بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه قم
دانشکده علوم پایه
پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی

عنوان:

الگوریتم خطی برای یافتن طولانی‌ترین مسیر در گراف‌های شبکه‌ای مستطیلی

استاد راهنما:
دکترغلامحسن شیردل

نگارنده:
شکوفه محمودیان

پاییز ۱۳۹۲

تقدیم به:

حضرت معصومه و امام زمان

و پدر و مادر بزرگوارم

تشکر و قدردانی

در هیاهوی زندگی دریافتم چه دویدن‌هائیکه فقط پاهایم را از من گرفت در حالی که گویی ایستاده بودم، چه غصه‌هائیکه فقط باعث سپیدی موهایم شد در حالیکه قصه‌ای کودکانه بیش نبود. دریافتم کسی هست که اگر او بخواهد می‌شود و اگر نه نمی‌شود" به همین سادگی" کاش نه می‌دویدم و نه غصه می‌خوردم فقط او را می‌خواندم.

اگر چه در ابتدای این راه بی‌پایان هستم ولی امیدوارم که با دستیابی به مراتب بالاتر، علاوه بر تشکر از خالق یکتا؛ از استاد بزرگوارم **آقای دکتر غلامحسن شیردل** از آنجا که تجلیل از معلم سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می‌کند، بر حسب وظیفه و از باب این که تقدیر و تشکر از نعمت‌های خداوند همانند تشکر از اوست؛ و از همه **دوستان** همیشه سرسبز و پاینده‌ام، و در آخر از **پدر و مادر** دو دوست بزرگ و هیچگاه تکرار نشدنی و دست نیافتنی کسانی که از لحظه‌ای منت نهادن امتناع کردند و عاشقانه و بی‌چشم داشت مرا دوست داشتند و یاری کردند؛ گوشه‌ای از مراتب ادب و تواضع را با تقدیم این پایان نامه به ایشان به جای آورم.

فهرست مطالب

۱ **مفاهیم و تعاریف مقدماتی** **۲**

۱.۱ مقدمه ۳

۲.۱ گراف ۳

۳.۱ یکریختی در گراف‌ها ٦

٤.۱ زیرگراف‌ها ۷

٥.۱ پیچیدگی زمانی و مرتبه‌ی اجرایی ۹

٦.۱ مرتبه اجرایی الگوریتم (O أی بزرگ) ۱۳

۲ **الگوریتم خطی برای یافتن طول طولانی‌ترین در گراف‌های شبکه‌ای مستطیلی** **۱٥**

۱.۲ مقدمه ۱٦

۲.۲ مقدمات و تعاریف پایه‌ای ۱٦

۳.۲ یک کران بالا برای طول طولانی‌ترین مسیر ۱۹

٤.۲ نواربندی و دوبخشی کردن ۲۳

٥.۲ مسئله‌ی درجه‌ی یک ۲۹

٦.۲ الگوریتم طولانی‌ترین مسیر ۳۷

۷.۲ طرز کار الگوریتم ۳۸

۳ **الگوریتم خطی برای یافتن مسیر هامیلتونی در برخی کلاس‌های گراف‌های شبکه‌ای** **٤۲**

۱.۳ مقدمه ٤۳

۲.۳ شرایط لازم و کافی برای وجود مسیر هامیلتونی در گرافهای شبکه‌ای L–الفبایی، C–الفبایی، F–الفبایی و E–الفبایی ٤٤

۳.۳ مسیر هامیلتونی در گراف شبکه‌ای L–الفبایی $L(m,n)$ ٥٦

٤.۳ مسیر هامیلتونی در گراف شبکه‌ای C–الفبایی $C(m,n)$ ٥۸

۵.۳ مسیر هامیلتونی در گراف شبکه‌ای F–الفبایی $F(m,n)$ ۵۸
۶.۳ مسیر هامیلتونی برای گراف شبکه‌ای E–الفبایی $E(m,n)$ ۶۰
۷.۳ نتیجه گیری ۶۴

لیست جداول

لیست تصاویر

۱.۱ نمودار گرافهای G و H ۵
۲.۱ . . . . . . ٦
۳.۱ الف. نمودار گراف G. ب زیرگراف القایی-زیرگراف یال القایی-زیرگراف فراگیر-$G - \{e_۲, e_۴\}$ ۹
٤.۱ . . . . . . ۱۰

۱.۲ گراف شبکه‌ای مستطیلی $R(۷, ۶)$ ۱۷
۲.۲ دور هامیلتونی برای گراف شبکه‌ای مستطیلی $R(۸, ۵)$ ۱۸
۳.۲ گراف شبکه‌ای مستطیلی که مسیر هامیلتونی بین s و t ندارد ۱۹
٤.۲ الف. طول مسیر بین s و t گرف شبکه‌ای ۱-مستطیلی. ب.طول مسیر بین s و t در گراف شبکه‌ای ۲-مستطیلی.ج و د. مسیر با طول $۲m$ و $۲m - ۱$ گراف شبکه‌ای ۲-مستطیل ۲۹
۵.۲ یک نوار از $P(R(۸, ۴), s, t)$. ۳۱
٦.۲ یک نوار از $(R(۴, ۳), s, t)$ زمانی‌که R ۳-مستطیل و s و t رئوس گوشه‌ای از $R - S$ هستند. ۳۱
۷.۲ . . . . . . ۳۲
۸.۲ الف. یک نوار از $(R(۳, ۳), s, t)$ ب و ج. یک نوار از $(R(۴, ۳), s, t)$ زمانی‌که $U(R, s, t) = mn - ۱$ ۳۲
۹.۲ یک نوار از $(R(۴, ۳), s, t)$ زمانی‌که $F_۳$ اجرا می‌شود. ۳۳
۱۰.۲ . . . . . . ۳٤
۱۱.۲ یک نوار از $R(۶, ۴)$ ۳۵
۱۲.۲ یک نوار از $R(۴, ۴)$ ۳٦
۱۳.۲ یک نوار از $(R(۴, ۴), s, t)$ زمانی‌که s و t مقابل هستند. ۳۷
۱٤.۲ . . . . . . ۳۷

۱۵.۲ برای $n = m = ۳$ الف s و tدارای رنگ سفید هستند و یک مسیر هامیلتونی وجود دارد ب . s و t رنگ متفاوت دارند و مسیر ی با $U(R, s, t)$ وجود دارد ج. s و t دارای رنگ سیاه هستند و مسیری با $U(R, s, t) = mn - ۲$ وجود دارد. ٤٠
۱٦.۲ مثالی از $R(۱۲, ۵)$ با $L = mn - ۱$ الف. نواربندی به‌وسیله‌ی S. ب–د. سه نتیجه از نوار. ذ. طولانی‌ترین مسیر در $R - S$. ر. مسیر $P(R, s, t)$ ٤١

۱.۳ (الف) گراف شبکه‌ای مستطیلی $R(۱۰, ۱۱)$. (ب) گراف شبکه‌ای L–الفبایی $L(۴, ۳)$. (ج) گراف شبکه‌ای C–الفبایی $C(۴, ۳)$. (د) گراف شبکه‌ای E–الفبایی $E(۴, ۳)$. ٤٤
۲.۳ گراف شبکه‌ای که مسیر هامیلتونی بین s و t ندارد ٤٦
۳.۳ (الف) دور هامیلتونی در گراف شبکه‌ای $R(۸, ۵)$. (ب) گراف شبکه‌ای L–الفبایی $L(۴, ۳)$. ٤٧
٤.۳ مسیر هامیلتونی در $R(۱۰, ۱۱)$ ٤٨
٥.۳ مسیر هامیلتونی در $R(۷, ۱۱)$ ٤٩
٦.۳ مسیر هامیلتونی در $R(۷, ۱۱)$ ٥٠
۷.۳ گراف شبکه‌ای L–الفبایی که مسیر هامیلتونی بین s وt ندارد. ٥۲
۸.۳ افرازی از $L(۴, ۳)$. ٥۳
۹.۳ گراف شبکه‌ای C–الفبایی که مسیر هامیلتونی بین s وt ندارد. ٥٥
۱۰.۳ گراف شبکه‌ای F–الفبایی که مسیر هامیلتونی بین s وt ندارد. ٥٦
۱۱.۳ گراف شبکه‌ای E–الفبایی که مسیر هامیلتونی بین s وt ندارد. ٥۷
۱۲.۳ (الف) و (ب) یک نوار از $L(۳, ۳)$. (ج) نواری از $C(۳, ۳)$. ٦۰
۱۳.۳ (الف) و (ب) دو بخش از $L(۳, ۳)$ (ج) ٦۲
۱٤.۳ (الف) و (ب) نواری از $F(۳, ۴)$ و.$F(۳, ۳)$ (ج) نواری از $E(۳, ۳)$. ٦۳
۱٥.۳ یک نوار از $F(۳, ۳)$ زمانی‌که $s, t \in R(۲m - ۴, n)$. ٦٤
۱٦.۳ الگوریتم ۱: الگوریتم مسیر هامیلتونی برای گراف‌های شبکه‌ای L– الفبایی ٦٤
۱۷.۳ لگوریتم ۲: الگوریتم مسیر هامیلتونی برای گرافهای شبکه ایا C – الفبایی ٦٥
۱۸.۳ الگوریتم ۳: الگوریتم مسیر هامیلتونی برای گراف‌های شبکه‌ای F– الفبایی ٦٥
۱۹.۳ الگوریتم ٤: الگوریتم مسیر هامیلتونی برای گرافهای شبکه ای E – الفبایی ٦٦

چکیده

از آنجایی‌که یافتن طولانی‌ترین مسیر به زمان زیادی نیازمند است تنها برای تعداد کمی از گراف‌های خاص طولانی‌ترین مسیر در زمان چندجمله‌ای به‌دست می‌اید.در این پایان‌نامه یک الگوریتم در زمان خطی برای یافتن طولانی‌ترین مسیر بین دو رأس داده شده در یک گراف شبکه‌ای مستطیلی ارائه می‌کنیم. سپس شرایط کافی برای وجود مسیر هامیلتونی در گراف‌های شبکه‌ای L-الفبایی، C-الفبایی، F-الفبایی و E-الفبایی و همچنین الگوریتم خطی برای یافتن مسیر هامیلتونی در این گراف‌ها را ارائه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی:

مسیر هامیلتونی، دور هامیلتونی، طولانی‌ترین مسیر، گراف شبکه‌ای مستطیلی،گراف شبکه‌ای L-الفبایی

مقدمه

مسئله‌ی شناخته شده مسیر هامیلتونی یک مورد ویژه از مسائل طولانی‌ترین مسیر است [۴،۸].

درخت‌ها اولین دسته از گراف هستند که یک الگوریتم زمان–چندجمله‌ای برای مسئله‌ی طولانی‌ترین مسیرشان پیدا شده است (یعنی یافتن قطر یک درخت بی‌وزن). این الگوریتم ابتدا توسط دایگسترا [۱] مطرح گردید، سپس بولترمن [۲] اثباتی برای آن مطرح کرد [۲]، وبعداً توسط یوهارا [۳] و انو [۴] برای درختان بی‌وزن اصلاح شد [۱۶].

اخیراً مرتزیوس [۵] و کرنیل [۶] برای دسته‌ی عظیمی از گراف‌ها یک الگوریتم زمان–چندجمله‌ای بیان کرده‌اند [۱۵] .

در حوزه الگوریتم‌های تقریبی نشان داده شده است که این مسئله در APX نیست، یعنی هیچ الگوریتمی تقریبی از زمان چندجمله‌ای باضریب ثابت برای مسئله وجود ندارد مگر اینکه $P = NP$. همچنین نشان داده شده است که یافتن مسیری ازطول $n - n^{\epsilon}$ در زمان چندجمله‌ای ممکن نیست مگر اینکه $P = NP$، [۹]. براساس دانش ما بهترین الگوریتم تقریبی شناخته شده برای مسئله نسبتی از $O(n(loglogn/logn)^{۲})$ دارد [۱۱]. برای مشاهده‌ی نتایج بیشتری در زمینه‌ی الگوریتم‌های تقریبی در گراف‌های عمومی به مقاله‌های [۵–۷] رجوع کنید. گراف‌های شبکه‌بندی مستطیلی اولین بار در [۱۴] ظاهر شده اند، گراف شبکه‌ای مستطیلی $R(m,n)$ زیرگرافی از G^{∞} (گراف شبکه‌بندی شده نامتناهی) تولید شده توسط $V(m,n) = \{v | ۱ \leq v_x \leq m, ۱ \leq v_y \leq m\}$ است، جایی که v_x و v_y به ترتیب مختصات v نسبت به محورهای مختصات x و y هستند.در فصل اول قضایا و تعاریف مقدماتی بیان شده در فصل دوم و سوم با اثبات چندین لم کران بالای طول طولانی‌ترین مسیر را یافته سپس با استفاده از آن به یافتن طولانی‌ترین مسیر از طریق نواربندی و دوبخش کردن گراف و مسئله‌ی درجه‌ی یک می‌پردازیم سپس باتوجه به آن الگوریتم طولانی‌ترین مسیر $R(m,n)$ و با استفاده از این الگوریتم طولانی‌ترین مسیر در گراف $L(m,n)$ و $C(m,n)$ و $F(m,n)$ و $E(m,n)$ را یافته.

[۱] Dijkstra
[۲] Bulterman
[۳] Uehara
[۴] Uno
[۵] Mertzios
[۶] Corneil

فصل ۱

گراف‌های شبکه‌ای مستطیلی و کلاس‌های آن

۱.۱ مقدمه

یک گراف شبکه‌ای زیرگراف رأس القایی متناهی از یک شبکه نامتناهی است گراف‌های شبکه‌بندی مستطیلی اولین بار در [۱۴] ظاهر شده اند، جایی که لوسیو [۱] و ماگنیا [۲] سعی کردند مسئله‌ی مسیر هامیلتونی را حل کنند. در [۳] چن [۳] یک الگوریتم موازی برای یافتن یک مسیر هامیلتونی بین دو رأس داده شده از یک گراف شبکه‌ای مستطیلی در زمان ثابت ارائه کرده است. در این بخش، تعاریف و برخی از نتایج منتشر شده قبلی در زمینه‌ی مسئله‌ی هامیلتونی و طولانی‌ترین مسیر در گراف‌های شبکه‌ای مستطیلی که در[۳, ۱۰] امده،ارائه می‌دهیم.

۲.۱ گراف

گراف G یک سه تای مرتب $(V(G), E(G), \varphi_G)$، که در آن مجموعه‌ی ناتهی از اشیاء را با $V(G)$ نشان داده و مجموعه رأس‌ها می‌نامیم و مجموعه‌ی دوتایی از عناصر $V(G)$ را با $E(G)$ نشان داده و مجموعه‌ی یال‌ها می‌نامیم، و φ_Gتابع وقوع است که به هر یال G، دو رأس نسبت می‌دهد. اگر e یک یال و u و v رأس‌هایی باشند، به‌قسمی‌که $\varphi_G(e) = uv$ ، آن‌گاه می‌گویند e ، u را به v وصل می‌کند. رأس‌های u و v را دو انتهای e می‌نامند.

[۱] Lussio

[۲] Mugnia

[۳] Chen

برای روشن کردن تعریف، مثالی از گراف را ارائه می‌دهیم:

مثال ۱.۲.۱.

$$G = (V(G), E(G), \varphi_G)$$

که در آن

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$$

$\varphi_G(e_1) = v_1v_2,\ \ \varphi_G(e_2) = v_2v_3,\ \ \varphi_G(e_3) = v_3v_4,\ \varphi_G(e_4) = v_4v_5,$

$\varphi_G(e_5) = v_5v_1,\ \varphi_G(e_6) = v_0v_1,\ \ \varphi_G(e_7) = v_0v_2,\ \varphi_G(e_8) = v_0v_3,$

$\varphi_G(e_9) = v_0v_4,\ \varphi_G(e_{10}) = v_0v_5$

مثال ۲.۲.۱.

$$H = (V(H), E(H), \varphi_H)$$

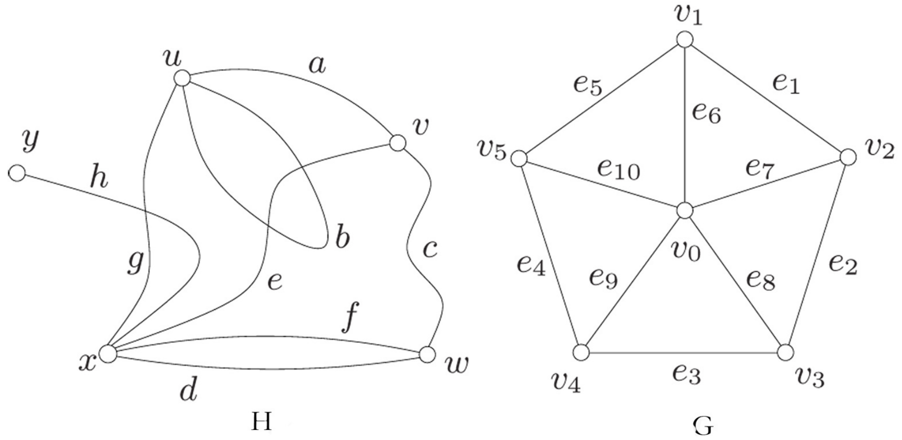
که در آن

$$V(H) = \{u, v, w, x, y\}$$

$$E(H) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

$\varphi_H(a) = uv,\quad \varphi_H(b) = uu,\quad \varphi_H(c) = uw,\ \ \varphi_H(d) = wx,$

$\varphi_H(e) = vx,\ \ \varphi_H(f) = wx,\quad \varphi_H(g) = ux,\quad \varphi_H(h) = xy$



شکل ۱.۱: نمودار گرافهای G و H

نمودار گراف صرفاً رابطه‌ی وقوع را بین رأس‌ها و یال‌های آن‌ها به نمایش می‌گذارد.اما، غالباً نمودار گراف را رسم و به آن به‌عنوان خود گراف اشاره می‌کنیم؛ با همین برداشت، نقطه‌هایش را رأس‌ها و خط هایش را یال‌ها می‌نامیم. نمودارهای Gو H در شکل ۱.۱ نشان داده شده‌اند .

دو رأس که بر یالی مشترک واقع‌اند، مجاور هستند، هم‌چنان که دو یال مار بر رأسی مشترک، مجاورند. یالی با دو انتهای یکسان را طوقه، و یال با دو انتهای مجزا را پیوند می‌نامند. اگر هر دو مجموعه‌ی رأس‌ها و یال‌های گراف متناهی باشند، گراف متناهی است، اگر گراف دارای طوقه نبود و هیچ دوتایی از پیوندهایش به یک زوج رأس متصل نباشند،گراف ساده است. در شکل ۱.۱گراف H ساده نیست اما گراف G ساده است.

گراف دو بخشی گرافی است که مجموعه‌ی رأس‌هایش را بتوان به دو زیرمجموعه‌ی X و Y به‌طوری افراز کرد که هر یال دارای یک انتها در X و یک انتها در Y باشد. چنین افراز (X, Y) را دوبخشی‌کردن گراف می نامند. گراف دوبخشی کامل، یک دوبخشی ساده با افراز (X, Y) است که در آن هر رأس X به هر رأس Y متصل است. اگر $|Y| = n$ و $|X| = m$، چنین گرافی را به‌وسیله‌ی $K_{m,n}$ نشان می‌دهند.

۳.۱ زیرگراف

گراف H زیرگراف Gاست؛ اگر

۱. $V(H) \subseteq V(G)$.

۲. $E(H) \subseteq E(G)$.

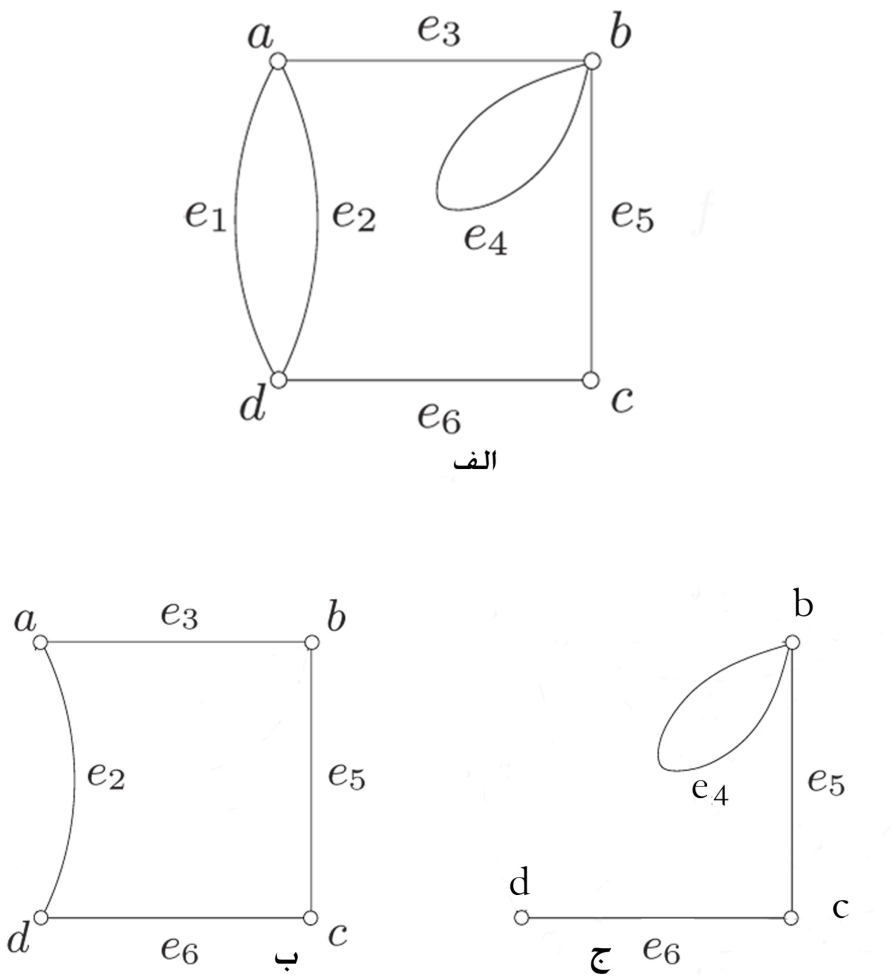
۳. ψ_H تحدید ψ_G به $E(H)$ باشد.

وقتی $G \subseteq H$ اما $H \neq G$، می‌نویسیم $H \subset G$ و H را زیرگراف سره G می‌نامیم. اگر H زیرگراف G باشد، G زبرگراف H نامیده می‌شود. زیرگراف فراگیر G زیرگراف H با $V(H) = V(G)$ است.

با حذف همه‌ی طوقه‌ها از G، و برای هر جفت رأس مجاور، با حذف همه‌ی پیوندها بجز یک پیوند که آن‌ها را به‌هم متصل می‌کند، زیرگراف فراگیر ساده G را به‌دست می‌اوریم، که آن را گراف ساده‌ی زمینه‌ی G نامیده‌اند.

فرض کنید که V' زیرمجموعه‌ی ناتهی V باشد. زیرگراف G راکه مجموعه‌ی رأس‌هایش V' و مجموعه یال‌هایش مجموعه‌ای از یال‌های G است که هر دو انتهایش در V' است، زیرگراف G، القا شده به‌وسیله‌ی V' می‌نامند و به‌وسیله‌ی $G[V']$ نشان می‌دهند؛ می‌گوییم که $G[V']$ یک زیرگرف القایی G است. زیرگراف القایی $G[V \setminus V']$ را که به‌صورت $G - V'$ نمایش می‌دهند، زیرگرافی است که از G با حذف رأس‌های V' همراه با یال‌هایی که رأس‌های V' بر آن‌ها واقع‌اند، به‌دست می‌اید. اگر $V' = \{v\}$، به‌جای $G - \{v\}$ می‌نویسیم $G - v$.

حال فرض کنید که E' زیرمجموعه ناتهی E است. زیرگراف G را که مجموعه رأس‌هایش مجموعه‌ای از دو انتهای یال‌ها در E' و مجموعه یاهایش E' است، زیرگراف G القایی به‌وسیله‌ی E' می‌نامند و آن را با $G[E']$ نمایش می‌دهند و ان را زیرگراف یال–القایی G می‌نامیم. زیرگراف فراگیر G با مجموعه‌ی یالی $E \setminus E'$ را به صورت $G - E'$ می‌نویسند، و زیرگرافی از G است که به‌وسیله‌ی حذف یال‌های E' به‌دست می‌اید. همچنین، گرافی از G را که به‌وسیله‌ی اضافه کردن مجموعه یال‌های E' به‌دست می‌اید با $G + E'$ نمایش



شکل ۲.۱: (الف) نمودار گراف G. (ب) زیرگراف یال-القایی و زیرگراف فراگیر گراف G (ج) $G-\{e_1,e_2,e_3\}$

می‌دهند. اگر $E'=\{e\}$، به‌جای $G-\{e\}$ و $G+\{e\}$، می‌نویسیم $G-e$ و $G+e$. در شکل ۲.۱ زیرگراف‌هایی از انواع گوناگون رسم کرده‌ایم.

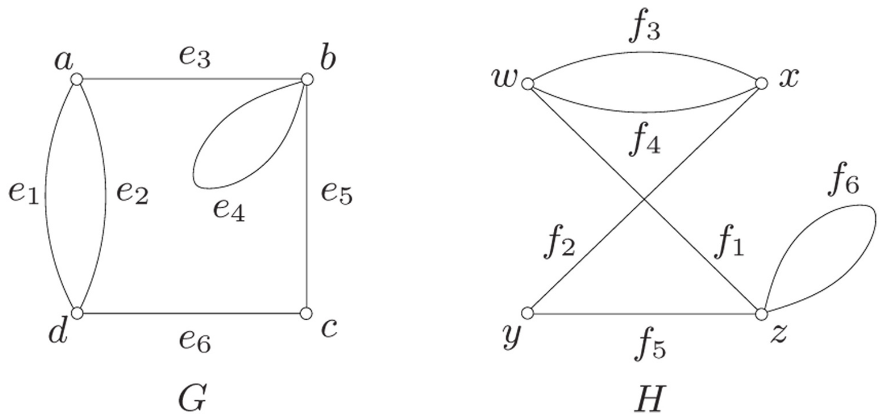
۴.۱ یکریختی در گراف

دو گراف G و H یکسان‌اند اگر:

۱. $V(G)=V(H)$.

۲. $E(G)=E(H)$.

۳. $\varphi_G=\varphi_H$.



شکل ۳.۱:

اگر دو گراف یکسان باشند، آن‌ها را به‌روشنی می‌توان به‌وسیله‌ی نمودارهای همانند نشان داد. ممکن است گراف‌هایی که همانند نیستند نیز اساساً یک نمودار داشته باشند. مثلاً نمودار G و Hدر شکل ۳.۱ به‌نظر همانندند، با این تفاوت که رأس‌ها و یال‌هایش نشان‌های گوناگون دارند. گراف‌های G و H یکسان نیستند، اما یکریخت هستند. دو گراف G و H را یکریخت می‌گویند، اگر دوسویی‌های $\theta : V(G) \longrightarrow V(H)$ و $\phi : E(G) \longrightarrow E(H)$ موجود باشند به‌طوری‌که $\psi_G(e) = uv$ اگر و تنها اگر $\psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$؛ چنین جفت (θ, ϕ) از نگاشت‌ها را یک یکریختی بین G و H می‌نامند.

برای نشان دادن اینکه دو گراف یکریخت‌اند، باید یک یکریختی بین آن‌ها نشان داد. زوج نگاشت (θ, ϕ) که با

$$\theta(a) = w,\ \ \theta(b) = z,\ \ \theta(c) = y,\ \ \theta(d) = x$$

$$\phi(e_۱) = f_۳,\ \ \phi(e_۲) = f_۴,\ \ \phi(e_۳) = f_۱,\ \ \phi(e_۴) = f_۶,\ \ \phi(e_۵) = f_۵,$$

$$\phi(e_۶) = f_۲$$

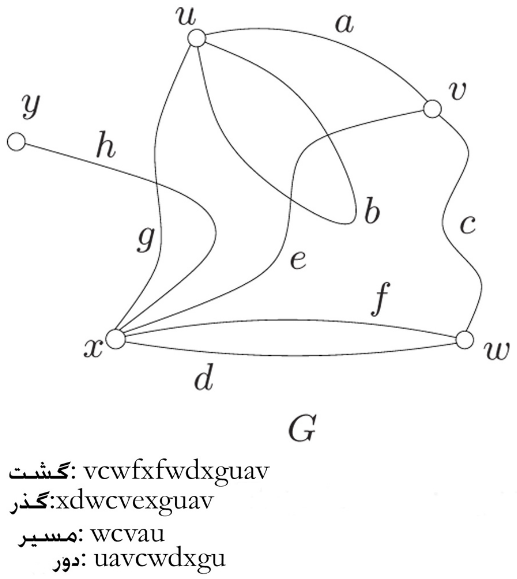
تعریف می‌شود، یک یکریختی بین گراف‌های شکل ۳.۱ است. به‌روشنی G و H ساختار همانند دارند، و تنها در نام‌های رأس‌ها و یال‌ها متفاوت هستند.

۵.۱ مسیر و دور

گشت در G، دنباله‌ی ناتهی $W = v_۰e_۱v_۱e_۲v_۲...e_kv_k$، است که جمله‌های متناوب آن رأس‌ها و یالها هستند، به قسمی که برای $۱ \leq i \leq k$، دو انتهای e_i، $v_{i-۱}$ و v_i هستند. می‌گوییم w گشتی از $v_۰$ به v_k یا گشت $(v_۰, v_k)$ است. رأس‌های $v_۰$ و v_k را به‌ترتیب مبدأ و انتهای W می‌نامند .

اگر $W = v_۰e_۱v_۱e_۲v_۲...e_kv_k$ و $W' = v_ke_{k+۱}v_{k+۱}...e_lv_l$ گشت باشند، گشت $v_ke_kv_{k-۱}...e_۱v_۰$ را، که از وارون کردن ترتیب W به‌دست می‌اید، با $W^{-۱}$ نشان می‌دهند و گشت $v_۰e_۱v_۱e_۲v_۲...e_lv_l$ را که از پیوند W و W' در v_k به‌دست می‌اید با WW' نشان می‌دهند. بخشی از گشت $W = v_۰e_۱v_۱e_۲v_۲...e_kv_k$ زیردنباله‌ی $v_ie_{i+۱}v_{i+۱}...e_jv_j$ از جمله‌های متوالی W است؛ این زیردنباله را بخش (v_i, v_j) از W می‌نامیم. گشت $v_۰e_۱v_۱e_۲v_۲...e_Kv_K$ در گراف ساده به‌وسیله‌ی دنباله‌ی $v_۰...v_k$، متشکل از رأس‌هایش تعیین می‌شود؛ از این‌رو گشت را در گراف ساده می‌توان صرفاً به‌وسیله‌ی دنباله رأس‌هایش مشخص کرد، به‌علاوه حتی در گراف‌هایی که ساده نیستند،گاهی به دنباله رأس‌ها که در آن جمله‌های متوالی مانند گشت، مجاور هستند، اشاره خواهیم کرد. در چنین حالت‌ها باید مطمئن شد که بحث برای هر گشت با ان دنباله رأس‌ها معتبر است.

اگر یال‌های $e_۱, e_۲, ..., e_K$ درگشت W مجزا باشند، W را گذر می‌نامند. طول گشت W با $\varepsilon(W)$ نشان داده می‌شود. اگر، علاوه براین، رأس‌های $v_k, ..., v_۱, v_۰$ مجزا باشند، W را مسیر می‌نامند. شکل ٤.١ گشت، گذر و مسیر را در گراف نمایش می‌دهد. همچنین واژه مسیر را برای نشان دادن گراف یا زیرگرافی به‌کار می‌بریم که رأس‌ها و یال‌های آن‌ها جمله‌های یک مسیرند. دو رأس u و v را همبند خوانند اگر مسیر (u, v) در G موجود باشد. همبندی، یک رابطه هم‌ارزی در مجموعه رأس‌های V است. بنابراین افرازی از V به زیرمجموعه‌های ناتهی V_w ، ... ، $V_۲$ ، $V_۱$ وجود دارد به‌طوری که دو رأس u و v همبندند اگر و تنها اگر u و v هر دو متعلق به یک مجموعه V_i باشند. $G[V_w]$، ...، $G[V_۲]$، $G[V_۱]$ را مؤلفه‌های G می‌نامند. اگر G دارای دقیقاً یک مؤلفه باشد، گراف G همبند است؛ در غیر این صورت G



شکل ٤.١:

ناهمبند است. تعداد مؤلفه‌های G را با $w(G)$ نشان می‌دهیم.

هر مسیر بسته‌ای دور نامیده می‌شود. درست مانند مسیرها، گاهی برای نشان دادن اینکه گرافی متناظر با دور است از اصطلاح دور استفاده می‌کنیم. دور به طول K را K–دور خوانند. مسیری که شامل هر رأس G است مسیر هامیلتونی G می‌خوانند همچنین دور هامیلتونی G دوری است که شامل هر رأس G است.

٦.١ گراف‌های شبکه‌ای

شبکه‌ی صحیح دو بعدی G^{∞}، عبارتست از یک گراف نامتناهی با مجموعه رئوسی از صفحه اقلیدسی با مختصات صحیح، در این گراف یک یال بین هر دو رأس با فاصله‌ی واحد وجود دارد. برای یک رأس v از این گراف، v_x و v_y به ترتیب نشان دهنده مختصات x و y نظیر ان نقطه هستند. گاهی اوقات به جای v از (v_x, v_y) استفاده می‌کنیم. رأس‌های شبکه صحیح دو بعدی را با رنگ‌های سفید و سیاه رنگ‌امیزی می‌کنیم. یک رأس v سفید رنگ‌امیزی شده هرگاه $v_x + v_y$ عددی زوج باشد؛ در غیر این‌صورت سیاه رنگ شده است. یک گراف