.۱ قضیه

فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد، $A \neq \varphi$ زیر مجموعه ای از X باشد.در اینصورت

۱) $x \in \overline{A}$ اگر وتنها اگر برای هر عدد مثبت مانند ε ، $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \varphi$

۲) $x \in \partial(A)$ اگر و تنهااگر برای هر عدد مثبت مانند ε ، $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \varphi$ و $B(x,\varepsilon) \cap (X-A) \neq \varphi$

اثبات: رجوع شود به [۳۳]

۷.۰.۱ قضیه

فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد، $x_\circ \in X$ و A زیر مجموعه ای از X باشد.در اینصورت گزارهای زیر باهم معادلند:

۱) $x_\circ \in \overline{A}$

۲) دنبا له‌ای مانند $\{x_n\}$ در A وجود دارد بطوریکه $x_n \to x_\circ$.

اثبات: رجوع شود به [۳۳]

۸.۰.۱ تعریف

فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک ، و $\{x_n\}$ دنبا له‌ای از نقاط X باشد. در اینصورت $\{x_n\}$ را یک دنبا له کشی می گوییم در صورتی که به ازای هر عدد مثبت مانند ε ، عدد طبیعی مانند N موجود باشد بطوریکه به ازای هر دو عدد طبیعی n و m که $n \geq N$ و $m \geq N$، $d(x_m,x_n) < \varepsilon$.

۹.۰.۱ تعریف

فضای متریک (X,d) را کامل می گوییم در صورتی که هر دنبا له کشی در (X,d) همگرا باشد.

۱۰.۰.۱ قضیه

فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک ، وY زیر مجموعه غیر تهی از X باشد . در اینصورت اگر (Y,d_Y) کامل باشد آنگاه Y در فضای (X,d) بسته است.

اثبات: رجوع شود به [۳۳]

۱۱.۰.۱ قضیه

فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک کامل ، وY زیر مجموعه غیر تهی از X باشد . در اینصورت اگر Y در فضای (X,d) بسته باشد آنگاه (Y,d_Y) کامل است.

اثبات: رجوع شود به [۳۳]

۱۲.۰.۱ قضیه اشتراک کانتور

اگر(X,d) یک فضای متریک کامل و $\{F_n\}_{n\in N}$ یک دنباله نزولی از زیر مجموعه های غیر تهی وبسته از X باشد بطوریکه $diam(F_n) \to 0$ آنگاه $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ فقط از یک عنصر تشکیل شده است.

اثبات: رجوع شود به [۳۲]

۱۳.۰.۱ تعریف

فرض کنید (X,d) و (Y,ι) دو فضای متریک باشند، وتابع $f : X \to Y$ و $x \in X$. در اینصورت f را در x پیوسته گوییم هرگاه به ازای هر مجموعه باز شامل $f(x)$ مانند V ، مجموعه بازی مانند U شامل x وجود داشته باشد به طوریکه $f(U) \subseteq V$.

۱۴.۰.۱ قضیه

فرض کنید X و Y دو فضای دلخواه باشند و $f : X \to Y$ یک تابع باشد در اینصورت f پیوسته است اگر وفقط اگر به ازای هر زیر مجموعه[۴] X مانند A، $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

اثبات: رجوع شود به [۳۳]

۱۵.۰.۱ قضیه

فرض کنید (X,d) و (Y,ι) دو فضای متریک باشند، و $f : X \to Y$ مفروض باشد. در اینصورت f را پیوسته گوییم هرگاه به ازای هر x از X وهر عدد مثبت مانند ε ، عدد مثبتی مانند $\delta > 0$ موجود باشد بطوریکه به ازای هر $x, y \in X$ که $d(x,y) < \delta$ ، $\iota(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

اثبات: رجوع شود به [۳۳]

۱۶.۰.۱ قضیه

فرض کنید (X,d) و (Y,ι) دو فضای متریک باشند، و $f : X \to Y$ مفروض باشد. در اینصورت f را پیوسته گوییم اگر وتنها اگر به ازای هر دنباله همگرا از نقاط X مانند $\{x_n\}$ که $x_n \to x$ ، دنباله $\{f(x_n)\}$ همگرا به $f(x)$ باشد.

اثبات: رجوع شود به [۳۳]

۱۷.۰.۱ تعریف

فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان C باشد X را یک فضای نرمدار نامیم هرگاه تابعی مانند $||\ || : X \to R$ موجود باشد بطوریکه

۱) $||x|| = \circ$ اگر وفقط اگر $x = \circ$

۲) برای هر $x \in X$ و $\alpha \in C$ ، $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$

۳) برای هر $x, y \in X$ ، $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

تبصره: هر فضای نرمدار X با متریک تعریف شده بصورت $(x, y \in X) \quad d(x, y) = ||x - y||$ یک فضای متریک است.

فضای نرمدار X باناخ نامیده می شود هرگاه با متر تعریف شده بوسیله نرم خود کامل باشد.

۱۸.۰.۱ تعریف

فرض کنید X یک فضای نرمدار و A یک زیر مجموعه غیز تهی از X باشد. در اینصورت A محدب نامیده می شود هرگاه برای هر $x, y \in A$ و هر $\circ \leq t \leq \text{۱}$ ، داشته باشیم $tx + (\text{۱} - t)y \in A$.

۱۹.۰.۱ تعریف

پوسته محدب مجموعه A در فضای برداری X عبارت است از مجموعه همه ترکیبات محدب A به عبارت دیگر $Convex(A) = \{\sum_{i=\text{۱}}^{n} t_i x_i : x_i \in A, \sum_{i=\text{۱}}^{n} t_i = \text{۱}, t_i \geq \circ\}$ که n دلخواه است. ثابت می شود پوسته محدب A عبارت است از همه زیر مجموعه های محدب X که شامل A هستند.

۲۰.۰.۱ قضیه

اگر X یک فضای نرمدار و C زیر مجموعه محدبی از X باشد آنگاه $\overline{C}$ نیز محدب است.

اثبات: رجوع شود به [۲۸]

۲۱.۰.۱ قضیه

فرض کنید $A_1, \cdots, A_n$ زیر مجموعه های محدب از یک فضای نرمدار باشند. در اینصورت $x \in conv(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$ اگر وفقط اگر

$$x = t_1 a_1 + \cdots + t_n a_n$$

که $a_i \in A_i$ و برای هر i ، $t_i \geq 0$ وهمچنین $\sum t_i = 1$.

اثبات: رجوع شود به [۲۸]

۲۲.۰.۱ تعریف

فرض کنیم X مجموعه ای و τ گردایه ای از زیر مجموعه های X باشد ، یعنی $\tau \subseteq P(X)$. τ را توپولوژی خوانیم در صورتی که تابع شرایط سه گانه ذیل باشد:

۱) $\varphi \in \tau$ و $X \in \tau$.

۲) همواره اگر $A, B \in \tau$ آنگاه $A \cap B \in \tau$

۳) به ازای هر زیر گردایه τ مانند A ، $\bigcup_{C \in A} C \in \tau$

اعضای τ را مجموعه های باز می نامیم.

۲۳.۰.۱ تعریف

فضای X را فشرده خوانیم هرگاه هر پوشش باز X دارای زیر پوشش متناهی باشد. به عبارت دیگر، هرگاه C پوشش باز دلخواهی برای X باشد آنگاه C اعضایی مانند $C_1, \cdots, C_n$ داشته باشد بطوریکه $X \subseteq C_1 \cup \cdots \cup C_n$

۲۴.۰.۱ تعریف

گردایه‌ای مانند B از زیر مجموعه های X در شرط مقطع متناهی صدق می کند در صورتی که مقطع هر زیر گردایهٔ متناهی از آن غیر تهی باشد . به عبارت دیگر هرگاه $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ یک زیر گردایهٔ متناهی ودلخواه B باشد آنگاه $\cap_{i=1}^{n} A_i \neq \phi$.

۲۵.۰.۱ قضیه

فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد . در این صورت دو گزاره زیر با هم معادلند

۱) X فشرده است .

۲) اگر $\{F_i\}_{i\in I}$ خانواده ای از زیر مجموعه های بستهٔ X باشد که در شرط مقطع متناهی صدق کند آنگاه $\cap_{i\in I} F_i \neq \phi$.

اثبات: رجوع شود به [۳۳]

۲۶.۰.۱ تعریف

فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک و ε عدد مثبت دلخواهی باشد. مجموعه $A \subseteq X$ را یک ε—تور (X,d) خوانیم در صورتی که به ازای هر $x \in X$ نقطه ای از A مانند a باشد به طوری که $d(x,a) < \varepsilon$ هرگاه A متناهی باشد A راε—تورمتناهی (X,d) می نامیم.

۲۷.۰.۱ تعریف

فضای متریک (X,d) را کلاً کراندار خوانیم در صورتی که به ازای هر عدد مثبت مانند ε ، یک ε—تور متناهی موجود باشد.

۲۸.۰.۱ قضیه

هر فضای متریک فشرده مانند X کلاً کراندار است.

اثبات: رجوع شود به [۳۳]

۲۹.۰.۱ قضیه

هر فضای متریک فشرده کامل وکراندار است.

اثبات: رجوع شود به [۳۳]

۳۰.۰.۱ تعریف

فضای توپولوژیک X را T_2 یا هاسدورف نامیم در صورتی که به ازای هر دو نقطهٔ مختلف $x,y \in X$ دو همسایگی مانند U و V به ترتیب از x و y موجود باشند بطوریکه $U \cap V = \varphi$.

فصل ۲

بررسی قضایای خود نگاشت

۱.۲ تعمیم قضیه‌شودر

۱.۱.۲ تعریف

فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هاسدورف و f یک نگاشت از X به توی X یا از یک زیر مجموعه X به توی X باشد . نقطه $x \in X$ برای f نقطه ثابت نامیده می شود اگر $f(x) = x$. مجموعه همه نقاط ثابت f را با $Fix(f)$ نمایش داده می شود.

۲.۱.۲ تعریف

فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هاسدورف باشد . فضای X یک فضای نقطه ثابت نامیده می شود هرگاه هر نگاشت پیوسته $f : X \to X$ دارای نقطه ثابت باشد.

۳.۱.۲ مثال

محور اعداد حقیقی فضای نقطه ثابت نیست زیرا تبدیل $x \to x + 1$ نقطه ثابت ندارد.

قضیه‌براوئر بیان می کند که هر زیر مجموعه بسته و محدب از R^n دارای خاصیت نقطه ثابت است بطور مثال یک بازه بسته کراندار $[a, b] \subset R$ یک فضای نقطه ثابت است.

لازم است ثابت کنیم که هر نگاشت پیوسته مانند $f : [a, b] \to [a, b]$ نقطه ثابت دارد.اگر $f(a) = a$ یا $f(b) = b$ انگاه حکم ثابت است.حال فرض کنیم $f(a) \neq a$ و $f(b) \neq b$ در اینصورت $f(a) > a$ و $f(b) < b$ نگاشت $g : [a, b] \to R$ تعریف شده به صورت $g(x) = f(x) - x$ یک تابع پیوسته است. از اینکه $g(a) = f(a) - a > 0$ و $g(b) = f(b) - b < 0$ داریم $g(b) < 0 < g(a)$.پس بنا به قضیه مقدار میانی $z \in (a, b)$ وجود دارد بطوریکه $g(z) = 0$. بنابراین z یک نقطه ثابت برای f است. □

در سال ۱۹۲۲ بیرخوف [1] وکلوگ [2] [۱۰] نشان دادند که زیر مجموعه های محدب وفشرده $C^n[0, 1]$ و $L^2[0, 1]$ دارای خاصیت نقطه ثابت هستند کاسیوپلی [3] [۱۵] نشان داد که‌زیر مجموعه های محدب وفشرده فضای $C[0, 1]$ نیز دارای خاصیت نقطه ثابت است. حال سئوالی در اینجا مطرح میشود این است که آیاهر زیر مجموعه بسته ومحدب فضاهای با بعد نامتناهی نیز دارای خاصیت نقطه ثابت است در قضایای بعدی نشان می دهیم که هر زیر مجموعه بسته ومحدب از یک فضای با نا خ با بعد نامتناهی نیز دارای خاصیت نقطه ثابت است .

---

[1] Birkhoff

[2] Kellog

[3] Cacciopoli

۴.۱.۲ تعریف.

فرض کنید $X \subseteq Y$ نگاشت $f : X \to Y$ را خود نگاشت نامیده می‌شود هرگاه $f(X) \subseteq X$.

قضیه زیر را شودر [۴] در سال ۱۹۲۷ اثبات کرد.

۵.۱.۲ قضیه

فرض کنید X زیر مجموعه E و $f : X \to E$ مفروض باشد بطوریکه

۱− X فشرده ومحدب باشد.

۲− E یک فضای با ناخ باشد .

۳− f یک خود نگاشت پیوسته باشد.

در اینصورت f دارای نقطه ثابت در X است.

اثبات: می توان فرض کرد $f : X \to X$ یک تابع پیوسته باشد و $\varepsilon > 0$ را ثابت در نظر می گیریم. نگاشت $g : X \to X$ را طوری می سازیم که تقریباً هر نقطه از X را ثابت نگه می دارد . چون X فشرده است بنابراین یک ε−تور متناهی $\{a_1, ..., a_n\}$ در E وجود دارد بطوریکه X را بپوشاند. برای هر $i \in \{1, .., n\}$ تابع زیر را تعریف می کنیم

$$m_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - |x - a_i| & |x - a_i| \le \varepsilon \\ 0 & |x - a_i| > \varepsilon \end{cases}$$

توجه کنید که برای هر $x \in X$، i ای وجود دارد بطوریکه $m_i(x)$ غیر صفر است. بنابراین تابع $g : X \to X$ بصورت

$$g(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i(x) a_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i(x)}$$

---

[۴] schauder

تعریف می کنیم. بنابراین برای هر $x \in X$ داریم

$$|g(x) - x| = |\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i(x)a_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i(x)} - x| = |\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i(x)(a_i - x)}{\sum_{i=1}^{n} m_i(x)}| \leq \varepsilon$$

فرض کنید $X_n = \overline{conv}\{a_1, \cdots, a_n\}$ و $(gof) : X_n \to X_n$. چون X_n پوسته محدب مجموعه متناهی از نقاط است بنابراین X_n قابل نشاندن در R^n است(رجوع شود به[۳۰]). پس بنا به قضیه براوئر x_n ای وجود دارد بطوریکه gof ، x_n را ثابت نگه می دارد.

$$|x_n - f(x_n)| \leq |x_n - gof(x_n)| + |gof(x_n) - f(x_n)| \leq |gof(x_n) - f(x_n)| \leq \varepsilon \qquad (۱.۲)$$

$\{x_n\}$ دنبا له‌ای در X و X فشرده است بنابراین دارای زیر دنباله ای مانند $\{x_{nk}\}$ است که به نقطه ای مانند x همگراست. چون X فضای متریک کامل است بنابراین $x \in X$.

از پیوستگی f نتیجه می شود که $f(x_{nk})$ همگرا به $f(x)$ است.و از رابطه (۱.۲) داریم $f(x) = x$. □

۶.۱.۲ تعریف

فرض کنید X یک فضای متریک کامل باشد و M یک خانواده از زیر مجموعه های غیر تهی کراندار از X اندازه کورا توسکی [۵] نافشرده تابع $\alpha : M \to R^+$ می باشد

که به صورت زیر تعریف می شود

$$\alpha(A) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \text{که } A \text{ توسط تعداد متناهی از مجموعه های واقع در } M \text{ با قطری کمتر از } \varepsilon \text{ پوشیده می شود.}\}$$

[۵] Kuratowski

۲.۱.۲ گزاره

خاصیتهای اندازه[۶] نا فشرده در فضای باناخ

۱) $\overline{A}$ فشرده است اگر وفقط اگر $\alpha(A) = 0$.

۲) اگر $A \subseteq B$ آنگاه $\alpha(A) \leq \alpha(B)$.

۳) $\alpha(A) = \alpha(\overline{A})$.

۴) $\alpha(A \cup B) \leq \max\{\alpha(A), \alpha(B)\}$.

۵) $\alpha(A + B) \leq (\alpha(A) + \alpha(B))$.

۶) $\alpha(cA) = |c|\alpha(A)$.

۷) $\alpha(conv(A)) = \alpha(A)$

ا ثبات:

برای اثبات (۱) فرض کنید $\alpha(A) = 0$ و $\overline{A}$ فشرده نباشد آنگاه دنبا له $\{x_n\} \subset A$ وجود دارد که زیر دنباله همگرایی ندارد. بنابراین یک $\varepsilon > 0$ وجود دارد که هر گویی به شعاع ε شامل هیچ زیر دنبا له $\{x_n\}$ نیست.و از اینرو هیچ خانواده متناهی از مجموعه ها با قطر کمتر از 2ε نمی تواند $\overline{A}$ را بپوشاند. این تناقض است با $\alpha(A) = 0$. از طرف دیگر فرض کنید $\overline{A}$ فشرده و $\varepsilon > 0$ داده شده باشد.$C = \{B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \mid x \in \overline{A}\}$ یک پوشش باز برای $\overline{A}$است. چون $\varepsilon > 0$ دلخواه است بنابراین $\alpha(A) = 0$.

برای اثبات (۲) ازاینکه $A \subseteq B$ بنابراین هر پوشش B پوششی برای A می باشد بنابراین

$\alpha(A) \leq \alpha(B)$

برای اثبات (۳) از اینکه $A \subseteq \overline{A}$ بنا به (۲) $\alpha(A) \leq \alpha(\overline{A})$. حال فرض کنید مجموعه $\{U_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ یک پوشش متناهی برای A باشد در اینصورت چون $A \subseteq \cup_{i=1}^{n} U_i$ بنابراین $\overline{A} \subseteq \overline{\cup_{i=1}^{n} U_i} = \cup_{i=1}^{n} \overline{U_i}$ و ازاینکه $diam(U_i) = diam(\overline{U_i})$ بنابراین $\alpha(\overline{A}) \leq \alpha(A)$.

اثبات (۴) واضح است.

برای اثبات (۵) ما فقط لازم است توجه کنیم که اگر $\{U_i\}$ و $\{V_j\}$ به ترتیب پوششهای متناهی برای A و B و $diam(U_i) \leq \varepsilon_1$ و $diam(V_i) \leq \varepsilon_2$ آنگاه $diam(U_i + V_i) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. اثبات (٦) واضح است. قبل از اثبات (۷) ما به لم زیر نیاز داریم.

۸.۱.۲ لم

اگر C_1 و C_2 کراندار ومحدب باشند آنگاه $\alpha(conv(C_1 \cup C_2)) \leq \max\{\alpha(C_1), \alpha(C_2)\}$.

اثبات: فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد.فرض کنیم مجموعه $\{t_1, \cdots, t_n\}$ یک افراز از بازه $[0, 1]$ باشد در اینصورت بنا به گزاره ۲۲.۰.۱ داریم

$$conv(C_1 \cup C_2) \subseteq \cup_{1 \leq i \leq n}\{t_i C_1 + (1 - t_i)C_2 + \varepsilon B)\}$$

که B گوی واحد در فضای باناخ میباشد $\alpha(B) = 2$ (رجوع شود به [۳۰]) بنابراین از گزاره ۷.۱.۲ قسمت (۴)و(۵)و(٦) نتیجه می شود که

$$\alpha(conv(C_1 \cup C_2)) \leq \max\{\alpha(t_i C_1 + (1 - t_i)C_2 + \varepsilon B)\}$$

$$\leq \max\{t_i \alpha(C_1) + (1 - t_i)\alpha(C_2) + \varepsilon\alpha(B)\}$$

$$= \max\{\alpha(C_1, \alpha(C_2)\} + 2\varepsilon$$

چون $\varepsilon > 0$ دلخواه بود بنابراین نتیجه ثابت می شود. □

برای اثبات (۷) از اینکه $A \subseteq conv(A)$ کافیست ثابت کنیم $\alpha(conv(A)) \leq \alpha(A)$