قدردانی

اقراء باسم ربک الذی خلق

بخوان به نام پروردگارت که تو را خلق کرده است همان کسی که قدرت خواندن و نوشتن را در آدمی بالقوه قرار داد تا همراه با رشد و تکاملش او را به‌احسن تقویم برساند .
من از پروردگار خود بسیار سپاس گزارم که راه علم و دانش را بر من باز کرد و توفیقاتش شامل حال من شد که بتوانم به یاری خداوند متعال در وادی علم و دانش قدم بر دارم و از ذات مقدسش خواهانم که من را در مراحل بعدی تحصیل پشتیبان باشد.

از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر موسایی تقدیر و تشکر نموده که وقت خود را در اختیار من قرار داده است و در تمامی مراحل تحصیل از هر جهت راهنمای اینجانب بوده و در تدوین این پایان نامه مرایاری نموده است از پروردگار توفیقات روز افزون آن استاد دلسوز را خواستارم.

سپاس فراوان از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر اسماعیل فیضی که مشاور بنده در طی انجام این پایان نامه بوده و همواره مرا از راهنمایی خود بهره مند نموده است .

ضمن تقدیر و تشکر از جناب آقای دکترعزیز الله عزیزی و جناب آقای دکتر حجت الله سامع که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده داشته اند و همچنین کسانی که من را در این زمینه کمک کردند بویژه جناب آقای ابراهیم فصاحت و آقای عادل احمدی که در طول دوران تحصیل راهنمای اینجانب بوده اند .

تشکر و سپاس فراوان از فداکاری‌ها و دلسوزی‌های همسرم، به خصوص این که مشکلات مضاعف اداره خانه و فرزندان را درطول مدت تحصیل بعهده گرفت ومشوق اصلی من در ادامه تحصیل بعد از ۱۲ سال فراغت از تحصیل بود.

فهرست مندرجات

مقدمه

مفهوم میانگین پذیری از سال ۱۹۰۴ توسط لبگ آغاز شد. لبگ انتگرالی موسوم به انتگرال لبگ رامعرفی کرد این انتگرال خواصی داشت که انتگرال را به صورت یکتامعین می کرد یکی از خواص انتگرال لبگ قضیه همگرایی یکنوا MCT است لبگ این سوال رامطرح کرد که آیا خاصیت MCT بنیادی است یاخیر. از آنجا که خاصیت MCT معادل با یک اندازه جمعی شمارا می باشد لذا سوال او منجر به پیدایش این پرسش شد که یک افراز تحت انتقال پایا و جمعی متناهی روی $\mathbb{R}$ مانند μ وجود دارد به طوری که $\mu([۰,۱]) = ۱$. از سال ۱۹۰۴ تا سال ۱۹۳۸ مطالعات زیادی در زمینه‌ی نظریه اندازه های پایا انجام گرفت که از جمله می توان به مطالعات فون نویمان درباره مفهوم میانگین پذیری گروه ها اشاره نمود. از سال ۱۹۰۴ به بعد مفهوم میانگین پذیری به یک مفهوم مهم در آنالیز هارمونیک تبدیل شد که درواقع به جای یک اندازه جمع پذیر μ روی مجموعه X ازمیانگین m روی $L^\infty(X)$ استفاده شد که این تحول ی اساسی محسوب می شود. باشروع مطالعه میانگین هادوره‌ی جدید مطالعه میانگین پذیری آغاز شد،

در دهه های ۱۹۴۰ و ۱۹۵۰ موضوع میانگین پذیری گروه‌ها توسط م .م دی [۱] مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت و قابل ذکر است که برای اولین بار اصطلاح میانگین پذیری را او مطرح کرد. در سال ۱۹۵۷ وی مقاله‌ی بسیار مهم واساسی نوشت که این مقاله سبب رشد و توسعه مفهوم میانگین پذیری گردید که این مفهوم درباره ی جبرهای باناخ نیز مطرح شد. درسال ۱۹۷۲ جانسون [۲] نشان داد که میانگین پذیری یک گروه فشرده موضعی G معادل بامیانگین پذیری جبر باناخ $L^1(G)$ است و این سر آغازی برای نظریه جبرهای باناخ میانگین پذیر شد. درسال ۱۹۸۳ لائو [۳] به بیان و بررسی یک خانواده بزرگ از جبرهای باناخ به نام $F-$جبرها پرداخت، همچنین وی مفهوم میانگین پذیری چپ را برای آن جبرهای باناخ بیان نمود و نشان داد که این مفهوم معادل با وجود میانگین چپ پایای توپولوژیک است. بعد از آن در سال ۱۹۸۸ پیر [۴] کتابی در زمینه جبرهای باناخ میانگین پذیر تالیف کرد ودر آن کتاب $F-$جبرها را جبر لائو نامید. درسال ۲۰۰۴ نصر اصفهانی [۵] به بررسی مفهوم نقطه ثابت در جبرهای لائو میانگین پذیر چپ پرداخته است در سال ۲۰۰۸ لائو و پیم [۶] مفهوم جدیدی در رابطه با میانگین پذیری جبرهای باناخ مطرح کردند که این پایان نامه بر اساس موضوع مذکور شکل گرفته است که در حقیقت موضوع این پایان نامه بر گرفته از مقاله

On $\varphi-$amenability of Banach algebras

می باشد، از این رو این پایان نامه در چهار فصل تنظیم گردیده است که محتوای آنها به شرح زیر می باشد :

در فصل اول تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصول بعدی بیان شده اند .

در فصل دوم مفهوم $\varphi-$میانگین پذیری مورد بررسی قرار می گیرد و قضایای معادل با

---

[۱] M.M.Day
[۲] Johnson
[۳] Lau
[۴] Pier
[۵] Nasr Isfhani
[۶] Pym

آن بیان و اثبات می شوند .
در فصل سوم ارتباط بین φ−میانگین پذیری با واحد تقریبی هسته همریختی φ مشخص می شود.
به طور نمونه نشان داده می شود که اگر φ یک همریختی ناصفر از A به توی $\mathbb{C}$ باشد آنگاه هسته ی φ ($I(\varphi)$) دارای واحد تقریبی راست کراندار است اگر و تنها اگر A، φ−میانگین پذیر باشد و دارای واحد تقریبی راست کراندار باشد .
و در پایان این فصل مثالهایی از جبرهای باناخ φ−میانگین پذیر ارا ئه می گردند . ۱ در فصل چهار برخی از ویژگیهای ارثی φ−میانگین پذیری مورد بررسی قرار می گیرد .
برای نمو نه نشان داده می شود که دو جبر باناخ A و B به ترتیب φ−میانگین پذیر و ψ−میانگین پذیر می باشند اگر و تنها اگر $A\hat{\otimes}B$، $\varphi\otimes\psi$−میانگین پذیرباشد .
همچنین نشان داده می شود جبر باناخ A، φ−میانگین پذیر است اگر و تنها اگر دوگان دوم آن، $\tilde{\varphi}$−میانگین پذیر باشد که در آن $\tilde{\varphi}$ توسیع φ به A^{**} می باشد.

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل مفاهیم، تعاریف اولیه و قضیه‌های مقدماتی که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند را به اختصار بیان می‌کنیم: در سرتاسر این پایان نامه مجموعه‌های $\mathbb{C}$ و $\mathbb{R}$ و $\mathbb{N}$ به ترتیب نشان دهنده اعداد مختلط، اعدادحقیقی و اعداد طبیعی هستند. همچنین $\mathbb{F}$ نشان دهنده $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ است.

۱.۱ همگرایی تور دریک فضای توپولوژیک

تعریف ۱.۱.۱ مجموعه جهت دار :
فرض کنید X یک مجموعه و $\leqslant$ یک رابطه روی X باشد.$(X, \leqslant)$ را جهت دار نامند هر گاه انعکاسی، متعدی و نیز برای هر $x, y \in X$، $z \in X$ باشد که $x \leqslant z$ و $y \leqslant z$.

تعریف ۲.۱.۱ تور :
فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و Λ یک مجموعه جهت‌دار باشد. هر تابع $x : \Lambda \longrightarrow X$ را یک تور نامند،

در حالت خاص $\Lambda = \mathbb{N}$ با رابطه معمولی روی $\mathbb{N}$، تور $\{x_\lambda\}$، همان دنباله $\{x_\lambda\}$ است.

تعریف ۳.۱.۱ همگرایی تور :

فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک و $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ یک تور در X و $x \in X$. تور$\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ به x همگراست اگر و تنها اگر برای هر مجموعه باز U شامل x، عنصری مانند $\lambda_\circ \in \Lambda$ موجود باشد به طوری که برای هر $\lambda \in \Lambda$ ، $\lambda \geq \lambda_\circ$ آنگاه $x_\lambda \in U$ در این صورت می نویسند، $x_\lambda \longrightarrow x$ یا $\lim_\lambda x_\lambda = x$.

۲.۱ فضای توپولوژیک خطی

تعریف ۱.۲.۱ فضای خطی :

فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان باشد، یک فضای خطی روی میدان $\mathbb{F}$ مجموعه‌ایی از بردارهای V است که نسبت به جمع برداری گروه آبلی است و به ازای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{F},\quad u, v \in V$ خواص زیر برقرار باشند:

۱)$\alpha u \in V$ ۲)$1u = u$ ۳)$(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

۴)$\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$ ۵)$(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$

تعریف ۲.۲.۱ غلاف محدب :

فرض کنیم X یک فضای خطی و $E \subseteq X$، غلاف محدب E را با CoE نشان داده و عبارت است از اشتراک تمام زیر مجموعه های محدب شامل E .

تعریف ۳.۲.۱ تابعی خطی :

فرض کنید X و Y دو فضای خطی روی میدان F باشند، نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ را یک نگاشت خطی می نامند، هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in X$ وهر $\alpha \in \mathbb{F}$، تساوی زیر برقرار باشد:

$$T(\alpha x_1 + x_2) = \alpha T(x_1) + T(x_2)$$

نگاشت خطی را عملگر خطی می نامند، هرگاه $X = Y$.

هر نگاشت خطی از فضای خطی X به توی فضای اعداد مختلط را یک تابعی خطی می نامند.

تعریف ۴.۲.۱ تصویر :

فرض کنیم X یک فضای خطی باشد، نگاشت خطی $P : X \longrightarrow X$، تصویر نامیده می شود هر گاه $P^2 = P$.

تعریف ۵.۲.۱ (TVS):

فرض کنید X فضای برداری باشد و یک توپولوژی روی آن گذاشته شده باشد به طوری که نسبت به این توپولوژی جمع و ضرب اسکالر پیوسته باشد. در این صورت این فضا را یک فضای برداری توپولوژیک یا TVS گویند.

تعریف ۶.۲.۱ فضای دوگان :

فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک خطی باشد، مجموعه ی تابعی‌های خطی پیوسته $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$، باجمع معمولی و ضرب اسکالر معمولی یک فضای خطی است که آن را با X^* نشان می دهند و آن را فضای دوگان X می نامند.

به همین ترتیب فضای دوگان دوم، فضای دوگان X^* یا $X^{**} = (X^*)^*$ تعریف می شود.

تعریف ۷.۲.۱ تابع زیر خطی :

اگر X فضای خطی روی $\mathbb{F}$ باشد تابع $q : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را تابع زیر خطی گویند هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ و $\alpha \geqslant 0$ داشته باشیم:

۱) $q(x+y) \leqslant q(x) + q(y)$؛

۲) $q(\alpha x) = \alpha q(x)$.

تعریف ۸.۲.۱ نرم :

اگر X فضای خطی روی $\mathbb{F}$ باشد نگاشت $p : X \longrightarrow [0, \infty)$، یک نیم نرم نامیده می شود هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{F}$ داشته باشیم:

۱) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$؛

۲) $p(x+y) \leqslant p(x) + P(y)$.

نیم نرم p را نرم نامند هرگاه :

$$\forall\ x \in X;\ p(x) = \circ \quad \Rightarrow \quad x = \circ\ .$$

تعریف ۹.۲.۱ توپولوژی تعریف شده توسط نیم نرم ها:

فرض کنید X یک فضای خطی باشد و P خانواده ایی از نیم نرم ها باشد، توپولوژیی که مجموعه های $\{x \in X : p(x - x_\circ) < \varepsilon\}$، عناصر زیر پایه آن باشند، توپولوژی تعریف شده توسط نیم نرم ها نامیده می شود . به عبارت دیگر U را در X باز گویند، هرگاه:

$\forall\ x_\circ\ \in\ U \quad \exists\ p_1, p_2, ..., p_n\ \in\ P, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n\ >\ \circ$

$\cap_{j=1}^{n}\{x \in X :\ p_j(x - x_\circ) < \varepsilon_j\} \subseteq U$

تعریف ۱۰.۲.۱ (LCS) :

فضای خطی توپولوژیک X که توسط خانواده ایی از نیم نرمهای P تولید می شود به طوری که $\bigcap_{p \in P}\{x : p(x) = \circ\} = \{\circ\}$، فضای محدب موضعی یا LCS نامیده می شود .

تعریف ۱۱.۲.۱ فضای نرم دار :

فرض کنید X یک فضای خطی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، اگر روی X یک نرم تعریف کنیم در این صورت X همراه با آن نرم، یک فضای نرم دار نامیده می شود .

تعریف ۱۲.۲.۱ فضای باناخ [1] :

فضای نرم دار X، یک فضای باناخ نامیده می شود . هرگاه نسبت به‌متر القا شده از نرمش یک فضای کامل باشد، یعنی هر دنباله کشی همگرا باشد.

[1] Banach

مثال ۱۳.۲.۱ الف) فرض کنید (X, M, μ) فضای اندازه باشد. برای هر $1 \leq p < \infty$، فضای خطی $L^p(X, \mu)$ متشکل از کلاس‌های هم ارزی توابع اندازه پذیر مختلط مقدار به گونه‌ای که $\|f\|_p = (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$، فضای باناخ است.
ب) فضای خطی $L^\infty(X)$، متشکل از کلاس‌های هم ارزی توابع اندازه‌پذیر مختلط مقدار به گونه‌ای که $\|f\|_\infty = \inf\{a \geq 0 \ : \ \mu(\{x : \ |f(x)| > a \}) = 0\} < \infty$، فضای باناخ است.

تعریف ۱۴.۲.۱ فرض کنید X یک فضای خطی نرم دار باشد، نگاشت جادهی از X به توی X^{**} یعنی $\wedge : X \longrightarrow X^{**}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\forall\ x \in X,\ \forall\ f \in X^*; \ \ \wedge(x)(f) = \hat{x}(f) = f(x)$$

برای $x \in X$، داریم $\|\hat{x}\| = \|x\|$. به عبارت دیگر نگاشت جادهی طولپاست .

قضیه ۱۵.۲.۱ **دوگان زیرفضای بسته :**

فرض کنید M زیرفضای بسته ازفضای نرم دار X و $M^\perp = \{g \in X^* \ : \ g(M) = 0\}$، دراین صورت نگاشت زیر یک یکریختی طولپاست.

$$p \ : \ \frac{X^*}{M^\perp} \longrightarrow M^*$$

$$p\ (f + M^\perp) = f\ |_M \ .$$

اثبات: [۴، قضیه ۱—۱۰ صفحه ۹۱]. ■

قضیه ۱۶.۲.۱ **دوگان فضای خارج قسمتی :**

فرض کنید X، فضای نرم دار و M زیر فضای بسته از X باشد و $\pi \ : \ X \longrightarrow \frac{X}{M}$ نگاشت طبیعی $\pi(x) = x + M$، باشد آنگاه نگاشت زیر یک یکریختی طولپاست.

$$p \ : \ (\frac{X}{M})^* \longrightarrow M^\perp$$

$$p\ (f) = fo\pi \ .$$

اثبات: [۴، قضیه ۲—۱۰ صفحه ۹۱]. ■

قضیه ۱.۲.۱۷ هان باناخ [۲] :
فرض کنید X یک فضای خطی و M زیرفضای از X و $p : X \longrightarrow [\circ, \infty)$ یک نیم نرم باشد، اگر $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$، تابعی خطی باشد به طوری که $\forall x \in M : |f(x)| \leqslant p(x)$، در این صورت تابعی خطی $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$ هست که

$$\forall x \in X : |F(x)| \leqslant p(x) \quad , \qquad F|_M = f .$$

اثبات: [۴، نتیجه ۴–٦ صفحه ۸۱]. ■

نتیجه ۱.۲.۱۸ :
فرض کنید X یک فضای نرم دار و M زیرفضای از X و $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$، یک تابعی خطی کراندار باشد، در این صورت یک $F \in X^*$ هست که $F|_M = f \ , \ \|F\| = \|f\|$

اثبات: [۴، نتیجه ۵–٦ صفحه ۸۱]. ■

نتیجه ۱.۲.۱۹ :
فرض کنید X یک فضای نرم دار و M زیرفضای بسته از آن باشد و $x_\circ \in X - M$ و $d = \inf\{\|x_\circ - x\| : x \in M\} = dist(x_\circ, M)$ آنگاه یک $f \in X^*$ هست به طوری که:

$$f(x_\circ) = ۱ \ , \ \forall x \in M \ ; \ f(x) = \circ \ , \ \|f\| = d^{-۱} .$$

اثبات: [۴، نتیجه ۸–٦ صفحه ۸۲]. ■

۱.۳ توپولوژی ضعیف و ضعیف–*

تعریف ۱.۳.۱ توپولوژی ضعیف :
فرض کنیم X، LCS باشد. توپولوژی ضعیف روی X، توپولوژی تعریف شده توسط نیم نرمهای $\{p_{x^*} : x^* \in X^*\}$ است به طوری که $p_{x^*}(x) = |\langle x^*, x\rangle|$ و آنرا با τ_w یا $\sigma(X, X^*)$ نمایش می دهند، توجه داریم که توپولوژی τ_w کوچکترین توپولوژی روی X است که تمام عناصر X^* نسبت به آن پیوسته‌اند.

[۲] Hahn-Banach

قضیه ۲.۳.۱ : فرض کنیم (X,τ) یک فضای محدب موضعی باشد، دراین صورت گزاره های زیر برقرارند:

الف) $\tau_w \subseteq \tau$ و نیز (X,τ_w) یک فضای محدب موضعی است؛

ب) $\{x_\alpha\}_\alpha \subseteq X$ و $x \in X$ ، $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ اگر وتنها اگر برای هر $x^* \in X^*$ داشته باشیم : $x^*(x_\alpha) \longrightarrow x^*(x)$؛

ج) اگر X، فضای نرم دار باشد و $\{x_n\}_n \subseteq X$ و $x \in X$، اگر $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$؛ آنگاه $x_n \xrightarrow{w} x$.

د) فرض کنیم $A \subset X$ محدب باشد دراین صورت $\overline{A}^w = \overline{A}$.

به ویژه A بسته است اگر وتنها اگر A، در توپولوژی ضعیف بسته باشد.

اثبات: [۴، نتیجه ۵—۱ صفحه ۱۲۹]. ■

قضیه ۳.۳.۱ : فرض کنید $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ خانواده ایی از فضاهای محدب موضعی باشد و $X = \Pi_\alpha X_\alpha$، دراین صورت $\sigma(X,X^*) = \Pi_\alpha \sigma(X_\alpha, X_\alpha^*)$.

اثبات: [۲۴، قضیه ۳—۴ صفحه ۱۳۷]. ■

قضیه ۴.۳.۱ : فرض کنیم X یک فضای محدب متریک موضعی باشد اگر $x \in X$ و $\{x_n\}_n$ یک دنباله در X باشد که $x_n \xrightarrow{w} x$، آنگاه دنباله $\{y_n\}_n$ در X هست، به طوری که:

$y_i = \Sigma_{k=1}^{\infty} t_{ik} x_k$ ($\Sigma_{k=1}^{\infty} t_{ik} = 1,\ t_{ik} \geqslant 0$) و در توپولوژی اصلی $y_n \longrightarrow y$.

اثبات: [۲۲، قضیه ۱۳—۳ صفحه ۶۵]. ■

تعریف ۵.۳.۱ توپولوژی ضعیف—$*$:

فرض کنیم X یک فضای محدب موضعی باشد، توپولوژی ضعیف—$*$ روی X^*، توپولوژی تولید شده توسط نیم نرمهای $\{p_x : x \in X\}$ می باشد که درآن برای هر $x \in X$ و $x^* \in X^*$ داریم، $p_x(x^*) = |\langle x^*, x\rangle|$.

توجه داریم که‌این توپولوژی کوچکترین توپولوژی روی فضای دوگان X^* است، که تمام عناصر $\hat{X}$ نسبت به آن پیوسته‌اند و آن را با τ_{w^*} یا $\sigma(X^*, X)$ نمایش می‌دهند.

قضیه ۶.۳.۱ : فرض کنیم (X, τ) یک فضای محدب موضعی باشد، دراین صورت گزاره های زیر برقرارند:

الف) (X^*, τ_{w^*}) یک فضای محدب موضعی است؛

ب) $\{f_\alpha\}_\alpha \subseteq X^*$ و $f \in X^*$ ، $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f$ اگر وتنها اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم : $f_\alpha(x) \longrightarrow f(x)$؛

ج) اگر X، فضای نرم دار باشد $\{f_n\}_n \subseteq X^*$ و $f \in X^*$ ، اگر $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f$. آنگاه $f_n \xrightarrow{w^*} f$؛

د)اگر X، فضای نرم دار باشد داریم : $\tau_{w^*} \subseteq \tau_w \subseteq \tau_{\|.\|}$.

اثبات: [۲۲، ۳.۱۴ صفحه ٦٦] . ■

قضیه ۷.۳.۱ قضیه باناخ—آلاغلو [۳] :

فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد. گوی یکه B_{X^*} از دوگان فضای باناخ X، w^*—فشرده است. که درآن $B_{X^*} = \{f \in X^* \ : \ \|f\| \leqslant ۱\}$.

اثبات: [۴، قضیه ۱—۳ صفحه ۱۳۴] . ■

قضیه ۸.۳.۱ گلد شتا ین [۴] :

فرض کنید $\wedge$، جادهی طبیعی از فضای نرمدار X به توی فضای دوگان دومش یعنی X^{**} باشد. و B_X و $B_{X^{**}}$ گویهای واحد بسته در X و X^{**} باشند، در این صورت $\overline{\wedge(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}$.

اثبات: [۸، ۵ – ۴ – V صفحه ۴۲۴] ■

---
[۳] Banach-Alaoglu
[۴] Goldstine

نتیجه ۹.۳.۱ : فرض کنید X یک فضای نرم‌دار و $\wedge$ نگاشت جادهی طبیعی باشد، دراین صورت $\overline{\wedge(X)}^{w^*} = X^{**}$.

اثبات: [۸، ٦ − ۴ − V صفحه ۴۲۵] ■

تعریف ۱۰.۳.۱ فضای $B(X)$:

فرض کنید X و Y فضاهای خطی نرم دار روی میدان $\mathbb{F}$ باشند، نگاشت خطی $T : X \longrightarrow Y$ را کراندار نامند، هرگاه عدد ثابت ومثبتی مانند M موجود باشد، به طوری که به ازای هر $x \in X$، $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$.

نرم T را با $\|T\|$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \quad : \quad x \in X, \ \|x\| \leqslant ۱\} .$$

مجموعه تمام نگاشت های خطی کراندار از X به توی Y را با $B(X,Y)$، نمایش می دهند، که با جمع و ضرب اسکالر معمولی و نرم فوق یک فضای نرم دار می باشد. اگر $X = Y$، به جای $B(X,X)$ از نماد $B(X)$، استفاده می شود.

قضیه ۱۱.۳.۱ : فرض کنید X و Y دو فضای نرم دار باشند، گزاره های زیر هم ارزند:

الف) $T \in B(X,Y)$؛

ب) T پیوسته است؛

ج) هرگاه $x_n \longrightarrow ۰$ آنگاه، $Tx_n \longrightarrow ۰$.

اثبات: [۲۲، قضیه ۱.۳۲ صفحه ۲۳] ■

قضیه ۱۲.۳.۱ : فرض کنید X و Y دو فضای نرم دار باشند. به ازای هر $T \in B(X,Y)$، نگاشت یکتای $T^* \in B(Y^*, X^*)$، به نام الحاقی T نظیر می شود که به ازای هر $x \in X$ و $y^* \in Y^*$، $\langle T^*(y^*), x\rangle = \langle y^*, T(x)\rangle$

یا به عبارت دیگر $T^*(y^*)(x) = y^*(T(x))$. به علاوه تساوی $\|T^*\| = \|T\|$ برقرار است.

اثبات: [۲۲، قضیه ۴.۱۰ صفحه ۹۳] ■

تعریف ۱۳.۳.۱ فضای هیلبرت [5] **:**
فرض کنید H یک فضای خطی روی $\mathbb{C}$ باشد، H را فضای ضرب داخلی گویند، هرگاه نگاشتی مانند $\langle .,. \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ موجود باشد به طوری که برای هر $x, y, z \in H$ وهر $\alpha \in \mathbb{C}$ روابط زیر برقرار باشند:

الف) $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$؛ ب) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$؛

ج) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$؛ د) $\langle x, x \rangle \geqslant 0$؛

ه) $\langle x, x \rangle = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

اگر $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ آنگاه، $\|.\|$ یک نرم روی H است. اگر H با این نرم کامل باشد، H را فضای هیلبرت گویند.

تعریف ۱۴.۳.۱ توپولوژی های روی $B(H)$ **:**
در زیر به سه نوع توپولوژی مهم از توپولوژی های روی $B(H)$ اشاره می کنیم:
الف) توپولوژی نرم ؛
ب) توپولوژی عملگری ضعیف (wot): توپولوژی تولید شده توسط خانواده نیم نرم های $\{P_{h,k} \ : \ h, k \in H\}$ روی $B(H)$ که در آن برای هر $T \in B(H)$ داریم، $P_{h,k}(T) = |\langle Th, k \rangle|$ ؛
ج) توپولوژی عملگری قوی (sot): توپولوژی تولید شده توسط خانواده نیم نرم های $\{P_h : h \in H\}$ روی $B(H)$ که در آن برای هر $T \in B(H)$ داریم، $P_h(T) = \|T(h)\|$.

قضیه ۱۵.۳.۱ : فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد و $\{T_\alpha\}_\alpha$ یک تور در $B(H)$ و نیز $T \in B(H)$. دراین صورت گزاره های زیر برقرارند:
الف) $T_\alpha \xrightarrow{wot} T$ اگر وتنها اگر برای هر $h, k \in H$، $\langle T_\alpha h, k \rangle \longrightarrow \langle Th, k \rangle$.
ب) $T_\alpha \xrightarrow{sot} T$ اگر وتنها اگر برای هر $h \in H$، $\|T_\alpha h - Th\| \longrightarrow 0$.

[5] Hilbert

اثبات: [۴، گزاره ۱.۳ صفحه ۲٦۲]

۴.۱ جبرهای باناخ

تعریف ۱.۴.۱ جبر:
فضای خطی A روی $\mathbb{F}$، یک جبر نامیده می شود، هرگاه نگاشت ضرب روی A موجود باشد که به ازای هر $\alpha \in \mathbb{F},\ x, y, z \in A$ دارای خواص زیر است :

۱) $x(yz) = (xy)z$ ۲) $x(y+z) = xy+xz$

۳) $(x+y)z = xz+yz$ ۴) $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$

تعریف ۲.۴.۱ : جبر A را یکدار گویند، هر گاه عنصر $e \in A$ چنان وجود داشته باشد که برای هر $a \in A$، داشته باشیم $ae = ea = a$.
همچنین آن را تعویض پذ یر گویند، هر گاه برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $ab = ba$.
فرض کنیم A جبر یکدار باشد، $a \in A$ را معکوس پذیر گویند، هرگاه $b \in A$ باشد به طوری که $ab = ba = e$.
مجموعه تمام عناصر معکوس پذیر A را با $Inv(A)$ نشان می دهند.

تعریف ۳.۴.۱ ایده آل :
فرض کنید A، یک جبر باشد و نیز $X \subseteq A$، X را یک ایده آل چپ A گویند هرگاه X، زیر فضای A باشد و نیز $AX \subseteq X$.
به همین ترتیب ایده آل راست تعریف می شود. $X \subseteq A$، X را یک ایده آل A گویند هرگاه هم ایده آل راست و هم ایده آل چپ A باشد .

تعریف ۴.۴.۱ جبرباناخ :
فرض کنید $(A, \|.\|)$ یک فضای باناخ و نیز A یک جبر باشد، A یک جبرباناخ نامیده می شود هرگاه :

$$\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\| \qquad (a, b \in A) \ .$$

قضیه ۵.۴.۱ : فرض کنید A یک جبر باناخ یکدار و $a \in A$ به طوری که $\|a\| < 1$، در این صورت $e - a$ معکوس پذیر است و $(e-a)^{-1} = \Sigma_0^\infty a^n$.

اثبات: [۱۷، ۲–۲–۱ صفحه ۷] ■

تعریف ۶.۴.۱ طیف :

فرض کنیم A یک جبر باناخ یکدار باشد و نیز $a \in A$، طیف a را با $\sigma(a)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \quad : \quad a - \lambda e \notin Inv(A)\}$$

مثال ۷.۴.۱ فرض کنید S یک مجموعه ی ناتهی باشد، دراین صورت $l^\infty(S)$ مجموعه تمام توابع مختلط کراندار روی S باجمع وضرب نقطه‌ایی ونرم $\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|$، یک جبر باناخ است.

تعریف ۸.۴.۱ واحد تقریبی کراندار :

فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. واحد تقریبی کراندار راست روی A، تور $\{e_i\}$ در A می‌باشد، به طوری که:

۱) $M > 0$ وجود داشته باشد، به طوری که برای هر i، $\|e_i\| < M$؛

۲) برای هر $a \in A$، $\lim_i \|ae_i - a\| = 0$.

بهمین ترتیب واحد تقریبی کراندارچپ روی A تعریف می شود($\lim_i \|e_i a - a\| = 0$). یک تور را واحد تقریبی کراندار نامند، هرگاه هم واحد تقریبی کراندار راست و هم واحد تقریبی کراندارچپ باشد.

مثال ۹.۴.۱ جبرهای باناخ یکدار دارای واحد تقریبی کراندار هستند.

قضیه ۱۰.۴.۱ قضیه تجزیه کوهن [۶] :
فرض کنید A یک جبر باناخ باشد و دارای واحد تقریبی چپ کراندار با کران $K \geqslant 1$ باشد در این صورت برای هر $z \in A$ و $\delta > 0$، عضوهای $a, y \in A$ وجود دارند به طوری که

$$z = ay \quad , \quad \|a\| \leqslant K \quad , \quad y \in \overline{Az} \quad , \quad \|y - z\| < \delta \quad .$$

اثبات: [۷، نتیجه ۲–۱۶ صفحه ۱۰۴]. ■

گزاره ۱۱.۴.۱ : فرض کنید $A = C^1([0, 1])$ و $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$. اگر $z \in \mathbb{T}$ آنگاه $\{f \in A \ : \ f(z) = 0\}$، دارای واحد تقریبی کراندار است .
اثبات: [۵، گزاره ۱۳–۳–۴ صفحه ۴۵۳]. ■

تعریف ۱۲.۴.۱ واحد تقریبی ضعیف :
فرض کنید A یک جبر باناخ باشد، تور $\{e_\lambda\}_\lambda$ در A را واحد تقریبی راست ضعیف گوئیم هر گاه:

$$f(xe_\lambda) \longrightarrow f(x) \qquad\qquad (x \in A, f \in A^*)$$

به همین ترتیب واحد تقریبی چپ ضعیف تعریف می شود. یک تور را واحد تقریبی ضعیف نامند، هرگاه هم واحد تقریبی راست ضعیف و هم واحد تقریبی چپ ضعیف باشد.

تعریف ۱۳.۴.۱ A–مدول چپ :
فرض کنید A یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ و X یک فضای خطی روی $\mathbb{F}$ باشد، در این صورت X، یک A–مدول چپ نامیده می شود هرگاه نگاشتی مانند $f : A \times X \longrightarrow X$ باضابطه $(a, x) \longrightarrow a.x$ وجود داشته باشد که خواص زیر را داشته باشد:
۱) به ازای هر $a \in A$، نگاشت $x \longrightarrow a.x$ خطی باشد؛

[۶] Cohen

۲) به ازای هر $x \in X$، نگاشت $a \longrightarrow a.x$ خطی باشد؛

۳) به ازای هر $a_۱, a_۲ \in A$ و $x \in X$ داشته باشیم $a_۱.(a_۲.x) = (a_۱.a_۲).x$.

نگاشت f را ضرب مدولی گویند، به طور مشابه $A-$مدول راست تعریف می شود.

تعریف ۱۴.۴.۱ $A-$**دومدول** :

اگر X، $A-$مدول چپ و $A-$مدول راست باشد و برای هر $x \in X, a, b \in A$، داشته باشیم $a.(x.b) = (a.x).b$، در این صورت X را $A-$مدول یا $A-$دومدول گویند.

تعریف ۱۵.۴.۱ $A-$**مدول نرم دار** :

فرض کنید A یک جبر نرم دار و X یک فضای نرم دار باشد.X، $A-$مدول چپ نرم دار نامیده می شود هرگاه X، $A-$مدول چپ باشد ونیز $M > ۰$ موجود باشد به طوری که:

$$\|ax\| \leqslant M\|a\|\|x\| \qquad (x \in X,\ a \in A)\ .$$

به همین ترتیب $A-$مدول راست نرم دار تعریف می شود. فضای نرم دار X را $A-$مدول نرم دار نامند، هرگاه هم $A-$مدول راست نرم دار وهم $A-$مدول چپ نرم دار باشد.

تعریف ۱۶.۴.۱ $A-$**مدول باناخ** :

فرض کنید X، $A-$مدول چپ نرم دار باشد، X، $A-$مدول چپ باناخ نامیده می شود هرگاه X یک فضای باناخ باشد.

مثال ۱۷.۴.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ باشد دراین صورت A^* باضرب مدولی زیر یک $A-$مدول باناخ است :

$$\langle a.f, b\rangle = \langle f, ba\rangle \qquad \langle f.a, b\rangle = \langle f, ab\rangle \qquad (a \in A,\quad f \in A^*)\ .$$

تعریف ۱۸.۴.۱ قسمت توسیعی مدول :

فرض کنید A یک جبر باناخ و X، $A-$مدول باناخ راست باشد، آنگاه زیر فضای خطی بسته از X که توسط $XA = \{xa \quad : \quad x \in X, a \in A\}$ تولید می شود را قسمت توسیعی X گویند و آن را با X_e نشان می دهند.