٦/ مص
٤٤

بسم الله الرحمن الرحيم

١١٥٣٧٨

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده علوم- گروه فیزیک

پایان نامهٔ کارشناسی ارشد فیزیک

(گرایش ذرات بنیادی)

عنوان:

پایداری سیستمِ فرمیون- سالیتون

دانشجو:

وحیده آزادی

استاد راهنما:

دکتر سیامک سادات گوشه

استاد مشاور:

دکتر حمیدرضا سپنجی

شهریور ۱۳۸۷

دانشگاه شهید بهشتی

تاریخ ....
شماره ....
پیوست..............................

بسمه تعالی

« صورتجلسه دفاع پایان نامه دانشجویان دوره کارشناسی ارشد»

ن ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین
: ۲۹۹۰۱

بازگشت به مجوز دفاع شماره ۲۰۰/۲۱۶۹/د مورخ ۱۳۸۷/۵/۲۶ جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان نامه خانم وحیده آزادی به شماره شناسنامه ۳۲۶۳۴صادره ازتهران متولد۱۳۶۰دانشجوی دوره کارشناسی ارشد ناپیوسته رشته فیزیک- ذرات بنیادی و نظریه میدانها

با عنوان :

پایداری سیستم فرمیون - سالیتون

به راهنمائی:

دکترسیامک سادات گوشه

طبق دعوت قبلی در تاریخ ۲۳ / ۶ /۱۳۸۷تشکیل گردید و براساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمره هجده و نیم **و درجه** عالی **مورد تصویب قرار گرفت.**

۱ -استاد راهنما: آقای دکتر سیامک سادات گوشه

۲- استاد مشاور: آقای دکتر حمیدرضا سپنجی

۳- استاد داور: آقای دکتر شهریار بایگان

۴- استاد داورونماینده تحصیلات تکمیلی : آقای دکتر کراسوس غفوری تبریزی

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر سیامک سادات گوشه سپاسگزاری می کنم که من را در این مسیر همواره هدایت کردند و امید بخشیدند.

چکیده

سالیتون ها و امواج سالیتونی جواب های خاصی از برخی معادلات غیرخطی در نظریه ی میدان ها هستند. یکی از پدیده های عجیبی که در نظریه ی میدان های اتفاق می افتد زمانی است که فرمیون ها با سالیتون ها برهمکنش می کنند. زیرا هنگامی که طیف انرژی سیستم فرمیون- سالیتون شامل یک حالت مقید با انرژی صفر باشد، عدد فرمیونی کسری می شود. این پدیده به طور گسترده مورد مطالعه قرارگرفته- است. ما پایداری موج سالیتونی نظریه ی $\lambda\varphi^4$ را در سطح کلاسیک برای سیستمی که میدان اسکالر به شکل توانی به فرمیون ها جفت شده را در (۱+۱) بعد نشان داده ایم. ما افت و خیزهای میدان اسکالر را اطراف جواب مستقل از زمان میدان مورد مطالعه قرار دادیم و دریافتیم که سالیتون پایدار است به این علت که هیچ فرکانس موهومی در طیف معادله پایداری سیستم وجود نداشت. به عبارت دیگر، اختلال کوچک به شکل نوسانی و با فرکانس حقیقی در زمان افت و خیز می کند. مقادیر ویژه ی معادله پایداری سیستم به واسطه ی ناوردایی سیستم تحت انتقال شامل یک فرکانس صفر است.

کلمات کلیدی: پایداری؛ فرمیون- سالیتون.

فهرست

فهرست اشکال

مقدمه

سالیتون ها و امواج سالیتونی جواب های غیراختلالی برخی از معادله های غیرخطی در نظریه ی میدان ها هستند. این امواج بسته موج های جایگزیده و غیرپاشنده ی انرژی هستند که بدون تغییر شکل در فضا حرکت می کنند. این امواج دو خصوصیت ویژه دارند، اول این که بدون تغییر شکل و واپیچیدگی در فضا حرکت می کنند و دوم این که اگر دو بسته موج سالیتونی کاملاً جدا از هم وجود داشته باشد این دو بسته موج بدون واپیچش و تغییر شکل به هم دیگر می رسند. در زمان محدود به همدیگر برخورد می کنند اما بعد از برخورد آن ها در حالت حدی $t \to \infty$ از هم جدا می شوند که این دو بسته موج جدا شده از نظر شکل و سرعت مشابه بسته موج های اولیه قبل از برخورد هستند. به عبارتی این دو بسته موج بدون هیچ تغییر شکل و تغییر سرعتی از همدیگر عبور می کنند. به امواجی که خصوصیت اول را داشته باشند امواج سالیتونی و به امواجی که هر دو خصوصیت را با هم داشته باشند سالیتون گفته می شود. این امواج به علت این دو خصوصیت در زمینه های مختلف فیزیک مورد توجّه خاص قرار گرفته است.

ما در قسمتی از کار به بر همکنش فرمیون ها با این نوع از امواج خاص می پردازیم. به عبارتی برهمکنش فرمیون- سالیتون را بررسی می کنیم. یکی از پدیده های جالب توجه ای که در نظریه ی میدان ها اتفاق- می افتد برهمکنش فرمیون با سالیتون ها است، این پدیده از این نظر جالب توجه است که این نوع برهمکنش موجب به وجود آمدن عدد فرمیونی نیمه صحیح می شود. بارهای نیمه صحیحی که این جا مورد نظر است ویژه مقدارهای عملگر شمارش[1] در نظریه ی میدان ها هستند.

[1] Number operator

این پدیده اولین بار توسط Jackiw و Rebbi درسال ۱۹۷۶ مورد بررسی قرار گرفت. آن ها میدان فرمیونی را در نظر گرفتند که با یک میدان اسکالر به شکل سالیتون برهمکنش می کند و استنتاج کردند زمانی که طیف انرژی سیستم شامل حالت های مقید با انرژی صفر باشد، عدد فرمیونی سالیتون نیمه صحیح و برابر با $\pm\frac{1}{2}$ می شود. قبل از این چنین پدیده ای در زمینه ی فیزیک ماده چگال به طور گسترده مورد مطالعه قرارگرفته بود. مطالعه روی این پدیده در حال حاضر به طورگسترده در ضمینه های ماده چگال؛ پلی استیلن، به عنوان یک مثال استاندارد؛ و فیزیک انرژی های بالا انجام می شود.

لاگرانژی سیستمی که ما در این جا مورد بررسی قرار دادیم شامل میدان نرده ای و برداری است که میدان نرده ای بوزون ها را توصیف می کند و میدان برداری فرمیون ها را، البته لازم به ذکر است که ما در (۱+۱) بعد فضا و زمان محاسبات را انجام داده ایم. لاگرانژی سیستم به جز جملات انرژی جنبشی برای میدان- نرده ای و برداری شامل پتانسیل نظریه ی $\lambda\varphi^4$ برای برهمکنش بوزون با بوزون و عبارت $\bar{\psi}(me^{i\gamma_5\varphi})\psi$ است که برهمکنش فرمیون ها با بوزون ها را نشان می دهد که از طریق جرم فرمیون، m صورت گرفته- است. در عبارت بالا φ میدان نرده ای است که بوزون ها (سالیتون ها) را توصیف می کند و ψ میدان برداری است که فرمیون ها را نشان می دهد. البته معادله حرکت سیستمی که ما در این جا در نظر گرفتیم هنوز نه تحلیلی و نه عددی حل نشده است، اما برای این که نسبت به این سیستم و برهمکنش فرمیون ها و سالیتون ها دیدی پیدا کنیم در فصل دوم به تفصیل درباره ی این سیستم اما در حالتی که سالیتون ها را به سیستم تجویز کنیم یا به عبارتی نمو میدان نرده ای را کنار بگذاریم، می پردازیم. که اطلاعاتی که ما در این جا آورده ایم با استفاده از نتایج مقاله ی آقایان *Gousheh* و *López-Mobilia* [1] بوده است.

تا این جای کار هر چه آورده شد مربوط بود به معرفی سیستمی که ما روی آن کار کردیم ولی هدفی که ما در این جا دنبال کردیم بررسی پایداری این سیستم (فرمیون- سالیتون) است. از آن جایی که برای بررسی پایداری چنین سیستمی تا این زمان منبعی از روش ما استفاده نکرده است، بنابراین ما در این باره کمی توضیح می دهیم.

برای بررسی پایداری سالیتون از روشی که Jackiw در مقاله ی خود [2] بیان کرد استفاده کرده ایم. به عبارتی در این روش یک عبارت اختلالیِ وابسته به زمان به شکل $\xi_k(x)\exp(i\omega_k t)$ به جواب استاتیک مسأله اضافه می کنند و با قراردادن این مجموع در معادله حرکت و یک سری ساده سازی به معادله ی ویژه-

مقداری برای ω_k می رسند. با بدست آوردن این مقادیر و این که حقیقی هستند یا موهومی می توان دریافت که افت و خیزهای میدان حول جواب استاتیک میدان اسکالر چگونه است.

اگر افت و خیزها به شکل توانی(صعودی یا نزولی) رشد کنند یا به عبارتی ω_k موهومی باشد نشانی بر عدم وجود پایداری در سیستم است، و در حالتی عکس این یعنی اگر اختلالِ کوچکی که به سیستم وارد کردیم به شکل نوسانی با زمان تغییر کند آن گاه پایداری در سیستم وجود دارد. ما در فصل سوم به بررسی پایداری پرداخته ایم. اطلاعات ما در سطح کلاسیک اعتبار دارد به این علت که ما تصحیحات کوانتومی را در نظر نگرفتیم.

اگر علاقمند به مشاهده ی نتیجه بررسی هستید که آیا در سیستم فرمیون – سالیتون پایداری وجود دارد و یا این که به جزییات بررسی پایداری علاقمند هستید به فصل سوم نگاه کنید.

فصل اول

امواج سالیتونی[۱] و سالیتون ها[۲]

۱-۱ مقدمه

سالیتون ها و امواج سالیتونی جواب های خاصی از معادله موج های غیرخطی هستند. برای درک بهتر این نوع جواب ها، ما برخی از خصوصیات معادله موج های نسبیتی را یاد آوری می کنیم. معادله موج زیر را در نظر بگیرید

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi = 0, \qquad (۱-۱)$$

که در آن $\varphi(x,t)$ یک میدان اسکالر در (۱+۱) بعد است و c سرعت نور.

این معادله یک معادله خطی و غیرپاشنده است و جواب های آن دارای دو خاصیت زیر می باشد:

۱. هرتابع خوش رفتار و حقیقی به شکل $f(x \pm ct)$ جواب (۱-۱) است به عبارتی اگر ما تابع جایگزیده ی f را انتخاب کنیم، می توانیم یک موج جایگزیده بسازیم که با سرعت $\pm c$ ، بدون تغییرشکل و واپیچیدگی حرکت کند. وجود این خصوصیت از این ناشی می شود که موج های تخت

---

۱ Solitary wave

۲ Soliton

$\cos(kx \pm \omega t), \sin(kx \pm \omega t)$ با $\omega = kc$ مجموعه کاملی را تشکیل می دهند که جواب معادله ی (۱-۱) هستند بنابر این هر تابع خوش رفتار و جایگزیده $f(x-ct)$ ، را می توان بر حسب آنها نوشت

$$f(x-ct) = \int dk\, [a_1(k)\cos(kx-\omega t) + a_2(k)\, sin(kx-\omega t)]\,, \quad (۳-۱)$$

این حقیقت که بسته موج $f(x-ct)$ بدون تغییر شکل و واپیچش با سرعت c حرکت می کند ناشی از این است که همه ی مؤلفه های موج تخت با سرعت $c = \frac{\omega}{\mathrm{k}}$ حرکت می کنند بنابراین در حین حرکت شکل موج $f(x-ct)$ عوض نمی شود.

۲. از آنجایی که معادله (۱-۱) خطی است بنابراین اگر دو تابع $f_1(x-ct)$ و $f_2(x+ct)$ جواب آن باشند، جمع این دو تابع نیز جواب است، $f_3(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$ در زمان خیلی دور $f_3(x,t)$ شامل دو بسته موج کاملاً جدا از هم است که این دو بسته موج بدون واپیچش و تغییر شکل به هم دیگر می رسند. در زمان محدود به همدیگر برخورد می کنند اما بعد از برخورد آن ها در حالت حدی $t \to \infty$ از هم جدا می شوند که این دو بسته موج از نظر شکل و سرعت مشابه بسته موج های اولیه قبل از بر خورد هستند. به عبارتی این دو بسته موج بدون هیچ تغییر شکل و تغییر سرعتی از همدیگر عبور می کنند.

این دو خصوصیت که در بالا ذکر شد به وضوح برای معادله موج (۱-۱) وجود دارد چون این معادله ی ساده هم خاصیت خطی بودن و هم غیر پاشنده بودن را دارا می باشد.

اما معادله های موج در خیلی از شاخه های فیزیک خیلی پیچیده تر از معادله ای است که در بالا در باره ی آن صحبت کردیم. این معادله موج ها ممکن است شامل عبارات غیر خطی، پاشنده و عبارات شامل ترکیبی از چند نوع میدان باشند.اضافه کردن حتی عبارات ساده به (۱-۱) هم ممکن است منجر به از دست دادن دو خصوصیت جالب بالا شود. به عنوان مثال معادله ی *Klein-Gordon* را در دو بعد درنظربگیرید

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi = \left(\frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2c^2\right)\varphi = 0 \quad (۳-۱)$$

این معادله موج خطی است و جواب آن را می توان برحسب موج های تخت $\sin(kx \pm \omega t), \dot{\cos}(kx \pm \omega t)$ که دسته جواب های کاملی را می سازند بسط داد. اما در این حالت داریم $k^2c^2 + m^2c^4 = \omega^2$ ، از آن جایی که موج ها با طول موج های مختلف با سرعت های متفاوت

حرکت می کنند بنابراین معادله پاشنده است یا به عبارتی شکل موجِ در حال حرکت حفظ نمی شود. در زمان $t = 0$ موج جایگزیده به شکل زیر است

$$\int dk[a_1(k)\cos kx + a_2(k)\sin kx] \tag{۴-۱}$$

با گذشت زمان موج پخش می شود. بنابر این خصوصیت (۱) و (۲) وجود ندارد.

اما ممکن است در برخی از معادله ها عبارت های واپاشنده و غیر خطی وجود داشته باشد ولی این عبارت ها طوری بینشان تعادل بر قرار شود که باز هم خصوصیت (۱) و (۲) در مورد جواب های آنها وجود داشته باشد.این اتفاق ممکن است در یک، دو و سه بعد بیفتد.

موج هایی که خصوصیت (۱) را داشته باشند امواج سالیتونی نامیده می شوند، و زیر مجموعه ای از این موج ها که خاصیت (۲) را هم داشته باشند سالیتون نامیده می شوند، به عبارتی سالیتون ها هر دو خصوصیت (۱) و (۲) را با هم دارا می باشند.

حال می خواهیم تعریف مان از این موج ها را برحسب چگالی انرژی بیان کنیم نه بر حسب خصوصیت میدان ها. به این علت که این شکل تعریف برای سیستم مورد علاقه ما پراهمیت تر است. ما خودمان را به آن معادله میدان هایی محدود می کنیم که چگالی انرژی وابسته به آن ها $\varepsilon(x,t)$ ، تابعی از میدان های $\varphi_i(x,t)$ است و انتگرال فضایی این چگالی انرژی یا به عبارتی انرژی کل، $E[\varphi_i]$ ، بقادار است.

تعداد زیادی از معادله ها، از جمله معادله های میدان در ذرات بنیادی، این را ارضا می کنند. از آن جا که انرژی سیستم های فیزیکی از پایین کران دار است، ما می توانیم بدون از دست دادن عمومیت مسأله پایین ترین مقدار انرژی کل را مساوی صفر قرار دهیم. با این چارچوبی که ارائه کردیم، ما باید از صفت جایگزیده[۱] برای جواب های معادله میدان هایی استفاده کنیم، که چگالی انرژی آن، $\varepsilon(x,t)$ درهر زمان محدود t در فضا جایگزیده است، به عبارتی چگالی انرژی در یک منطقه ی محدود، محدود است و در بی نهایت مکانی به اندازه کافی سریع به صفر میل می کند به طوری که $\varepsilon(x,t)$ انتگرال پذیر باشد. توجه داشته باشید که برای چنین سیستم هایی $E[\varphi_i] = 0$ است، اگر وتنها اگر $\varphi_i(x,t) = 0$ باشد.

برای مثال، در نظر بگیرید که یک جمله ی غیر خطی به معادله حرکت (۱-۱) اضافه کنیم در این صورت داریم:

---

[۱] Localized

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi(x,t) + \varphi^3(x,t)=0, \qquad (۵-۱)$$

و برای انرژی این سیستم داریم،

$$E[\varphi]=\int_{-\infty}^{\infty}dx\,[\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{4}\varphi^4]\,. \qquad (۶-۱)$$

که این انرژی به ازای $\varphi(x,t)=0$ کمینه می شود. جواب های جایگزیده این سیستم در حد $x\to\pm\infty$ به ازای هر زمان داده شده به سمت صفر میل می کنند و مشتق های $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$، $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ باید در این حد صفر شوند.

حال معادله حرکت زیر را در نظر بگیرید

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi(x,t)-\varphi(x,t) + \varphi^3(x,t)=0 \qquad (۷-۱)$$

سیستم وابسته به این معادله حرکت دارای انرژی کل زیر است

$$E[\varphi]=\int_{-\infty}^{\infty}dx\,[\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{4}(\varphi^3-1)^2]\,. \qquad (۸-۱)$$

در این جا $E[\varphi]$، با قراردادن $\varphi(x,t)=\pm1$ کمینه می شود. بنابراین جواب های جایگزیده این سیستم در حد $x\to\pm\infty$ به ازای هر زمان باید به ±1 میل کند.

ما امواج سالیتونی را تعریف می کنیم به عنوان امواجی که جواب های جایگزیده و غیرتکینِ هر معادله میدان غیرخطی (یا معادله های جفت شده، زمانی که بیشتر از یک میدان وجود دارد)، که چگالی انرژی آن علاوه براین که جایگزیده باشد، دارای شکل فضا-زمانی زیر باشد،

$$\varepsilon(\vec{x},t)=\varepsilon(\vec{x}-\vec{u}t) \qquad (۹-۱)$$

که در آن $\vec{u}$ بردار سرعت است.

به عبارتِ دیگر چگالی انرژی باید بدون واپیچش[1] با سرعت ثابت حرکت کند. توجّه داشته باشید که رابطه (۱-۹) امواج سالیتونی را در یک یا بیشتر از یک بعد تعریف می کند بنابر این هر جواب جایگزیده ی استاتیک (مستقل از زمان) یک موجِ سالیتونی با سرعتِ $\vec{u}=0$ است.

[1] Distortion

حال درباره ی تعریف دوّم سالیتون ها صحبت می کنیم؛ این امواج، علاوه برخصوصیتی که امواج سالیتونی دارند یک خصوصیت اضافه نیز دارند. چند معادله ی غیر خطی درنظر بگیرید و فرض کنید که جواب های آن ها امواج سالیتونی هستند که چگالی انرژی هر کدام از آن ها تابع جایگزیده ی $\varepsilon_0(\vec{x}-\vec{u}t)$ است. حال فرض کنید جواب این سیستم در زمان های خیلی دور شامل N تا موج سالیتونی است، با سرعت اوّلیه و مکان اوّلیه اختیاری. پس چگالی انرژی $\varepsilon(\vec{x},t)$ این سیستم شکل زیر را خواهد داشت

$$\varepsilon(\vec{x},t) \to \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_0\left(\vec{x}-\overrightarrow{a_i}-\overrightarrow{u_i}t\right), \qquad as\ \ t \to -\infty \tag{۱۰-۱}$$

این شکل موج با گذشت زمان نمو خواهد کرد، حال فرض کنید رشد آن در زمان به گونه ای باشد که داشته باشیم

$$\varepsilon(\vec{x},t) \to \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_0\left(\vec{x}-\overrightarrow{a_i}-\overrightarrow{u_i}t-\overrightarrow{\delta_i}\right), \qquad as\ \ t \to +\infty \tag{۱۱-۱}$$

که در آن $\overrightarrow{\delta_i}$ ها بردارهای ثابتی هستند. به موج سالیتونی که چنین خصوصیتی داشته باشد، سالیتون می گویند. به عبارتی سالیتون ها امواج سالیتونی ای هستند که شکل کلی چگالی انرژی آن ها در حالت حدی $t \to +\infty$ به شکل وسرعت اولیه شان برمی گردند. بردارهای $\overrightarrow{\delta_i}$ احتمال این را نشان می دهد که سالیتون ها ممکن است جابه جایی در پیکرشان داشته باشند، نسبت به زمانی که با هم بر خورد نکردند. بنابراین این جابه جایی ($\overrightarrow{\delta_i}$) ، تنها اثر باقیمانده ناشی از برخورد است اگر موج ها ی برخورد کننده سالیتون باشند. آشکار است که این یک خصوصیت جالب توجّه برای جواب های یک معادله میدان غیر خطی است.

اگرچه هر سالیتون یک موج سالیتونی است، ولی آشکار است که عکس این مطلب صادق نیست. شرط (۱-۱۱) برای تعداد کمی از امواج سالیتونی برقرار است و پیدا کردن این جواب ها دشوار است. برای اینکه بازرسی کنیم معادله ی غیر خطی جوابی به شکل امواج سالیتونی دارد باید شرط (۱-۹) را بررسی کنیم. ولی بررسی این موضوع کار ساده ای نیست. اما برای اینکه اطمینان حاصل کنیم که جواب معادله ی غیرخطی یک سالیتون است، ما باید وجود شرایط (۱-۱۰) و (۱-۱۱) را بررسی کنیم.

۱-۲ موج تابیده[۱] و ناتابیده[۲]

ما در این بخش یک مثال از موج سالیتونی را به شما معرفی می کنیم. همان طور که گفتیم هر جواب جایگزیده ی استاتیک (مستقل از زمان) یک موج سالیتونی است.

چگالی لاگرانژی زیر را در نظر بگیرید

$$\mathcal{L}(x,t) = \frac{1}{2}(\dot{\varphi})^2 - \frac{1}{2}(\acute{\varphi})^2 - U(\varphi), \qquad (۱۲\text{-}۱)$$

که در آن $\varphi(x,t)$ یک میدان نرده ای در دو بعد است (یک بعد زمانی + یک بعد مکانی) و نقطه نمایشگر مشتقِ زمانی و پرایم نشان دهنده ی مشتقِ مکانی است، و سرعت نور یک در نظر گرفته شده است. پتانسیل $U(\varphi)$ تابعی از φ است که به ازای یک یا چند مقدار از φ دارای کمینه مقدارِ صفر است.

اگر کنش را برای این سیستم کمینه کنیم،

$$\delta\left(\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathcal{L}(x,t)\right) = 0 \qquad (۱۳\text{-}۱)$$

به معادله حرکت زیر برای این سیستم می رسیم

$$\ddot{\varphi} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}(x,t), \qquad (۱۴\text{-}۱)$$

این معادله ی موج ما است که عبارت غیر خطی آن به انتخابِ $U(\varphi)$ بستگی دارد. تابع انرژیِ کل برای این سیستم به شکل زیر است،

$$E[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \left[\frac{1}{2}(\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}(\acute{\varphi})^2 + U(\varphi)\right]. \qquad (۱۵\text{-}۱)$$

فرض کنید کمینه ی مطلقِ $U(\varphi)$، که مقدارِ صفر است، در M نقطه اتفاق بیفتد یا به عبارتی پتانسیل در M نقطه به کمینه مقدارِ خود برسد

$$U(\varphi) = 0 \qquad for \qquad \varphi = \varphi_0^{(i)}; \quad i = 1,\dots,M. \qquad (۱۶\text{-}۱)$$

---

[۱] Kink

[۲] Antikink

تابع انرژیِ کل زمانی که میدانِ $\varphi(x,t)$ در فضا - زمان ثابت باشد و یکی از مقدارهای $\varphi_0^{(i)}$ را اختیار کند، کمینه می شود.

حال ما علاقمند به جواب های مستقل از زمان برای معادله ی موجِ موردِ نظر هستیم بنابراین به جایِ معادله ی (۱-۱۴) معادله ی زیر را بررسی می کنیم

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = +\frac{\partial U}{\partial \varphi}(x). \qquad (۱۷-۱)$$

ما گفتیم که موج سالیتونی باید انرژی محدود و چگالی انرژیِ جایگزیده داشته باشد. بنابر این با توجه به (۱-۱۶) میدانِ φ ، زمانی که، $x \to \pm\infty$ ، باید به یکی از مقدارهایِ $\varphi_0^{(i)}$ میل کند. اگر پتانسیلِ ما فقط یک کمینه مقدار داشت، جواب مستقل از زمانِ مسئله در، $x \to \pm\infty$ به این تک مقدار میل می کند. ولی اگر پتانسیل به ازای چند مقدار φ کمینه شود یا به عبارتی $M > 1$ باشد، آن گاه $\varphi(x)$ باید در $x \to -\infty$ به یکی از $\varphi_0^{(i)}$ ها برسد، و در $x \to +\infty$ به همان $\varphi_0^{(i)}$ یا یکی دیگر از $\varphi_0^{(i)}$ ها برسد.

با در نظر گرفتن این شرایط مرزی ما می خواهیم معادله ی (۱-۱۷) را برای بدست آوردن $\varphi(x)$ حل کنیم. اما قبل از آن یک نکته ی جالب توجه وجود دارد که نگاه کردن به آن مفید است. معادله ی (۱-۱۷) یک متشابه در مکانیک دارد اگر فرض کنید متغیر x زمان را نشان می دهد و تابعِ $\varphi(x)$ مختصات ذره ای با جرم واحد برحسب زمان را نشان می دهد، آن گاه معادله ی (۱-۱۷) همان قانون دوم نیوتن برای این ذره است با پتانسیلِ $[-U(\varphi)]$. انرژی کلِ این حرکت که بقادار است به شکل زیر است

$$W = \frac{1}{2}(\frac{d\varphi}{dx})^2 - U(\varphi). \qquad (۱۸-۱)$$

انرژی این ذره فرضی نباید با انرژی سیستم مورد نظر ما که شامل میدان نرده ای است اشتباه شود. برای جواب مستقل از زمانِ $\varphi(x)$ ، E به شکل زیر است

$$\mathrm{E} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + U(\varphi)\right]dx, \qquad (۱۹-۱)$$

با این تصویر مکانیکی ما فرض می کنیم که $U(\varphi)$ فقط یک کمینه دارد و در $\varphi = \varphi_1$ به کمینه مقدارِ خود، $U(\varphi) = 0$ ، می رسد. ذره ی فرضی ای که در نظر گرفتیم پتانسیل $[-U(\varphi)]$ را با بیشینه مقدارِ صفر در $\varphi = \varphi_1$ می بیند. شرایط مرزی ای که ما در نظر گرفتیم ما را مجاب می کند که شروع و پایان مسیر ذره یا به عبارتی در فاصله ی خیلی دور و نزدیک $\varphi = \varphi_1$ باشد. اما چنین مسیری وجود ندارد! ذره

فرضی زمانی که از $\varphi = \varphi_1$ شروع به حرکت در یک جهت می کند دیگر به آن بر نمی گردد. به این علت که انرژی جنبشی آن دوباره صفر نمی شود به طوری که انرژی کل آن همیشه بزرگتر از انرژی پتانسیل آن $[-U(\varphi)]$ است.

اگر از منظر میدان استاتیک به این نکته نگاه کنیم، می توان این طور بیان کرد که ابتدا ما شرایط مرزی را به این شکل ثابت می کنیم که اگر در $x \to -\infty$ داشته باشیم $\frac{d\varphi}{dx} = 0\ ,\ \varphi = \varphi_1$ آنگاه اگر همین شرایط را برای $x \to +\infty$ قرار دهیم، نمی توانیم یک جوابِ غیربدیهی و ناتکین برای مسئله پیدا کنیم.

بنابراین بدون حل صریح (۱-۱۷) و اطلاع از شکل صریح $U(\varphi)$ ما دیدیم که اگر پتانسیل یک کمینه داشته باشد، آنگاه نمی توانیم موج سالیتونیِ مستقل از زمان داشته باشیم. بنابراین قیاس با مکانیک به ما کمک کرد تا استنتاج کنیم که اولاً زمانی که $U(\varphi)$ یک کمینه دارد نمی توانیم موجِ سالیتونی مستقل از زمان داشته باشیم، ثانیاً زمانی که $U(\varphi)$ ، n تا کمینه داشته باشد ما می توانیم 2(n-1) نوع جواب داشته باشیم که برای هر کدام از آن ها زمانی که x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می کند، میدان از یکی از کمینه ها تا کمینه ی همسایه اش عوض می شود.

حال به سراغ حل معادله ی (۱-۱۷) می رویم. اگر دو طرف معادله را در $\acute{\varphi}$ ضرب کنیم آن گاه داریم

$$\int \acute{\varphi}\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\ dx = \int \acute{\varphi}\ \frac{\partial U}{\partial \varphi}\ dx\ ,$$

$$\frac{1}{2}(\acute{\varphi})^2 = U(\varphi),$$

$$d\varphi/\mathrm{d}x = \pm[2U(\varphi)]^{1/2}\ . \qquad (۱-۲۱)$$

بعد از یک بار انتگرال گیری از معادله ی بالا داریم

$$x - x_0 = \pm \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} \frac{d\varphi}{[2U(\varphi)]^{1/2}} \qquad (۱-۲۲)$$

که در آن x_0 ، ثابت انتگرال گیری، یک نقطه ی دلخواه در فضا است که اندازه ی میدان در آن نقطه $\varphi_0(x)$ است.

با توجه به بحثی که قبلاً درباره ی کمینه های پتانسیل کردیم $\varphi(x)$ باید در $x \to \pm\infty$ به دو تا از کمینه های $U(\varphi)$ که در همسایگی هم قرار دارند برسد و درفاصله ی بین بینهایت ها $\varphi(x)$ بین این دو مقدار کمینه عوض می شود. بنابراین $U(\varphi)$ تنها در بینهایت ها صفر می شود و برای مقدارِ محدودِ x مقداری مثبت است.

حال به جایی رسیدیم که می توانیم جوابِ موج تابیده ی نظریه ی $\lambda\varphi^4$ را نگاه کنیم. بنابراین پتانسیل به شکل زیر است

$$U(\varphi) = \frac{1}{4}\lambda(\varphi^2 - m^2/\lambda)^2 \tag{۲۳-۱}$$

که در آن λ ثابت جفت شدگی و m جرمِ بوزون است و هر دو ثابت مثبت هستند. بنابراین معادله حرکت زیر را برای این سیستم داریم

$$\ddot{\varphi} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = m^2\varphi - \lambda\varphi^3 \,. \tag{۲۴-۱}$$

در این سیستم $U(\varphi)$ در دو نقطه ی $\varphi = \pm m \,/\, \sqrt{\lambda}$ صفر (کمینه) می شود. بنابراین جواب های جایگزیده ی معادله حرکت باید برای $x \to \pm\infty$ به $\pm\, m/\sqrt{\lambda}$ بروند. برای حالتِ خاصِ جواب های استاتیک معادله حرکت به شکل زیر است

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \lambda\varphi^3 - m^2\varphi, \tag{۲۵-۱}$$

آن گاه با استفاده از (۱-۲۲) داریم

$$x - x_0 = \pm \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} \frac{d\overline{\varphi}}{\sqrt{\lambda/2}(\overline{\varphi}^2 - m^2/\lambda)}, \tag{۲۶-۱}$$

این یک انتگرالِ ساده و قابل محاسبه ی به روش تحلیلی است. با انتخابِ $\varphi(x_0) = 0$ و انتگرال گیری روی $\overline{\varphi}$ داریم

$$\varphi(x) = \pm\left(m/\sqrt{\lambda}\right) \tanh[(m/\sqrt{2})(x - x_0)]. \tag{۲۷-۱}$$