بسم الله الرحمن الرحیم

۱۰۷۶۲۲

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت
درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

زیر فضای k-نیمه انتقالی عملگرها

استاد راهنما :

دکترحسین مومنایی

۱۳۸۷/۹/۲۳

مؤلف:

عالمه شیخ حسینی

شهریور ماه ۸۶

ب

۱۰۷۶۲۲

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی – دانشکده ریاضی و کامپیوتر

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود .

دانشجو : عالمه شیخ حسینی

استاد راهنما : دکتر حسین مومنایی

داور ۱ : دکتر عباس سالمی

داور ۲ : دکتر رضا نکویی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه : دکتر سید ناصر حسینی

حق چاپ محفوظ و مخصوص به مولف است.

تقدیم به :

شکوفه زندگیم

ریحانه

به پاس لحظه هایی که از آن او بود وازاو دریغ شد

تشکر و قدردانی

به نام آنکه جان را فکرت آموخت چراغ دل به نور جان برافروخت

خداوندا،تو را سپاس که نعمت وجود بر من ارزانی داشتی،مرا شایستگی این نعمت خویش عطا بفرما.

پروردگارا،تو را سپاس که به من نعمت پدر و مادر عطا کردی تا مثلی از محبت بیکرانت را بر خویش حس کنم.

بارالها، تو را سپاس که در مسیر زندگی ام انسان هایی را قرار دادی که از آنها بیاموزم و مرا هدایت کنند و بدین وسیله به تو نزدیک تر گردم.

خداوندا،تو را سپاس که مرا به زیور علم آراستی و از تیرگی جهل رهانیدی،یاریم کن تا به زیور عمل نیز آراسته گردم.

بر خود واجب می دانم از استاد راهنمای محترم جناب آقای دکتر حسین مومنایی که در تمامی مراحل انجام پایان نامه حضور داشته و کمک های بی دریغ ایشان بهترین راهنما برای اینجانب بوده تشکر نمایم و همچنین از کلیه افرادی که به هر نحوی در به نتیجه رسیدن این پایان نامه همکاری داشته اند سپاسگزارم و از خداوند بزرگ برایشان آرزوی توفیق دارم.

در پایان از حمایت های قطب جبر خطی و بهینه سازی دانشگاه شهید باهنر کرمان تشکر و قدردانی می نمایم .

چکیده

یک گردایه S از نگاشت های خطی روی یک فضای برداری X نیمه انتقالی گفته می شود هرگاه برای هر دو بردار غیر صفر $\{x,y\}$ عنصری مانند $A \in S$ موجود باشد به طوری که $Ax = y$ یا $Ay = x$. همچنین یک نمونه توپولوژیکی از این خاصیت برای نگاشت های کرا ندار روی یک فضای باناخ وجود دارد.

در این پایان نامه خواص گوناگون زیرفضاهای خطی نیمه انتقالی $M_n(F)$ را بررسی خواهیم کرد، بخصوص نشان می دهیم که هر زیر فضای نیمه انتقالی از ماتریس ها یک بردار دوری دارد،بعلاوه اگر $|F| \geq n$، آنگاه چنین زیر فضایی شامل یک ماتریس معکوس پذیر است و نشان می دهیم که فضاهای نیمه انتقالی مینیمالی از ماتریس ها بدون هیچ زیرفضای پایای غیر بدیهی وجود دارد.

همچنین در مورد زیرفضاهای نیمه انتقالی $L(X)$ بحث خواهیم کرد و زیرفضاهای k-نیمه انتقالی را مطالعه می کنیم که یک نمونه چند متغیره از نیمه انتقالی است و اثبات خواهیم کرد که هر زیر فضای k-نیمه انتقالی ا ز $L(X)$، $(k-1)$-انتقالی است و اگر $2k > \dim X$،آنگاه هر زیر فضای k-نیمه انتقالی ، k-انتقالی است و سرانجام قضیه جیکوبسن را به حلقه های نیمه انتقالی تعمیم می دهیم. در آخر نشان می دهیم که اگر عمل یک زیر جبر لی از ماتریس های مختلط 2-انتقالی باشد، آنگاه آن $gl_n(C)$ است یا،اگر $n > 2$،آنگاه آن یک زیر جبر لی از $sl_n(C)$ است و عمل انتقالی برای این نتیجه کافی نیست.

مقدمه

در این تحقیق فرض می کنیم F میدانی دلخواه و $M_n(F)$ جبر تمام ماتریس های $n\times n$ روی میدان F باشد که با جبر تمام عملگرهای خطی روی فضای $V=F^n$ یکی است.

گردایه S از عملگرها روی فضای V انتقالی گفته می شود اگر برای هر جفت از عناصر غیر صفر $x,y\in V$ عنصر $A\in S$ وجود داشته باشد به طوری که $Ax=y$.عمل انتقالی برای مجموعه ها با ساختارهای گوناگون مانند گروه ها،نیم گروه ها،فضاهای خطی و جبرها به طور وسیع بررسی شده است و در هر مورد غالبا قضیه برنساید نقل شده است،به عنوان مثال،حالت هایی که F جبری بسته است بیان می کند که $M_n(F)$ شامل هیچ زیر جبر انتقالی سره نیست.اگر گردایه انتقالی S یک فضای خطی باشد معلوم است که S حداقل بعد $2n-1$ دارد [1].همچنین اگر F میدان حقیقی یا مختلط باشد یک نمونه طبیعی و توپولوژیکی از انتقالی وجود دارد که در آن تنها لازم است گردایه S عنصر x را به عنصر y نزدیک کند،یعنی برای هر جفت از عناصر غیر صفر $x,y\in V$ عنصری مانند $A\in S$ وجود داشته باشد به طوری که $\|Ax-y\|<\varepsilon$.

همچنین خاصیتی ضعیف تر از انتقالی اولین بار توسط *H.Rosenthal* و *V.Troitsky* در [15] مطرح شد آنها زیرجبرهای S از عملگرهای کراندار روی یک فضای باناخ V را بررسی کردند و جبرهای نیمه انتقالی و نیمه انتقالی توپولوژیکی را تعریف کردند.

فهرست مطالب

فصل اول

تعاریف و مقدمات

در بخش اول این فصل زیر فضاهای انتقالی(نیمه انتقالی)و k –انتقالی (k –نیمه انتقالی) عملگرها را معرفی می کنیم. سپس به تعریف یک فرم روی یک فضای ضرب داخلی ویک جبرروی میدان F می پردازیم . در بخش دوم به بیان قضیه برنساید ($Burnsid$'$sTheorem$) ورابطه یک جبر تحویل ناپذیر با یک جبر انتقالی از تبدیلات خطی روی یک فضای برداری می پردازیم.

در بخش سوم فضای هیلبرت وفضای خطی نرمدار وخواص آنها رابه خواننده یاد آوری می کنیم.

بخش ۱-۱:معرفی زیر فضاهای انتقالی و نیمه انتقالی عملگرها

قرارداد ۱-۱-۱: در سراسراین پایان نامه فرض می کنیم F میدانی دلخواه و $M_n(F)$ فضای تمام ماتریس های $n\times n$ روی میدان F است و همچنین اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F باشد، آنگاه $L(V)$ فضای تمام عملگرهای خطی روی V است و در صورتیکه F میدان حقیقی و مختلط باشد و V یک فضای خطی نرم دار،آنگاه فضای تمام عملگرهای خطی پیوسته روی V را با $L(V)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱-۱-۱: گردایه $S\subset L(V)$ را انتقالی گوییم اگر برای هر جفت از عناصر $x,y\in V$ که $x\neq 0$، عنصری مانند $A\in S$ موجود باشد به طوری که $Ax=y$.

تعریف ۱-۱-۲: گردایه $S\subset L(V)$ که برای هر جفت از عناصر غیر صفر $x,y\in V$ عنصری مانند $A\in S$ موجود باشد به طوری که $Ax=y$ یا $Ay=x$ را نیمه انتقالی گوییم.

تعریف ۱-۱-۳: اگر F میدان حقیقی یا مختلط باشد و V یک فضای برداری نرم دار روی میدان F ، آنگاه به گردایه S از عملگرهای خطی روی V انتقالی توپولوژیکی می گوییم هرگاه به ازای هر دو بردار غیر صفر $x,y\in V$ و $\varepsilon>0$ یک عملگر $A\in S$ موجود باشد به طوری که $\|Ax-y\|<\varepsilon$ و نیمه انتقالی توپولوژیکی گوییم هر گاه $\|Ax-y\|<\varepsilon$ یا $\|Ay-x\|<\varepsilon$.

گزاره ۱-۱-۱: اگر $S \subset M_n(F)$ یا $S \subset L(V)$ و بعد V متناهی باشد آنگاه مفاهیم انتقالی (نیمه انتقالی) و انتقالی توپولوژیکی (نیمه انتقالی توپولوژیکی) یکي هستند و به هر دو انتقالی (نیمه انتقالی) می گوییم.

تعریف ۱-۱-٤: فرض کنیم $S \subset L(V)$ و $x \in V$ باشد.در این صورت مجموعه $Sx = \{Ax | A \in S\}$ را مدار x تحت S گوییم.

از تعریف ۱-۱-۴ گزاره زیر نتیجه می شود:

گزاره ۱-۱-۲: گردایه $S \subset L(V)$ انتقالی است هر گاه برای هر دو بردار غیر صفر $x, y \in V$، $y \in Sx$ باشد و نیمه انتقالي است هر گاه برای هر دو بردار غیر صفر $x, y \in V$، آنگاه $x \in Sy$ یا $y \in Sx$.

اکنون زیر مجموعه های k - انتقالی و k-نیمه انتقالی از عملگرها روی یک فضای برداری را تعریف می کنیم.

تعریف ۱-۱-۵ : زیر مجموعه $S \subset L(V)$ را k - انتقالی گوییم هر گاه برای هر k - تایی مستقل خطی $\{x_1, ..., x_k\}$ و هر k -تایی دلخواه $\{y_1, ..., y_k\}$ در V عنصر $A \in S$ موجود باشد به طوری که $Ax_i = y_i$، برای هر $i = 1,2,...,k$.

تعریف ۱-۱-٦: زیر مجموعه $S \subset L(V)$ را k - نیمه انتقالی گوییم هر گاه برای هر دو k- تایی مستقل خطی $\{x_1, ..., x_k\}$و $\{y_1, ..., y_k\}$در V عنصر $A \in S$ موجود باشد به طوری که $Ax_i = y_i$ یا $Ay_i = x_i$ برای هر $i = 1,2,...,k$.

قضیه معروف زیر نشان می دهددر حالتي که بعد V متناهی باشد مطالعه زیر مجموعه های $L(V)$

و $M_n(F)$ یکسان است.در واقع یک یکریختی بین $L(V)$ و $M_n(F)$ وجود دارد و بنابراین در موارد مختلف بر حسب نیاز گاهی از زیر مجموعه های $M_n(F)$ سخن می گوییم و گاهی از زیر مجموعه های $L(V)$.

قضیه ۱-۱-۱: فرض کنیم V یک فضای برداری n بعدی روی میدان F و W یک فضای m بعدی روی F باشد.همچنین فرض کنیم α پایه مرتبی برای V و β پایه مرتبی برای W باشد برای هر تبدیل خطی T از V به W، $A \in M_{m\times n}(F)$ یافت می شود به طوری که به ازای هر بردار γ از V، $[T\gamma]_\beta = A[\gamma]_\alpha$

بعلاوه $T \to A$ یک یکریختی بین مجموعه همه تبدیلات خطی از V به W و مجموعه همه ماتریس های $m\times n$ روی میدان F است.

اثبات: فرض کنیم V یک فضای برداری n بعدی و W یک فضای برداری m بعدی بر روی میدان F باشند، همچنین فرض کنیم $\alpha = \{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ پایه مرتبی برای V و $\beta = \{\beta_1,\dots,\beta_m\}$ پایه مرتبی برای W باشد. اگر T تبدیل خطی دلخواهی از V به W باشد، آنگاه T با عملش روی بردارهای α_j تعیین می شود. هر یک از n بردار $T\alpha_j$ به طور یکتا به صورت یک ترکیب خطی

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\beta_i \quad (*)$$

از β_i ها، که در آن اسکالرهای $\{A_{1j},\dots,A_{mj}\}$ مختصات $T\alpha_j$ در پایه β' می باشند، قابل بیان است. ازاین رو تبدیل T از طریق فرمولهای $(*)$ با mn اسکالر A_{ij} تعیین می شود.

ماتریس $m\times n$ A که با $A(i,j) = A_{ij}$ تعریف می شود، ماتریس T نسبت به دو پایه β و α نامیده می شود. حال چگونه ماتریس A تبدیل خطی T را تعیین می کند.

اگر $\gamma = x_1\alpha_1 + ... + x_n\alpha_n$ برداری از V باشد،آنگاه

$$T\gamma = T(\sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j(T\alpha_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\beta_i = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j)\beta_i$$

اما اگر X ماتریس مختصات γ در پایه مرتب α باشد، محاسبه بالا نشان می دهد که AX ماتریس مختصات بردار $T\gamma$ در پایه مرتب β است، زیرا اسکالر $\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j$ درایه i امین سطرماتریس ستونی AX است. همچنین مشاهده مي شود که اگر A ماتریس $m \times n$ دلخواهی روی میدان F باشد، آنگاه

$$T(\sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j)\beta_i$$

تبدیل خطی T از V به W را تعریف می کند که ماتریس آن نسبت به α و β عبارت است از A. یکریختی بودن نگاشت $T \to A$ براحتی قابل تحقیق است. □

اکنون به معرفی یک فرم می پردازیم که در اثبات یکی از قضایا به آن نیازمندیم.

تعریف ۱-۱-۷: یک فرم (یک و نیم خطی)روی یک فضای ضرب داخلی حقیقی یا مختلط V، تابعی چون f روی $V \times V$ با مقادیر در میدان اسکالرهاست که به ازای $\gamma, \alpha, \beta \in V$ و همه اسکالرهای c،داریم

الف) $f(c\alpha + \beta, \gamma) = cf(\alpha, \gamma) + f(\beta, \gamma)$

ب) $f(\alpha, c\beta + \gamma) = \bar{c}f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \gamma)$

فرم f را ناتبهگون گویند هر گاه بردار صفر تنها بردار α با این خاصیت باشد که به ازای هر β، $f(\alpha, \beta) = 0$.

تعریف ۱-۱-۸: فرض می کنیم F یک میدان باشد. یک جبر روی میدان F،فضایی برداری مانند σ بر روی F همراه با عملی اضافي به نام ضرب برداری است که هر جفت از بردارهای αو β از σ را به بردار $\alpha\beta$ از σ، به نام حاصل ضرب α و β چنان وابسته می سازد که

الف) ضرب شرکت پذیر است:

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$$

ب) ضرب نسبت به جمع پخش پذیر است،

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma \quad \text{و} \quad (\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma+\beta\gamma$$

پ) به ازای هر اسکالر c از F

$$c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta = \alpha(c\beta)$$

اگر عنصری چون 1 در σ موجود باشد، به طوری که به ازای هر α از σ ، $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$، σ را یک جبر با عنصر همانی بر روی F و 1 را عنصر همانی می نامیم. جبر σ جابجایی نامیده می شود هر گاه به ازای همه α ها و βهای در σ، $\alpha\beta = \beta\alpha$.

مثال ۱-۱-۱: مجموعه ماتریس های $n\times n$ بر روی یک میدان همراه با اعمال معمولی یک جبر با عنصر همانی است این جبر در صورتی که $n \geq 2$ جابجایی نیست.

مثال ۱-۱-۲: فضای همه عملگرهای خطی روی یک فضای برداری همراه با ترکیب عملگرها، به عنوان ضرب، یک جبر با عنصر همانی است.

بخش ۱-۲: رابطه یک جبر تحویل ناپذیر با یک جبر انتقالی از تبدیلات خطی روی یک فضای برداری

تعریف ۱-۲-۱: فرض کنیم V فضایی برداری و G گردایه ای از تبدیلات خطي روی V باشد. اگر M زیر فضایی از V باشد گوییم M تحت G پایاست، هر گاه به ازای هر بردار $x \in M$ و هر تبدیل $A \in G$، بردار Ax هم در M باشد.

قرارداد ۱-۲-۱ : یک زیر فضا غیر بدیهی گفته مي شود اگر مخالف صفر و مخالف تمام فضا باشد.

تعریف ۱-۲-۲: فرض کنیم G یک گردایه‌ای از تبدیلات خطی روی فضای برداری V باشد. اگر زیر فضای غیر بدیهی M از V وجود داشته باشد که تحت G پایا باشد، گوئیم G تحویل پذیر است. در غیر این صورت G را تحویل ناپذیر گوییم.

تعریف ۱-۲-۳: گردایه A از تبدیلات خطی را که تحت جمع،ضرب و ضرب اسکالر ها بسته باشد را یک جبر از تبدیلات خطی گوییم.

ارتباط بین گردایه های تحویل ناپذیر و انتقالی موضوع تحقیق بسیاری از ریاضیدانان بوده است. معروف ترین قضیه در این مورد قضیه برنساید است که این ارتباط را در حالتی که میدان زمینه اعداد مختلط باشد و گردایه مورد نظر یک جبر از تبدیلات خطی باشد را بیان می کند .

این قضیه اثباتهای زیادی دارد که ذیلا یک اثبات کوتاه برای این قضیه می آوریم [5].

قضیه برنساید ۱-۲-۱: فرض کنید V یک فضای برداري با بعد متناهی (حداقل 2) روی میدان اعداد مختلط باشد. در این صورت تنها جبر تحویل ناپذیر از تبدیلات خطی روی V جبر همه تبدیلات خطی از V به V است [13].

اثبات: فرض کنیم σ یک جبر تحویل ناپذیر از تبدیلات خطی روی V باشد. ابتدا نشان می دهیم σ شامل یک تبدیل خطی از رتبه 1 است. برای این کار فرض می کنیم T_0 یک تبدیل خطی در σ با رتبه غیر صفر مینیمال باشد، نشان می دهیم این رتبه 1 است.

اگر رتبه T_0 بیشتر از 1 باشد بردارهای x_1 و x_2 وجود دارند به طوری که $\{T_0x_1, T_0x_2\}$ یک مجموعه مستقل خطی است.

واضح است که $\sigma T_0 x_1 \neq 0$ یک زیر فضای V است که تحت جبر σ پایاست و چون σ تحویل ناپذیر است پس $\sigma T_0 x_1 = V$.لذا تبدیل خطی مانند $A_0 \in \sigma$ وجود دارد به طوری که $A_0T_0x_1 = x_2$. بنابراین $\{T_0A_0T_0x_1, T_0x_1\}$ یک مجموعه مستقل خطی است. حال اسکالری مانند λ وجود دارد، به طوری که تحدید $(T_0A_0 - \lambda)$ به T_0V معکوس پذیر نیست و چون $T_0A_0T_0x_1 - \lambda T_0x_1 \neq 0$ پس تبدیل $(T_0A_0 - \lambda)T_0$ صفر نیست.

برد $(T_0A_0 - \lambda)T_0$ یک زیر مجموعه سره از برد T_0 بوده و لذا رتبه $(T_0A_0 - \lambda)T_0$ کمتر از رتبه T_0 است. همچنین $(T_0A_0 - \lambda)T_0 \in \sigma$ زیرا σ یک جبر است و این با مینیمال بودن رتبه T_0 در تناقض است. پس T_0 دارای رتبه 1است.

حال فرض کنیم y_0 یک بردار غیر صفر در برد T_0 باشد. چون هر تبدیل خطی از رتبه ۱ به فرم $x \to \varphi(x)y$ است، برای یک بردار $y \in V$ و یک تابعک خطی ϕ،بنابراین یک تابعک خطی ϕ_0 روی V وجود دارد به طوری که $T_0x = \phi_0(x)y_0$، برای هر $x \in V$. از طرفی هر تبدیل خطی روی یک فضای برداری با بعد متناهی جمع تعداد متناهی تبدیل خطی از رتبه 1 است (این مطلب در جبر خطی مقدماتی اثبات می شود)، کافی است نشان دهیم σ شامل هر تبدیل خطی T به فرم $Tx = \phi(x)y$ است.

توجه کنید از اینکه $T_0 \in \sigma$ است، نتیجه می گیریم $T_0 A \in \sigma$،به ازای هر $A \in \sigma$.

اما $T_0 Ax = \varphi_0(Ax)y_0$. پس آن مجموعه φهایی که تبدیل خطی T تعریف شده با $Tx = \varphi(x)y_0$ در σ است همه ϕهای تعریف شده با $\varphi(x) = \varphi_0(Ax)$ برای یک $A \in \sigma$ را شامل می شود.

این مجموعه از φها یک زیر فضا از V^* است (فضای تمام تابعک های خطی روی V).

اگر این مجموعه از φها تمام V^* نباشد،طبق قضایای جبر خطی مقدماتی $x_0 \neq 0$ وجود خواهد داشت بطوری که $\varphi(x_0) = 0$ برای تمام این φها.

اما $\varphi_0(Ax_0) = 0$ برای هر $A \in \sigma$،نتیجه می دهد $x_0 = 0$ چون $\{Ax_0 : A \in \sigma\} = V$ جائیکه $x_0 \neq 0$ است. بنابراین چنین x_0 ای وجود نخواهد داشت. بنابراین تبدیل T تعریف شد، با $Tx = \phi(x)y_0$ در σ است برای هر ϕ در V^*. چون $y_0 \neq 0$، $\{Ay_0 : A \in \sigma\} = V$. فرض کنیم $y \in V$ داده شده باشد پس $A \in \sigma$ وجود دارد به طوری که $Ay_0 = y$. بنابراین $ATx = A\varphi(x)y_0 = \varphi(x)Ay_0 = \varphi(x)y$، بنابراین σ شامل همه تبدیلات خطی از رتبه 1 است.□

نتیجه ۱-۲-۱: اگر V یک فضای با بعد متناهی روی میدان اعداد مختلط باشد،آنگاه هر زیر جبر سره از $L(V)$ تحویل پذیر است.

نتیجه ۱-۲-۲: اگر V یک فضای با بعد متناهی روی میدان اعداد مختلط باشد،آنگاه جبر σ از تبدیلات خطی روی فضای برداری V انتقالی است اگر و تنها اگر تحویل ناپذیر باشد.

اثبات: فرض می کنیم σ یک جبر تحویل ناپذیر باشد، پس V هیچ زیر فضای پایای غیر بدیهی تحت σ ندارد. چون برای هر $x \neq 0$، σx یک زیر فضای V است که تحت σ پایاست لذا $\sigma x = V$ پس جبر σ، انتقالی است.

برعکس، فرض کنیم جبر σ انتقالی باشد یعنی برای هر $x \neq 0$، $\sigma x = V$ باشد. با برهان خلف فرض کنیم σ تحویل پذیر باشد یعنی یک زیر فضای غیر بدیهی W از V وجود دارد که تحت σ پایاست. فرض کنیم $y \in V - W$ و برای هر $x \in W$ داریم $\sigma x \subset W$ و $A \in \sigma$ وجود ندارد به طوری که $Ax = y$. این تناقض با انتقالی بودن σ دارد. □

تعریف ۱-۲-٤: اگر V فضایی برداری باشد، منظور از یک تصویر عملگری خطی چون P روی V است که $P^2 = P$. فرض کنیم P یک تصویر باشد. R را برد P و N را فضای پوچ P می گیریم.

1- بردار β در برد P است اگر وتنها اگر $P\beta = \beta$. زیرا اگر $\beta = P\alpha$، آنگاه $P\beta = P^2\alpha = P\alpha = \beta$. بعکس، اگر $\beta = P\beta$، آنگاه مسلماً β در برد P قرار دارد.

2- $V = R \oplus N$

3- عبارت یکتای α به صورت مجموعی از بردارهای در R و N عبارت است از

$$\alpha = P\alpha + (\alpha - P\alpha)$$

از (1)، (2)، (3) بسادگی دیده می شود که اگر R و N دو زیر فضای V باشند و $V = R \oplus N$، یک وتنها یک عملگر تصویر P وجود دارد که بردش R و فضای پوچش N باشد. این عملگر، تصویر روی R در راستای N نامیده می شود.

نکته ۱-۲-۳: هر تصویر P قطری شدنی است. اگر $\{\alpha_1,....,\alpha_r\}$ پایه ای برای R و $\{\alpha_{r+1},...,\alpha_n\}$ پایه ای برای N باشد، آنگاه پایه $\beta=\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ ماتریس P را قطری می کند که I یک ماتریس $r\times r$ است.

$$[P]_\beta=\begin{bmatrix} I & o \\ o & o \end{bmatrix}$$

بخش ۱-۳: معرفی فضای هیلبرت و فضای خطی نرمدار

در ابتدای این بخش فضای ضرب داخلی را تعریف می کنیم و چند نا مساوی مشهور را نتیجه می گیریم و سپس به معرفی فضای هیلبرت و فضای خطی نرمدار می پردازیم.

تعریف ۱-۳-۱: فضای برداری مختلط H را یک فضای ضرب داخلی نامیم اگر به هر جفت مرتب از بردارهای x و y در H یک عدد مختلط مانند (x,y) به نام «حاصلضرب داخلی» x و y چنان مربوط شده باشد که قواعد زیر برقرار باشد.

(آ) $(y,x)=\overline{(x,y)}$ (علامت بار نشانگر مزدوج عدد مختلط است)،

(ب) اگر $x,y,z\in H$، آنگاه $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$،

(پ) اگر $x,y\in H$ و α اسکالر باشد، آنگاه $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$،

(ت) به ازای هر $x\in H$، $(x,x)\geq 0$،

(ث) $(x,x)=0$ فقط اگر $x=0$

حال چند نتیجه فوری از این اصول را ذکر می کنیم:

قاعده (پ) ایجاب می کند که به ازای هر $y\in H$، $(0,y)=0$،

قواعد (ب) و (پ) را می توان در یک حکم جا داد؛ به ازای هر $y\in H$، نگاشت $x\to(x,y)$ یک تابعکی خطی بر H است؛

(آ) و (ب) قانون دوم بخشپذیری را ایجاب می کنند:

$$(z,x+y)=(z,x)+(z,y).$$

بنابر (ت) می توان $\|x\|$، یعنی نرم بردار $x\in H$، را ریشه دوم نامنفی (x,x) تعریف کرد، لذا

(ج) $\|x\|^2=(x,x)$.