«بسمه تعالي»

دانشگاه مازندران

دانشکده علوم پایه

عنوان:

ایده ال های اول وطیف اول ابرحلقه های فازی

جهت اخذدرجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض

اساتید راهنما:

دکتررضا عامری

دکترحسین هدایتی

نگارش:

مرضیه عوضعلی پور

آذر ۱۳۸۷

خداوند منان را شاکروسپاسگزارم که به من توفیق عنایت فرمود تا مقطع کارشناسی ارشد را با نوشتن متن حاضربه پایان برسانم، ودراین دوره از وجود پرثمر اساتید بزرگواری بهره مند شوم حال وظیفه خود می دانم ، که از دو استاد گرانقدر وبزرگوارم ، آقایان دکتر رضا عامری ودکتر حسین هدایتی که در تمام مدت تحصیل وتهیه این رساله با صبر وشکیبایی بیدریغ خودشان مرا راهنمایی نمودند ودر این مدت روحیه دانش پژوهی وهمکاری را در من بوجود آوردند ، قدردانی وسپاسگزاری نمایم . از خداوند منان توفیقات بیشتری برای ایشان خواستارم.

همچنین از داوران گرامی آقایان دکتر یحیی طالبی و دکتر اصغر طالبی که داوری این رساله را به عهده داشته اند تشکر وسپاسگزاری می نمایم.

تقدیم به:

صبورترین:**مادرعزیزم**

استوارترین:**پدرمهربانم**

تاریخچه ومقدمه ابرساختارها

در سال ۱۹۳۴،مارتی(Marty)[۱۳] درچهارمین کنگره ریاضیدانان کشورهای اسکاندیناوی، برای اولین بار تعریف ابرگروه را ارائه نمودوبعضی ازخواص آن راتشریح کرد،بنابراین می توانیم سال ۱۹۳۴راسال پیدایش ابرساختارها بدانیم.

بعدها کراسنر(Krasner)وکونتزمن(Kuntzman) وکریست(Croisot) درفرانسه و Dresher ،Ore،Eaton،Wall،Compaigne،Griffith وPrenwotizدرایالت متحده وUtumiدرژاپن وDietzmanوVikrovدرروسیه وZappaدرایتالیا،دراین زمینه تحقیقاتی رابه عمل آوردند،این نظریه راتعمیم داده ونتایج مختلفی رادر رابطه باآنهابدست آوردند.

دردهه پنجاه،Drbohlavدرچکسلواکی روی کلاس هایی ازابرگروهها کارکرد وBoccionoiدرایتالیا روی شرایط شرکت پذیری درابرگروه رامورد مطالعه قراردادودردهه شصت،Orsatiدرایتالیاتحقیقاتی دراین زمینه به عمل آوردوPickettوGraetzerدرایالات متحده،مفاهیم مختلفی رادرزمینه چندجبرهاگسترش دادندوNakanoدرژاپن چندمدولهاراموردمطالعه قرارداد.

درفرانسهSad روی ابرگروهوارها کار کرد،دریونان Mittasنظریه ابرگروههای کانونی رابنانهاد ودرایالات متحده Rothاین نظریه راموردبررسی قرارداد.

PrenowitsوJantosciakفضاهای الحاقی راتجزیه وبررسی کرده وآنهارادرهندسه به کاربردندوKoskasدرفرانسه،شرکت پذیری نیم ابرگروهوارراابررسی کرد وMcMullenدراسترالیا،نظریه ای جبری ازابرگروههاراگسترش داده ودرآنالیزهارمونیک مورداستفاده قراردادند.بعدهادرایتالیا پرفسورکرسینی(Corsini) درگسترش وتعمیم این نظریه فعالیت کرد که همچنان فعال است[۵,۴].درآتنMassouros روی ابرحلقه ها وابرمیدان هاوابرمدول ها مطالعات زیادی به عمل آوردودرایالات متحده نیزComerروی ابرگروهها وابرگروههای شبه کانونی کارکرد.

خوشبختانه درسال های اخیردرایران نیز کارهای بسیاری درزمینه ابرساختارها وابرساختارهای فازی توسط افرادی نظیر دکترزاهدی، دکترعامری، دکتر حسن خانی، دکتردواز،دکتربرزویی ودکترایرانمش ودیگران انجام شده است که حاصل آن مقالات بسیاری دراین زمینه می باشد که برخی ازآنها در قسمت منابع ذکرشده است[۸,۶,۲,۱].درحال حاضرنیزدرسطح دنیا سمینارهایی

درارتباط باابرساختارهای جبری هرساله برگزار می شود که مهمترین آنها کنفرانس ابرساختارهای جبری وکاربردهای آن است که هرسه سال یکبار برگزارمی گردد[۷, ۱۴].

نظریه مجموعه فازی درسال ۱۹۶۵توسط پرفسورلطفی عسگرزاده دانشمندایرانی تبارواستاد دانشگاه برکلی آمریکا،عرضه شد .این نظریه ازاززمان ارائه آن تاکنون گسترش وتعمیم زیادی یافته وکاربردهای گوناگونی درزمینه های مختلف پیداکرده است.به ویژه رزنفلداولین مقاله رادرزمینه گروههای فازی ارائه کردسپس محققین بسیاری دراین زمینه کارکرده اندازجمله,[۱۰,۱۲].امروزه نظریه ابرساختارهای جبری ونظریه فازی گسترش متقابلی درهم داشته اند وطی سالهای اخیر مقالات متعددی درکاربردنظریه فازی درابرساختارها وبالعکس منتشرگردیده است.

بویژه ابرحلقه هاوابرایده الهای فازی توسط دکتر زاهدی،دکترعامری،دکتردوازمورد مطالعه قرارگرفته اند.حال مادراین پایان نامه به مطالعه ابرایده الهای اول یک ابرحلقه می پردازیم.بویژه طیف اول یک ابرحلقه را معرفی کرده وخواص اساسی آنها راارئه می کنیم.درخاتمه مفهوم طیف اول فازی ابرحلقه ها راارائه کرده وویژگی توپولوژیکی طیف اول ابرایده الهای اول را مورد مطالعه قرار می دهیم.

چکیده:

هدف این رساله مطالعه ابرحلقه هاوابرایده الهای فازی آن می باشد.بدین منظور ابتدامفهوم یک ابرایده ال فازی را تعریف کرده سپس خواص اساسی آنها راموردبررسی قرار می دهیم .درادامه به بررسی خواص طیف اول حلقه های معمولی و(فازی) آن می پردازیم سپس توپولوژی طیف اول را مورد بررسی قرار می دهیم.سرانجام طیف اول ابرحلقه های معمولی را معرفی می کنیم سپس توپولوژی طیف اول آنهاراموردمطالعه قرارمی دهیم همچنین ابرایده الهای اول فازی را معرفی کرده وبه بررسی خواص آنها می پردازیم.به خصوص آنکه توپولوژی طیف اول ابرایده الهای فازی را بررسی کرده ونتایج مربوط به طیف اول آن هارا بدست می آوریم.

فهرست مطالب

فصل اول

پیش نیازها

مقدمه :

در این فصل تعاریف و پیش نیازهایی را که در فصل های آتی مورد استفاده قرار خواهند گرفت ، ارائه می گردد.مطالب این فصل عمدتا" از منابع [٤،٥] گرفته شده است.

۱-۱مروری بر حلقه ها و ابر حلقه ها

۱-۱-۱- تعریف . مجموعه ای ناتهی مانند R همراه با عمل دوتایی روی R به طوری که به ازای هر $a,b,c \in G$ ، $a(bc)=(ab)c$ و (شرکت پذیر) باشد را یک نیم گروه می گوئیم .

۱-۱-۲- تعریف . سه تایی $(R,+,\cdot)$ را یک نیم حلقه گوئیم، هرگاه :

(۱) $(R,+)$ یک نیم گروه باشد،

(۲) $(R,\cdot)$ یک نیم گروه باشد ،

(۳)توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع ازچپ و راست برقرار باشد ، یعنی به ازای هر $a,b,c \in R$ ،

$$(a+b).c = a.c + b.c$$

$$a.(b+c) = a.b + a.c$$

۱-۱-۳- تعریف . سه تایی $(R,+,\cdot)$ را یک حلقه گوئیم هر گاه :

(۱) $(R,+)$ یک گروه آبلی باشد ،

(۲) $(R,\cdot)$ نیم گروه باشد ،

(۳)توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع از چپ و راست برقرار باشد .

یک ابر عمل روی مجموعه ناتهی H ، تابعی مانند "$\circ$" است که :

$$\circ : H \times H \to P_*(H)$$

که در آن $P_*(H)$ مجموعه تمام زیر مجموعه های ناتهی H می باشد . به طور طبیعی می توان عمل $\circ$ را به زیر مجموعه های H نیز گسترش داد. بدین صورت که برای زیر مجموعه های ناتهی A,B از H

$$A \circ B = \bigcup_{a \in A, b \in B} a \circ b$$

$$A \circ x = A \circ \{x\}$$

$$x \circ B = \{x\} \circ B$$

هر گاه "$\circ$" یک ابر عمل روی H باشد $\langle H,\circ \rangle$ را یک ابر گروهوار می نامیم .

۱-۱-٤- مثال . مجموعه اعداد طبیعی به همراه "$\circ$" یک ابر گروهوار است .

$$\circ : N \times N \to P_*(N)$$
$$n \circ m = \{n, m, n+m, nm\}$$

۱-۱-٥- تعریف . ابر گروهوار $\langle H,\circ \rangle$را یک نیم ابر گروه می نامیم ، هر گاه برای هر $x, y, z \in H$ ،

(1)شرکت پذیری $\quad (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

۱-۱-٦- تعریف . ابر گروهوار $\langle H,\circ \rangle$ را شبه ابر گروه می نامیم هر گاه برای $x \in H$ ،

(2)اصل تکثیر یا مولد بودن $\quad x \circ H = H \circ x = H$

که$H \circ x = \bigcup_{h \in H} (h \circ x)$ و یا به طور معادل:

برای هر $x, y \in H$ ،عناصر u,vدر Hموجود هستند که $y \in xou \bigcap vox$. زیرا

$$x \circ H = H \circ x = H = H \circ y = y \circ H$$

از طرفی داریم:

$$y \in H = x \circ H \Rightarrow y \in x \circ H \Rightarrow \exists u \in H \quad s.t \quad y \in x \circ u \ (1)$$

$$y \in H = H \circ x \Rightarrow y \in H \circ x \Rightarrow \exists v \in H \quad s.t \quad y \in v \circ x \ (2)$$

از دو رابطه (1) و (2) نتیجه می شود که :

$$\exists u, v \in H \quad s.t \quad y \in xou \bigcap vox .$$

ابر گروهوار $\langle H,\circ\rangle$ را ابر گروه گوئیم هر گاه در شرایط(1) و (2)صدق کند یعنی ابر گروه ، ابر گروهواری است که دارای خاصیت شرکت پذیری و مولد بودن است .

۱-۱-۷- تعریف . فرض کنیم H یک مجموعه غیر تهی باشد اگر $+: H\times H \to P^*(H)$ یک نگاشت باشد به طوریکه شرایط زیر برقرار باشد گوئیم $\langle H,+\rangle$ یک ابر گروه کانونی است .

(۱)برای هر $x,y,z\in H$ ، $x+(y+z)=(x+y)+z$ ،

(۲)برای هر $x,y\in H$ ، $x+y=y+x$ ،

(۳) $0\in H$ موجود است به طوریکه برای هر $x\in H$ ، $0+x=\{x\}$ ،

(٤)برای هر $x\in H$ ،عنصر یکتای x' موجود باشد به طوریکه $0\in x+x'$ ، x' معکوس x است وبانماد $-x$ نمایش داده می شود،

(٥)برای هر $x,y,z\in H$ ، $z\in x+y$ آنگاه $x\in z-y$.

۱-۱-۸- تعریف . فرض کنیم $A\subseteq H$ باشد گوئیم A زیرا بر گروه H است اگر $0\in H$ ،و $(A,+)$ خودش ابر گروه باشد .

۱-۱-۹- تعریف . ابر گروه کانونی $(R,+)$ با ترکیب درونی "."ابر حلقه نامیده می شود اگر

(۱) $(R,\cdot)$ یک نیم گروه ضربی باخاصیت جذب دوطرفه عنصر 0 یعنی برای هر $x\in R$ ، $0.x=x.0=0$ ،

(۲)برای هر $x,y,z\in R$ ، $z(x+y)=zx+zy$ و $(x+y)z=xz+yz$.

۱-۱-۱۰- تعریف. (۱)یک ابر حلقه $(R,+,\cdot)$ جابجایی نامیده می شود اگر برای هر $x,y\in R$ داشته باشیم $xy=yx$ ،

(۲) $(R,+,\cdot)$ راابرحلقه یکدار گوئیم هر گاه عضو $1\in R$ موجود باشد به طوریکه برای هر $x\in R$ داشته باشیم $1\cdot x=x.1=x$.

۱-۱-۱۱- تعریف.به یک ابر حلقه جابجایی یکدار $(R,+,\cdot)$ ابر میدان گفته می شود اگر $R\setminus\{0\}$ یک گروه ضربی باشد .

یک ابرحلقه $(R,+,\cdot)$ حوزه صحیح نامیده می شود اگر R ابر حلقه جابجایی با عنصر همانی باشد و $ab=0$ نتیجه دهد $a=0$ یا $b=0$ برای هر $a,b\in R$.

یک زیر مجموعه غیر تهی A از R را زیر ابر حلقه گوئیم اگر $(A,+,\cdot)$ خودش ابر حلقه باشد .

۱-۱-۱۲- مثال . فرض کنیم R یک حلقه جابجایی با عنصر همانی باشد فرض $\overline{R}=\{\overline{x}=\{x,-x\}\mid x\in R\}$ سپس $\overline{R}$ به ترتیب با ابر **عمل جمع** $x\oplus y=\{\overline{x+y},\overline{x-y}\}$ و ضرب $\overline{x\otimes y}=x.y$ یک ابر حلقه است .

۱-۱-۱۳- تعریف . یک زیر مجموعه غیر تهی I از ابر حلقه R ، ابر ایده ال چپ یا (راست) از R نامیده می شود اگر برای هر $x\in I$, $r\in R$ ،آنگاه $rx\in I$ یا $(xr\in I)$.

I یک ابر ایده ال است اگر I ا بر ایده ال چپ و راست باشد و آن را با نماد $I\lhd R$ نمایش می دهیم .

۱-۱-۱۴- لم . یک زیر مجموعه غیر تهی I از ابر حلقه R یک ابر ایده آل چپ (راست) است اگر و تنها اگر

(الف) $\forall a,b\in I\Rightarrow a-b\subseteq I$ ،

(ب)برای هر $,x\in I,r\in R$ $rx\in I$ یا $(xr\in R)$.

۱-۱-۱۵- تعریف . به یک ابر ایده ال سره P از ابر حلقه R اول گفته می شود اگر برای هر دو ابرایده آل U,V از R داشته باشیم $UV\subseteq P$ آنگاه $U\subseteq P$ یا $V\subseteq P$.

۱-۱-۱۶-لم. اگر $P \neq R$ یک ابرایده ال ازابرحلقه R باشدآنگاه P اول است اگر داشته باشیم:

$$ab \in P \Rightarrow \qquad a \in p \qquad \text{یا} \qquad b \in P.$$

مجموعه تمام ابر ایده الهای اول R طیف اول R نامیده می شود و با نماد $Spec(R)$ نمایش داده می شود .

$$SpecR = \{P \mid \text{است } R \text{ ابر ایده آل اول } P\}.$$

۱-۱-۱۷- تعریف . به ابر ایده ال $Q \neq R$ اولیه گفته می شود اگر $ab \in Q$ و $a \notin Q$ نتیجه دهد $b^n \in Q$ برای $n \in N$.

فرض کنیم R یک ابر حلقه باشد در این صورت به ابر ایده ال M از R ماکسیمال گوئیم اگر برای هر ابر ایده آل N از R ، $M \subseteq N \subseteq R$ داشته باشیم $M = N$ یا $N = R$.

فرض کنیم A ، B زیر مجموعه های غیر تهی از ابر حلقه R باشند جمع $A + B$ را به صورت زیر تعریف می کنیم ،

$$A + B = \{t \mid t \in a + b \ ; \ a \in A, b \in B\}.$$

حاصلضرب AB را به صورت زیر تعریف می کنیم ،

$$AB = \{t \mid t \in \sum_{i=1}^{n} a_i b_i ; \ a_i \in A \ , \ b_i \in B \ , \ n \in N\}.$$

یک زیر مجموعه S از یک ابر حلقه جابجایی یکدار را ضربی گوئیم اگر و تنها اگر $1 \in S$ باشد و برای هر $x, y \in S$ داشته باشیم $xy \in S$.

۱-۱-۱۸- تعریف . فرض کنیم X یک مجموعه باشد یک توپولوژی روی X یک خانواده A از زیر مجموعه های X است که در شرایط زیر صدق می کند:

(۱) $\phi, X \in A$ ،

(۲)اجتماع هر تعداد از عناصر A به A تعلق دارد ،

(۳)اگر $B, C \in A$ آنگاه $B \cap C \in A$.

۱-۱-۱۹- تعریف . فضای (X, A) را T_0 گوئیم هر گاه به ازای $x_1, x_2 \in X$, که $x_1 \neq x_2$ همسایگی بازی چون U موجود باشد به طوری که شامل یکی باشد ولی شامل دیگری نباشد .

۱-۱-۲۰- تعریف . فرض کنیم (X, A) یک فضای توپولوژیکی باشد $\beta \subseteq A$ ، β را یک پایه A گوئیم هرگاه هر مجموعه باز A ، به صورت اجتماعی از عناصر β باشد(یا به طور معادل)، اگر X یک فضای توپولوژیکی باشدو $\beta \subseteq A$ آنگاه β پایه ای برای A است اگر و تنها اگر به ازای هر مجموعه باز A چون u و هر $x \in u$ ، β عضوی چون L داشته باشد به قسمی که $x \in L \subseteq u$.

۱-۱-۲۱- تعریف . یک نقطه x از فضای توپولوژیکی X را نقطه بسته گوئیم اگر مجموعه $\{x\}$ در X بسته باشد .

۱-۲مروری بر نظریه مجموعه های فازی

۱-۲-۱- تعریف . فرض کنیم A یک مجموعه ناتهی باشد یک زیر مجموعه فازی از A ، یک تابع, $\mu : A \to [0,1]$ است که به هر عضو A ، یک عدد بین 0 و 1 متناظر می کند در این صورت μ را یک زیر مجموعه فازی از A می نامیم . مجموعه تمام زیر مجموعه های فازی A را با نماد $FS(A)$ نمایش می دهیم.

فرض کنیم A یک مجموعه ناتهی باشد و تابع $\mu : A \to [0,1]$ یک مجموعه فازی از A باشد در این صورت متمم فاری A ، $\bar{\mu}$ یا μ^c را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\bar{\mu}(x) = 1 - \mu(x) \ .$$

فرض کنیم A یک مجموعه ناتهی و μ یک زیر مجموعه فازی از A باشد زیر مجموعه های تراز μ یا α–برش μ را به صورت زیر تعریف می کنیم .

$$\mu_\alpha = \{x \in A \mid \mu(x) \geq \alpha\}$$

که در آن $\alpha \in \mathrm{Im}(\mu) \subseteq [0,1]$.

۱-۲-۲- تعریف . فرض کنیم μ_1 یک مجموعه فازی روی A_1 و μ_2 یک مجموعه فازی روی A_2 باشد مجموعه فازی $\mu_1 \times \mu_2$ را روی $A_1 \times A_2$ به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$(\mu_1 \times \mu_2)(x_1, x_2) = \min(\mu_1(x_1), \mu_2(x_2)) \ .$$

فرض کنیم A یک مجموعه ناتهی باشد تابع مشخصه A به صورت زیر تعریف می شود :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \ .$$

واضح است که χ_A یک زیر مجموعه فازی از A است ، $\mathrm{Im}(\chi_A) = \{0,1\}$.

فرض کنیم f یک نگاشت از مجموعه X به مجموعه Y باشد و μ هر زیر مجموعه فازی از Y باشد در این صورت $f^{-1}(\mu)$ زیر مجموعه فازی است از Y است که به صورت زیر تعریف می شود :

$$f^{-1}(\mu)(x) = \mu(f(x)) \ .$$

فرض کنیم λ زیر مجموعه فازی از مجموعه X باشد . دراین صورت $f(\lambda)$ ، زیر مجموعه فازی از Y است که به صورت زیر تعریف شده است :

$$f(\lambda)(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \{\lambda(x) \mid x \in f^{-1}(y)\} & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & f^{-1}(y) = \phi \end{cases} \ .$$

۱-۲-۳- تعریف . اگر $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده ای از زیر مجموعه های فازی X باشد آنگاه اشتراک و اجتماع این خانواده به صورت زیر می باشد :

(الف) برای هر $x\in X$ ، $(\bigcap_{\alpha\in I}\mu_\alpha)(x)=\inf\{\mu_\alpha(x)\}_{\alpha\in I}$ ،

(ب) برای هر $x\in X$ ، $(\bigcup_{\alpha\in I}\mu_\alpha)(x)=\sup\{\mu_\alpha(x)\}_{\alpha\in I}$.

۱-۲-٤- تعریف . فرض کنیم G یک گروه باشد زیرمجموعه فازی $\mu:G\to[0,1]$ را یک زیر گروه فازی از G می نامیم و آن را با نماد $(G:\mu)$ نشان می دهیم هر گاه برای هر $x,y\in G$ داشته باشیم .

(۱) $\mu(xy)\ge\min\{\mu(x),\mu(y)\}$ ،

(۲) $\mu(x^{-1})\ge\mu(x)$.

۱-۲-۵- تعریف . برای $\mu,\nu\in FS(X)$ گوئیم μ زیر مجموعه ν است و می نویسیم $\mu\subseteq\nu$ اگر برای هر $x\in X$ ، $\mu(x)\le\nu(x)$.

فرض کنیم $x\in X$ و $t\in[0,1]$ در این صورت به زیر مجموعه فازی x_t که طبق ضابطه زیر تعریف می شود یک نقطه فازی از X گوئیم .

$$x_t(y)=\begin{cases} t & \text{اگر } x=y \\ 0 & \text{اگر } x\neq y \end{cases}.$$

فرض کنیم Y و X دو مجموعه غیر تهی باشدو $f:X\to Y$ یک نگاشت باشددر این صورت $\mu\in FS(X)$ را f –پایا گوئیم . اگر $f(x)=f(y)$ نتیجه دهد $\mu(x)=\mu(y)$ برای هر $x,y\in X$.

۱-۲-٦- تعریف . یک توپولوژی فازی،یک خانواده τ از زیر مجموعه های فازی در X می باشد که در شرایط زیر صدق می کند:

(۱) $\phi, X \in \tau$ ،

(۲)اجتماع هر تعداد از عناصر τ به τ تعلق دارد ،

(۳)اگر $B \in \tau$ و A آنگاه $A \cap B \in \tau$.

زوج (X,τ) یک فضای توپولوژیکی فازی نامیده می شود.

فصل دوم

ابرحلقه هاوابرایده الهای فازی

مقدمه:

این فصل مشتمل بردوبخش است در بخش اول به بررسی خواص ابرایده الهای فازی می پردازیم سپس همریختی ابرحلقه های فازی را معرفی خواهیم کردودر بخش دوم h – ایده الها و k – ایده الهای فازی را معرفی می کنیم وبه بررسی خواص آنها می پردازیم.مطالب این فصل عمدتا" از منابع [۱۶،۵،۲] گرفته شده است.

۲-۱-خواص مقدماتی ابرایده ا لهای فازی

دراین بخش R یک ابرحلقه است.

۲-۱-۱-تعریف. فرض کنیم $\mu \in FS(R)$ باشد دراین صورت μ یک ابرایده ال چپ(راست)فازی از R است اگرو تنها اگر برای هر $x, y \in R$ داشته باشیم:

(۱) $\underset{z\in x-y}{\wedge}\mu(z) \geq \min(\mu(x),\mu(y))$ ،

(۲) $\mu(xy) \geq \mu(y)$ یا $\mu(xy) \geq \mu(x)$.

۲-۱-۲-تعریف. μ یک ابر ایده ال فازی از R است اگر هم ابر ایده ال چپ فازی وهم ابر ایده ال راست فازی باشد یعنی برای هر $x, y \in R$ داشته باشیم:

(۱) $\underset{z\in x-y}{\wedge}\mu(z) \geq \min(\mu(x),\mu(y))$ ،

(۲) $\mu(xy) \geq \max\{\mu(x),\mu(y)\}$.

۲-۱-۳-تعریف.فرض کنیم R یک ابرحلقه باشد ، گوئیم μ یک زیر ابرحلقه فازی از R است اگر به ازای هر $x, y \in R$ داشته باشیم:

(۱) $\underset{z\in x-y}{\wedge}\mu(z) \geq \min(\mu(x),\mu(y))$ ،

(۲) $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x),\mu(y)\}$.

مجموعه تمام زیر ابر حلقه های فازی R رابا $FR(R)$ نمایش می دهیم.

۲-۱-٤-مثال. اگر R یک ابر حلقه باشد ،زیر مجموعه فازی μ بر R را برای هر $x \in R$ به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \alpha & x \neq 0 \end{cases}$$

که $0 \leq \alpha \prec 1$ است آنگاه μ یک زیر ابر حلقه فازی از R می باشد.

۲-۱-۵-لم. شرط (۱)از تعریف۲-۱-۳معادل با دو شرط زیر است:

(الف) $\mu(x) = \mu(-x)$ برای هر $x \in R$ ،

(ب) $\bigwedge_{z \in x+y} \mu(z) \geq \min(\mu(x), \mu(y))$.

اثبات: فرض کنیم شرط(۱) از تعریف۲-۱-۳برقرار باشد در این صورت برای هر $x \in R$ داریم،

$$\mu(0) = \bigwedge_{z \in x-x} \mu(z) \geq \min(\mu(x), \mu(x)) = \mu(x)$$

پس $\mu(0) \geq \mu(x)$ برای هر $x \in R$ لذا،

$$\mu(-x) = \bigwedge_{z \in 0-x} \mu(z) \geq \min(\mu(0), \mu(x)) = \mu(x)$$

با تعویض نقش x و $-x$ در رابطه فوق نتیجه می شود که،

$$\mu(x) = \bigwedge_{z \in 0-(-x)} \mu(z) \geq \min(\mu(0), \mu(-x)) = \mu(-x)$$

در نتیجه به ازای هر $x \in R$ داریم $\mu(-x) = \mu(x)$ پس (الف)برقرار است.

حال بنا به فرض وبا استفاده از (الف) داریم،

$$\bigwedge_{z \in x+y} \mu(z) = \bigwedge_{z \in x-(-y)} \mu(z) \geq \min(\mu(x), \mu(-y))$$

$$= \min(\mu(x), \mu(y)) \qquad \forall x, y \in R$$

یعنی(ب)نیز برقرار است.

بر عکس. فرض کنید که (الف)و(ب) برقرار باشددراین صورت،

$$\bigwedge_{z \in x-y} \mu(z) = \bigwedge_{z \in x+(-y)} \mu(z) \geq \min(\mu(x), \mu(-y)) = \min(\mu(x), \mu(y)) \qquad \forall x, y \in R$$