فهرست مطالب

چکیده ..... یک
مقدمه ۱

فصل اول: تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱-۱ مقدمه ٦
۱-۲ فضای هیلبرت ٦
۱-۲-۱ فضای هیلبرت حاصل از دو سیستم کوانتومی ٦
۱-۳ کیوبیت ۷
۱-۳-۱ سیستم N-کیوبیتی ۸
۱-٤ حالت خالص ۹
۱-٤-۱ حالت خالص جداپذیر ۹
۱-٤-۲ حالت خالص درهم‌تنیده ۹
۱-۵ تجزیه‌ی اشمیت ۱۰
۱-٦ حالت آمیخته ۱۱
۱-٦-۱ جداپذیری حالت آمیخته ۱۱
۱-۷ ماتریس چگالی ۱۱
۱-۸ عملگرهای موضعی ۱۲
۱-۹ ترانهاده‌ی جزئی ۱۲
۱-۱۰ رد جزئی ۱۳
۱-۱۱ آنتروپی ۱٤
۱-۱۱-۱ آنتروپی شانون ۱۵
۱-۱۱-۲ آنتروپی الحاقی ۱۵
۱-۱۱-۳ آنتروپی شرطی ۱۵
۱-۱۱-٤ اطلاعات متقابل ۱٦
۱-۱۱-۵ خواص آنتروپی شانون ۱٦
۱-۱۱-٦ آنتروپی وان-نویمن ۱۷

۱-۱۲ ناهمدوسی ۱۷
۱-۱۲-۱ ابرعملگرها و نگاشت‌های مثبت ۱۸
۱-۱۳ دینامیک یک زیرسیستم ۱۸
۱-۱٤ کانال‌های ناهمدوسی کوانتومی ۲۰
۱-۱٤-۱ کانال بیت-برگردان ۲۱
۱-۱٤-۲ کانال فاز-برگردان ۲۱
۱-۱٤-۳ کانال واقطبش ۲۲
۱-۱٤-٤ کانال میرا کننده دامنه ۲۲
۱-۱٤-۵ کانال میرا کننده‌ی فاز ۲٤

فصل دوم: همبستگی‌های کوانتومی

۲-۱ مقدمه ۲۷
۲-۲ درهم‌تنیدگی ۲۷
۲-۲-۱ درهم‌تنیدگی کوانتومی ۲۷
۲-۲-۲ درهم‌تنیدگی کوانتومی حالات خالص ۲۸
۲-۲-۳ درهم‌تنیدگی کوانتومی حالات آمیخته ۲۹
۲-۲-٤ شرط درهم‌تنیدگی ۲۹
۲-۲-۵ سنجه‌ی درهم‌تنیدگی ۳۰
۲-۲-٦ سنجه‌ی آنتروپی وان-نویمن ۳۱
۲-۲-۷ تلاقی ۳۱
۲-۳ ناسازگاری کوانتومی ۳۲

فصل‌سوم: معیار هندسی ناسازگاری تحت ناهمدوسی

۳-۱ مقدمه ۳۸
۳-۲ معیار هندسی ناسازگاری کوانتومی ۳۹
۳-۳ معیار هندسی ناسازگاری تحت کانال‌های ناهمدوسی کوانتومی ٤۱
۳-٤ نتیجه گیری ۵۵

فصل چهارم: خواص معیار هندسی ناسازگاری کوانتومی

٤-۱ مقدمه ۵۷

٤-٢ معیار هندسی ناسازگاری کوانتومی ٥٩
٤-٢-١ ویژگی‌های نوعی معیار هندسی ناسازگاری کوانتومی ٥٩
٤-٢-٢ توزیع چگالی احتمال مربوط به $D(\rho)$ ٨١
٤-٣ نتیجه گیری ٦٦

پیوست‌ها

پیوست ۱: اثبات رابطه (۳-۵۲) ٦٨
پیوست ۲: ٦٩
منابع ٧٣
Abstract I

فهرست شکل‌ها و نمودارها

شکل ۱-۱: کیوبیت توصیف شده با دو تراز الکترونی یک اتم.. ۸

شکل ۱-۲: کره بلوخ بیانگر یک کیوبیت ۹

شکل ۱-۳: طرحواره‌ی بیانگر رابطه‌ی بین آنتروپی‌های مختلف ۱۶

شکل ۱-٤: کره‌ی بلوخ حالت ورودی ρ_s (a) و حالتهای خروجی (b)~(f) کانال‌های اتلافی مختلف. (b) کانال بیت- برگردان، (c) کانال فاز برگردان، (d) کانال بیت-فاز برگردان، (e) کانال واقطبش و (f) کانال میرا کننده‌ی دامنه. احتمال $p = 0.2$ برای همه‌ی کانال‌های اتلافی مشترک است بجز در (f) که $p = 0.7$ می‌باشد. ۲۵

شکل ۳-۱ ناسازگاری $D(p)$، تلاقی $C(p)$ و معیار هندسی ناسازگاری $D^{g}(\rho)$ تحت کانال PDC به صورت تابعی از p برای حالت ورودی $c_1 = 1$, $c_2 = -c_3$, $c_3 = 0.6$.. ۵۱

شکل ۳-۲: ناسازگاری $D(p)$، تلاقی $C(p)$ و معیار هندسی ناسازگاری $D^{g}(\rho)$ تحت کانال PDC به صورت تابعی از p. شکل (الف) برای حالت‌های رابطه (۳-٤۹) با پارامترها $c_1 = 0.5$، $c_2 = 0$ و $c_3 = 0.5$ و $d = -0.5$ تحت کانال PDC و شکل (ب) برای حالت‌های بل $(c_1 = c_2 = c_3 = -1)$ تحت کانال ADC رسم شده است.در هر شکل مقدارهای θ که $I(\rho(p)|\{E_k(\theta,\phi)\})$ به صورت تابعی از p می‌باشد، ماکزیمم می‌کند. و $\tilde{E}_1(p) = (\mathbb{I} + \vec{n}.\vec{\sigma})/2$ و $\tilde{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, \cos\theta)^T$ در نظر گرفته شده است. ۵۲

شکل ٤-۱: نمودار ناسازگاری کوانتومی Qd را در برابر معیار هندسی Qd یعنی GQd که برای حالت‌های آمیخته دو کیوبیت رسم شده است. بین این دو کمیت همبستگی قوی وجود دارد. خط‌های تیره بالا حالت‌های MEMS را نشان می‌دهد و خط مستقیم قطری بسته شده با منحنی (خط-نقطه چین) حالت‌های ورنر را نشان می‌دهد. ۶۰

شکل ٤-۲: نمودار توزیع چگالی احتمال برحسب فاصله هندسی GQd در فضای کامل دو کیوبیت. منحنی پایین باهمه حالت‌ها متناظر است. در حالی که منحنی بالا همان توزیع را برای حالت‌های جدا (حالت‌هایPPT) نشان می‌دهد. توجه کنید که تمایل قوی‌تر هر دو منحنی برای مقدارهای پایین GQd به هم رسیده‌اند. مقدارهای R را افزایش می‌دهیم. (برای مقادیر $R = 1, 1.3, 1.6, 2, 2.3, 2.6, 3, 3.3, 3.8$ از راست به چپ نشان دادیم.) محدوده قابل دسترس Qd کاهش می‌یابد. ۶۱

شکل ٤-۳: نمودار فاصله GQd در برابر R برای حالت‌های آمیخته 10^6 دو کیوبیت. منحنی پایین با حالت‌های MEMS متناظر است. در حالی که خط مستقیم با مقدار بیشینه GQd مرتبط با R متناظر می‌باشد. باتوجه کافی، این مقدار بیشینه GQd برای حالت‌های ورنر به دست می‌آید.. ۶۲

شکل ٤-٤: نمودار مقدار متوسط معیار هندسی GQd به صورت تابعی از نسبت شرکت R برای همه‌ی فضای دو کیوبیتی. رفتار GQd یکنواخت است. مقدار برای حالت‌های خالص تحلیلی $(1/5)$ است.. ۶۶

مقدمه

یکی از همبستگی‌های کوانتومی درهم‌تنیدگی و ناسازگاری کوانتومی است، که اهمیت بزرگی در نظریه اطلاعات کوانتومی دارند. درهم‌تنیدگی کوانتومی یکی از مباحث مکانیک کوانتومی است [٦٢]. حالتهای کوانتومی دو سیستم که از لحاظ فیزیکی جدا از هم می‌باشند و در گذشته با هم اندرکنش داشته‌اند می‌توانند در پاسخگویی به بسیاری از سؤالات در خصوص پیامدهای اندازه‌گیری موضعی کارساز باشند.

حالتهای کوانتومی خالص درهم‌تنیده آنتروپی صفر دارند، اما به نظر می‌رسد وقتی که فرد مشاهده کننده تنها به یکی از زیرسیستم‌ها دسترسی دارد، این حالتها می‌توانند آنتروپی بیشینه داشته باشند. در مدل‌های کلاسیکی، وجود هرگونه رابطه‌ای بین اندازه‌گیری‌های موضعی روی سیستم‌های جدا از هم ممنوع است. اما در مدل‌های کوانتومی، اندازه‌گیری‌های موضعی روی سیستم‌های کوانتومی جدا از هم تا حدود معینی می‌توانند با هم رابطه داشته باشند. نامساوی‌های بِل این حدود را مشخص می‌کنند [٦٣] و نقض نامساوی‌های بِل مستلزم درهم‌تنیدگی است.

برای مورد حالتهای خالص تعیین شرط درهم‌تنیدگی بسیار ساده است. زیرا مبتنی بر خواص تجزیه اشمیت یا به طور معادل مرتبه‌ی ماتریس‌های چگالی کاهیده است، که به صورت سرراست محاسبه می‌شود. اما برای مورد حالت‌های دو قسمتی آمیخته هیچ روش منحصربه‌فردی یافته نشده است که به‌طور تضمینی بتواند درهم‌تنیدگی هرحالت درهم‌تنیده را تشخیص دهد.

از همبستگی‌های کوانتومی دیگر ناسازگاری کوانتومی است که به درهم‌تنیدگی ارجحیت دارد [١-٢]، که می‌تواند همبستگی‌اش بیشتر از درهم‌تنیدگی باشد. ناسازگاری کوانتومی در سال ٢٠٠١ توسط الیور و زورک[١] مطرح شد به‌طور مستقل هندرسون و ودرال[٢] در این زمینه کار کردند [١-٢]. الیور و زورک همبستگی‌های کوانتومی را اندازه‌گیری کردند. از کار این دو گروه پژوهشی آن است که همبستگی‌های کوانتومی در حالت‌های جدای آمیخته حتمی می‌تواند وجود داشته باشد.

---

[١] - Harold ollivier and Wojciech H. Zurek

[٢] - L. Henderson and Vlatko Vedral

ناسازگاری کوانتومی می‌تواند بیشتر حالت‌های کوانتومی را چه درهم‌تنیده باشد و چه نباشد را اندازه‌گیری کند همچنین آن حالت‌هایی که درهم‌تنیدگی قادر به تشخیص همبستگی کوانتومی حالت-ها نیست می‌تواند تشخیص دهد. چنین همبستگی‌هایی به‌طور آزمایشی در دمای اتاق در سیستم رزونانس مغناطیس هسته‌ای با استفاده از کلروفرم برای سیستم کوانتومی دو کیوبیتی می‌تواند اثبات شود. ناسازگاری پایه‌ای برای انجام محاسبات کوانتومی سیستم‌های کوانتومی حالت آمیخته است. ناسازگاری برای محیط‌های اتلافی نسبت به درهم‌تنیدگی انعطاف‌پذیرتر می‌باشد که با مقایسه دینامیک آن با تلاقی مشاهده می‌کنیم ناسازگاری برای محیط‌های مارکو و محیط‌های غیرمارکو یکسان است. کارایی ناسازگاری کوانتومی برای یک کامپیوتر کوانتومی مناسب‌تر است که هم به‌طور نظری [۳] و هم به طور آزمایشی [٤] تایید شده است. مطالعه ناسازگاری کوانتومی می‌تواند کاربردهای صنعتی داشته باشد. آن می‌تواند در فرایندهای اطلاعات کوانتومی مانند ترابرد کوانتومی[۳]، رمزنگاری کوانتومی[٤]، محاسبات کوانتوی[٥] و مخابرات کوانتومی[٦] استفاده شود.

ناسازگاری کوانتومی یک معیار کمی غیرکلاسیکی برای تشخیص همبستگی سیستم‌های دو قسمتی می‌باشد. مطالعه زیادی در مورد ناسازگاری کوانتومی انجام گرفته است. با وجود این سعی و تلاش، بدست آوردن نتیجه تحلیلی ناسازگاری کوانتومی از روش بهینه‌سازی برای حالتهای دو-قسمتی دلخواه آسان نیست. حتی برای سیستم‌های دو کیوبیتی نتیجه تحلیلی برای حالت‌های محدود شناخته شده است [۵-۱۱] و فاقد یک روش کلی است.

یک روش برای تجزیه تحلیلی استفاده از معیار هندسی ناسازگاری کوانتومی(GMQD) است و می‌تواند یک روش برای همبستگی‌های گوناگون در شرایط یکسان استفاده شود. معیار هندسی ناسازگاری کوانتومی مشابه معیار هندسی درهم‌تنیدگی است [۲۸] و برای نزدیک‌ترین فاصله بین حالت داده شده و مجموعه حالت‌هایی با ناسازگاری صفر تعریف شده است که در اینجا برای فاصله بین حالت‌ها از نرم هیلبرت- اشمیت استفاده می‌کنیم. زیرا برای سیستم‌های دو کیوبیتی کمینه-سازی فاصله بین حالت داده شده و حالت‌هایی با ناسازگاری صفر در فضای هیلبرت–اشمیت به‌طور تحلیلی بررسی شده است. [۱۹]

ناسازگاری کوانتومی روی آنتروپی وان نویمن پایه‌گذاری می‌شود در حالی‌که معیار هندسی آن روی فاصله هندسی پایه‌گذاری شده که رفتارشان ممکن است متفاوت باشد. رفتارهای معیار هندسی

۳- Quantum teleportation

٤- Quantum cryptography

٥- Quantum computation

٦- Quantum communication

ناسازگاری کوانتومی(GMQD) تحت ناهمدوسی را بررسی می‌کنیم و آن را با ناسازگاری کوانتومی مقایسه می‌کنیم. این بررسی برای معیار هندسی ناسازگاری کوانتومی تحت ناهمدوسی است که ما در اینجا برای ناهمدوسی سه نوع کانال ناهمدوسی مطرح می‌کنیم که عبارتند از کانال میرایی فاز (DPC)، کانال واقطبنده (PDC) و کانال میرایی دامنه (ADC) و نتیجه تحلیلی آن را به‌دست می-آوریم.

نشان می‌دهیم که (GMQD) نسبت به ناسازگاری کوانتومی غیرکاهشی است و ممکن است ناسازگاری کوانتومی ثابت نگه داشته شود در حالی که آن کاهش می‌یابد. نشان می‌دهیم که در بعضی حالت‌ها تغییر ناگهانی در سرعت واپاشی هر دو مورد در یک زمان صورت می‌گیرد. البته این همیشه درست نیست. همواره تغییرناگهانی در سرعت واپاشی (GMQD) باعث تغییر ناگهانی در سرعت واپاشی ناسازگاری کوانتومی نمی شود و برعکس. هر حالت را به‌وسیله مثال‌هایی اثبات می‌کنیم، همچنین یک تحلیل کلی برای تغییرناگهانی سرعت واپاشی هر دو مورد ارائه می‌دهیم. نشان می‌دهیم که کمترین مقدار برای حالت‌های قطری بل می‌باشد که تغییر ناگهانی در سرعت واپاشی هر دو به-طور هم‌زمان اتفاق می‌افتد.

همچنین خواص معیار هندسی ناسازگاری کوانتومی را بررسی می کنیم که این بررسی برای حالتهای ورنر و (MEMS) می‌باشد. با بررسی سیستماتیک روی فضای حالتهای دو کیوبیت اثبات می‌کنیم که معیار هندسی برای نشان دادن ناسازگاری کوانتومی است. همچنین در مورد بستگی ناسازگاری کوانتومی به میزان آمیختگی حالت‌های دو قسمتی بحث می‌کنیم.

در فصل اول این پایان‌نامه پس از ارائه‌ی تعاریف ضروری و لازم مربوط انواع آنتروپی‌ها، آنتروپی شانون، آنتروپی وان نویمن، آنتروپی الحاقی و آنتروپی شرطی را بیان کرده‌ایم سپس مبحث ناهمدوسی و انواع کانال‌های ناهمدوسی مطرح شده است.

در فصل دوم به همبستگی‌های کوانتومی، درهم‌تنیدگی و ناسازگاری کوانتومی پرداخته‌ایم. در قسمت اول این فصل درهم‌تنیدگی را تعریف می‌کنیم و از شرط‌های درهم‌تنیدگی شرط پِرز و از سنجه های درهم تنیدگی سنجه آنتروپی وان نویمن و سنجه‌ی تلاقی را بیان می‌کنیم. در قسمت دوم این فصل ناسازگاری کوانتومی را تعریف کرده و ویژگی‌های آن را بیان می‌کنیم. از ویژگیهای ناسازگاری کوانتومی این است که متقارن بوده و همیشه مثبت است.

در فصل سوم ابتدا معیار هندسی ناسازگاری کوانتومی را مطرح کرده و نشان می‌دهیم که معیار هندسی ناسازگاری کوانتومی یک حالت دو کیوبیتی مربوط به مقدارهای منفرد یک ماتریس 4×3 است. همچنین یک روش کلی برای به‌دست آوردن معیار هندسی ناسازگاری کوانتومی تحت کانال-

های ناهمدوسی کوانتومی بیان کرده و نیز یک نتیجه تحلیلی برای سه نوع کانال ناهمدوسی کوانتومی ارائه می‌دهیم. تغییر ناگهانی درسرعت واپاشی معیار هندسی ناسازگاری کوانتومی را تحقیق کرده و آن را با حالت ناسازگاری کوانتومی مقایسه می‌کنیم و یک تحلیل کلی روی اختلاف بین سرعت واپاشی معیار هندسی ناسازگاری کوانتومی و ناسازگاری کوانتومی بیان می‌کنیم.

درفصل چهارم ویژگی‌های گوناگون معیار هندسی ناسازگاری کوانتومی و روابطش با درجه آمیختگی حالت کوانتومی یک سیستم چندقسمتی بررسی می‌شود.

فصل اول

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱-۱ مقدمه

در این فصل مفاهیم مورد نیاز در طول پایاننامه را معرفی می‌کنیم. به این ترتیب که پس از ارائه‌ی تعاریف ضروری و لازم مربوط انواع آنتروپی‌ها، آنتروپی شانون، آنتروپی وان نویمن، آنتروپی الحاقی و آنتروپی شرطی را بیان کرده‌ایم سپس مبحث ناهمدوسی و انواع کانال‌های ناهمدوسی مطرح شده است.

۱-۲ فضای هیلبرت[۷]

یک فضای برداری کامل را که در آن ضرب داخلی تعریف می‌شود، فضای هیلبرت می‌گویند. به هر سیستم کوانتومی یک فضای هیلبرت نسبت داده می‌شود. حداکثر تعداد بردارهای مستقل در یک فضای هیلبرت H را بعد آن می‌نامند و با $dimH$ نشان داده می‌شود. در هر فضای هیلبرت می‌توان به تعداد بعد آن بردار پایه معرفی کرد، که هر بردار دلخواه بر حسب بردارهای پایه به طور کامل تعیین می‌شود. مثلاً با دو حالت $|0\rangle$ و $|1\rangle$ به عنوان بردارهای پایه‌ی هر حالت در فضای هیلبرت دو بعدی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle \qquad (۱-۱)$$

که درآن α و β دو عدد مختلط دلخواه هستند.

۱-۲-۱ فضای هیلبرت حاصل از دو سیستم کوانتومی

دو سیستم کوانتومی A وB را در نظر می‌گیریم و فضای هیلبرت آنها را به ترتیب با H_A و H_B نشان می‌دهیم. فضای هیلبرت سیستم مرکب به صورت حاصل‌ضرب تانسوری $H = H_A \otimes H_B$ تعریف می‌شود که برای آن داریم:

۷- Hilbert Space

$$dimH_A = M < N = dimH_B$$
$$dimH = dimH_A \cdot dimH_B = M \cdot N \qquad (۲-۱)$$

پایه سیستم A را به صورت $\{|e_i\rangle\} \in H_A$ در نظر می‌گیریم و بنابراین هر حالتی در فضای H_A را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$|\psi_A\rangle = \sum_{i=1}^{M} a_i \, |e_i\rangle \qquad (۳-۱)$$

همچنین پایه سیستم B را به صورت $\{|f_i\rangle\} \in H_B$ در نظر می‌گیریم و در نتیجه هر حالتی را در فضای H_B می توان به صورت زیر نوشت:

$$|\psi_B\rangle = \sum_{j=1}^{N} b_j \, |f_j\rangle \qquad (٤-۱)$$

از این دو یک پایه‌ی فضای مرکب $H = H_A \otimes H_B$ به صورت $\{|e_i\rangle \otimes |f_i\rangle\}$ می‌باشد و می‌توان هر حالتی را در فضای مرکب به صورت زیر نوشت:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{i,j} \, |e_i\rangle \otimes |f_i\rangle = \sum_{i,j} c_{i,j} \, |e_i, f_i\rangle \in H_A \otimes H_B \qquad (٥-۱)$$

۱-۳ کیوبیت

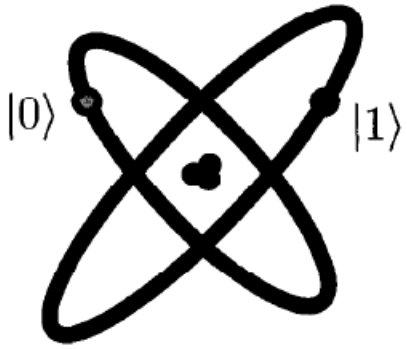
بیت مفهوم اصلی محاسبه و اطلاعات کلاسیکی است. با مقایسه، این مفهوم برای محاسبه و اطلاعات کوانتومی بیت کوانتومی یا به اختصار کیوبیت نامیده شده و به کار می‌رود.

یک بیت کلاسیکی حالت صفر یا یک دارد و یک کیوبیت می‌تواند حالت‌های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ داشته باشد. تفاوت بین بیت‌ها و کیوبیت‌ها آن است که یک کیوبیت می تواند در یک حالت $|0\rangle$ یا $|1\rangle$ باشد. پس یک کیوبیت به فرم ترکیب خطی حالت‌ها، که برهم نهی نامیده می شود، به صورت $|\psi\rangle = \alpha \, |0\rangle + \beta \, |1\rangle$ می‌باشد. که درآن α و β اعداد مختلطی هستند. پس کیوبیت یک بردار در فضای برداری دو بعدی مختلط می‌باشند. حالت‌های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ حالت‌های پایه محاسباتی نامیده می‌شود و این پایه‌ها در این فضای برداری بر هم عمودند.

یک بیت کلاسیکی یا مقدار 0 یا 1 دارد، ولی نمی‌توانیم حالت کوانتومی یک کیوبیت را تعیین کنیم، فقط مقدارهای α و β را تعیین می‌کنیم. مکانیک کوانتومی اطلاعاتی محدود به حالت کوانتومی

می‌باشد. یک کیوبیت با نتیجه‌ی $|0\rangle$ را با احتمال $|\alpha|^2$ و نتیجه‌ی $|1\rangle$ را با احتمال $|\beta|^2$ اندازه-گیری می‌کنیم، که $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$، یعنی جمع احتمال‌ها باید برابر یک شود.

حالت یک کیوبیت مانند یک بردار واحد در فضای برداری مختلط دوبعدی است.یک کیوبیت می‌تواند قطبش متفاوت فوتون را نشان دهد یا راستای اسپین یک هسته در میدان مغناطیسی یکنواخت باشد و یا در یک مدل اتمی الکترون می‌تواند حالت‌های پایه یا برانگیخته را داشته باشد (شکل۱-۱)، که می‌توانیم این حالت‌ها را با $|0\rangle$ یا $|1\rangle$ نشان دهیم.



شکل۱-۱: کیوبیت توصیف شده با دو تراز الکترونی یک اتم.

توصیف هندسی برای یک کیوبیت می‌تواند مفید باشد. چون $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ است، می-توانیم $|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$|\psi\rangle = e^{i\delta}\left(cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\,sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\right) \qquad (۱-۶)$$

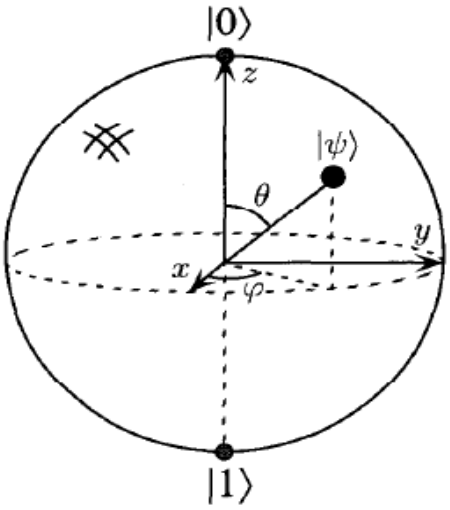
که θ، φ و δ اعداد حقیقی می‌باشند. در اینجا می‌توانیم از δ صرفنظر کنیم. پس داریم:

$$|\psi\rangle = cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\,sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \qquad (۱-۷)$$

اعداد θ و φ، یک نقطه را روی کره‌ی سه بعدی واحد تعریف می‌کنند. این کره، کره‌ی بلوخ نامیده می‌شود. این کره یک وسیله‌ی مفید برای تجسم حالت یک کیوبیت است (شکل۱-۲).

۱-۳-۱ سیستم N-کیوبیتی

حالت کوانتومی یک سیستم N–کیوبیتی نیز می‌تواند به عنوان یک بردار در فضای مختلط 2^N بعدی بیان شود. چنانچه پایه‌های متعامد بهنجار هر کیوبیت را با $|0\rangle$ و $|1\rangle$ نشان دهیم، پایه‌های متعامد بهنجار N–کیوبیتی به صورت رشته‌های دو دویی مانند $|01100\cdots101\rangle$ خواهد بود.



شکل ۲-۱: کره بلوخ بیانگر یک کیوبیت.

۱-٤ حالت خالص[۸]

حالت خالص یک سیستم کوانتومی H عبارت است از تصویرگر $|\psi\rangle\langle\psi|$ روی برداری مانند $|\psi\rangle \in H$. به عبارت دیگر حالت خالص حالتی است که همواره توان دوم آن با خودش برابر است:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \Longrightarrow \rho^2 = (|\psi\rangle\langle\psi|)(|\psi\rangle\langle\psi|) = |\psi\rangle\langle\psi| = \rho \qquad (۸-۱)$$

۱-٤-۱ حالت خالص جداپذیر[۹]

در یک سیستم کوانتومی دو قسمتی، حالت خالص $|\psi\rangle$ را جداپذیر می‌گویند اگر بتوانیم آن را به صورت یک بردار حاصل‌ضرب یعنی $|\psi\rangle = |e,f\rangle = |e\rangle\otimes|f\rangle$ بنویسیم، که در آن $|e\rangle$ حالتی از سیستم اول و $|f\rangle$ حالتی از سیستم دوم است.

۱-٤-۲ حالت خالص درهم تنیده[۱۰]

۸- Pure State

۹- Separable Pure State

یک حالت خالص زمانی در هم تنیده است که جداپذیر نباشد، یعنی نتوان آن را به صورت یک بردار حاصل‌ضرب $|\psi\rangle = |e,f\rangle = |e\rangle \otimes |f\rangle$ نوشت یعنی:

$$|\psi\rangle \neq |e,f\rangle = |e\rangle \otimes |f\rangle \qquad (۹-۱)$$

۱-۵ تجزیه‌ی اشمیت[۱۱]

حالت مرکب $|\psi\rangle \in H_A \otimes H_B$ را در نظر بگیرید. طبق تجزیه‌ی اشمیت می‌توان نشان داد، هر حالت $|\psi\rangle$ را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \, |e_i\rangle |f_i\rangle \qquad (۱۰-۱)$$

که در آن $\sum_i \lambda_i = 1$ ،$\langle f_k | f_l \rangle = \delta_{kl}$ ،$\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$ و $N = (dim H_A \, , dim H_B)$.

برای اثبات، پایه‌ای را برای فضای هیلبرت H_A انتخاب می‌کنیم، که در آن ماتریس چگالی ρ_A قطری می‌باشد. این پایه‌ها را با $\{i\}$ نشان می‌دهیم. پس حالت $|\psi\rangle$ را به صورت $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$ ، $|\psi\rangle = \sum_i \sum_j |i\rangle |\beta_i\rangle$ می‌نویسیم، که در آن بردارهای $\{\beta_i\}$ بردارهایی نه لزوماً متعامد و یکه در فضای هیلبرت H_B می باشند. ماتریس چگالی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\rho_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_i \sum_j |i\rangle \langle j| \otimes |\beta_i\rangle \langle \beta_i| \qquad (۱۱-۱)$$

بنابراین ماتریس چگالی ρ_B را به دست می‌آوریم:

$$\rho_B = tr_A(\rho_{AB}) = \sum_i \sum_j \delta_{ij} \, |\beta_i\rangle \langle \beta_i| = \sum_i |\beta_i\rangle\langle\beta_i| \qquad (۱۲-۱)$$

بنابراین قرار می‌دهیم:

$$|\beta_i\rangle = \sqrt{\lambda_i} |f_i\rangle \qquad (۱۳-۱)$$

و در نهایت را بطه‌ی (۱-۱۰) را نتیجه می‌گیریم، یعنی:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \, |e_i\rangle |f_i\rangle \;\; , \sum_i \lambda_i = 1$$

۱۰- Entangled Pure State

۱۱- Schmidt Decomposition

که N مرتبه‌ی اشمیت نامیده می‌شود.

۱-٦ حالت آمیخته[۱۲]

حالت آمیخته حالتی است که نتوان آن را با یک بردار حالت نشان داد. حالت‌های آمیخته را با یک ماتریس چگالی ρ، که یک عملگر مثبت است، نشان می‌دهند.

۱-٦-۱ جداپذیری حالت آمیخته

حالت آمیخته ρ جداپذیر است، اگر بتوان آن را به صورت ترکیب محدبی از حالت‌های خالص حاصل‌ضربی نوشت:

$$\rho = \sum_{i=1}^{K} p_i \, |e_i \, , f_i \rangle \langle e_i \, , f_i| \qquad (۱۴ - ۱)$$

که در آن $p_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{K} p_i = 1$.

حالت‌های آمیخته را درهم تنیده می‌گویند، اگر جداپذیر نباشد.

۱-۷ ماتریس چگالی[۱۳]

بهتر است حالت‌های کوانتومی را به جای تابع موج با ماتریس چگالی توصیف کنیم. زیرا مفهوم چگالی کلی‌تر از تابع موج است و حالت‌های آمیخته را نیز می‌توان با آن توصیف کرد.

ماتریس چگالی را معمولاً با ρ نشان می‌دهند. ρ یک عملگر هرمیتی مثبت روی فضای $H = H_A \otimes H_B$ است، که بردارهای حالت را به بردارهای حالت دیگر تبدیل می‌کند. همه‌ی ویژه مقادیر ρ نامنفی می‌باشند و رد ρ مساوی ۱ انتخاب می‌شوند. برای ρ مجموعه‌های کرنل و برد به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$K\{\rho\} = \{|\psi\rangle \in H : \ \rho|\psi\rangle = 0\} ;$$

$$R\{\rho\} = \{|\psi\rangle \in H : \exists|\varphi\rangle : \rho|\phi\rangle = |\psi\rangle\} \qquad (۱۵ - ۱)$$

---

[۱۲] - Mixed State

[۱۳] - Density Matrix

کرنل و برد زیرفضاهای H هستند که به ترتیب توسط ویژه بردارهای به ویژه مقادیر صفر و ویژه-بردارهای با ویژه مقادیر مخالف صفر پدید می‌آیند. بعد زیرفضای برد را مرتبه‌ی ρ می‌گویند.

در فضای $H = H_A \otimes H_B$ می‌توان عملگر ρ را با استفاده از عملگرهای پایه به صورت زیر بسط داد:

$$\rho = \sum_{ij,kl} \rho_{kl}^{ij} \, |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B \, {}_A\langle k| \otimes_B \langle l| = \sum_{ij,kl} \rho_{kl}^{ij} \, |i\,,j\rangle \langle k\,,l| \qquad (۱-۱۶)$$

۱-۸ عملگرهای موضعی[۱۴]

عملگرهایی که فقط روی سیستم A یا سیستم B اثر می‌کنند، عملگرهای موضعی نامیده می-شوند. عملگری که روی کل فضای $H = H_A \otimes H_B$ اثر کند، عملگر غیرموضعی[۱۵] گفته می‌شود. ترانهاده جزئی و همچنین رد جزئی عملگرهای موضعی می باشند.

۱-۹ ترانهاده جزئی

ترانهاده جزئی عملگری است که روی یک سیستم مرکب، همان ترانهاده‌گیری نسبت به یکی از زیرسیستم‌های آن است. به عنوان مثال در رابطه‌ی (۱-۱۶) ترانهاده جزئی ρ نسبت به سیستم A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho^{T_A} = \sum_{ij,kl} \rho_{kl}^{ij} \, |k\rangle_A \otimes |j\rangle_B \, {}_A\langle i| \otimes_B \langle l| \quad , \quad \left(\rho^{T_A}\right)_{kl}^{ij} = \rho_{il}^{kj} \qquad (۱-۱۷)$$

اگر A و B هر دو یک تبدیل یکانی موضعی انجام دهند، این تبدیل حتی با انجام ترانهاده جزئی توسط یکی از آنها همچنان یکانی باقی می‌ماند. یعنی:

$$\begin{gathered} u = u_A \otimes u_B \quad ; \quad (u)(u^\dagger) = 1 \\ \rho^{new} = u\rho u^\dagger \quad \rightarrow \quad (\rho^{new})^{T_A} = \left(u\rho u^\dagger\right)^{T_A} \\ \rho^{new} = u_A \otimes u_B \rho u_A^\dagger \otimes u_B^\dagger \quad \Longrightarrow \quad (\rho^{new})^{T_A} = u_A^* \otimes u_B \rho^{T_A} u_A^T \otimes u_B^\dagger \end{gathered} \qquad (۱-۱۸)$$

برای مثال هرگاه $H_B = c^N$ و $H_A = c^2$، آنگاه ρ یک ماتریس $2N \times 2N$ می‌باشد، که به صورت زیر نوشته می‌شود:

۱۴- Local Operators

۱۵- Global Operator

$$\rho = (|0\rangle_A\langle 0|)A + (|0\rangle_A\langle 1|)B + (|1\rangle_A\langle 0|)C \qquad (۱۹-۱)$$

به طوری که ماتریس‌های $C = C^\dagger$، B و $A = A^\dagger$ روی فضای B اثر می‌کنند. ρ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\rho = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\dagger & C \end{pmatrix} = \rho^\dagger \quad , \quad \rho^{T_A} = \begin{pmatrix} A & B^\dagger \\ B & C \end{pmatrix} \quad , \quad \rho^{T_B} = \begin{pmatrix} A^\dagger & B^\dagger \\ B^* & C^\dagger \end{pmatrix}$$
$$\rho^T = \begin{pmatrix} A & B^\dagger \\ B & C \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\rho^{T_A}\right)^{T_A} = \rho^T \qquad (۲۰-۱)$$

ترانهاده جزئی یک عملگر فیزیکی قوی می‌باشد.

۱-۱۰ رد جزئی[۱۶]

رد جزئی یک حالت از سیستم مرکب نسبت به هر کدام از دو سیستم A یا B ماتریس چگالی مربوط به زیر سیستم دیگر را می‌دهد. به عنوان مثال ماتریس چگالی مربوط به حاصل‌ضرب خالص $|\psi\rangle = |e, f\rangle$ را در نظر بگیرید:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = (|e\rangle_A \otimes |f\rangle_B)\,({}_A\langle e| \otimes {}_B\langle f|) = |e\rangle_A\,{}_A\langle e| \otimes |f\rangle_B\,{}_B\langle f| \qquad (۲۱-۱)$$

رد جزئی ρ نسبت به زیرسیستم A به صورت زیر است:

$$tr_A(\rho) = \underbrace{{}_A\langle e|e\rangle_A}_{=1} |f\rangle_B\,{}_B\langle f| = |f\rangle_B\,{}_B\langle f| \equiv \rho_B \qquad (۲۲-۱)$$

رد جزئی آن نسبت به زیرسیستم B به صورت زیر می‌باشد:

$$tr_B(\rho) = |e\rangle_A\,{}_A\langle e| \equiv \rho_A \qquad (۲۳-۱)$$

رد جزئی یک حالت خالص دلخواه را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد. فرض کنید $|\psi\rangle = \sum_{i,\mu} a_{i\mu}\,|i\rangle_A|\mu\rangle_B$ تجزیه‌ی اشمیت یک حالت خالص دلخواه باشد، در این صورت داریم:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{i,\mu} a_{i\mu}\,a_{i\mu}^*|i\rangle_A|\mu\rangle_B\,{}_A\langle i|_B\langle\mu| \qquad (۲۴-۱)$$

---

[۱۶]- Partial Trace

با فرض اینکه $\{|\nu\rangle_B\}$ پایه‌های سیستم B باشد، داریم:

$$\rho_A = tr_B(\rho) = tr_B(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_\nu {}_B\langle\nu|\psi\rangle\,\langle\psi|\nu\rangle_B$$

$$= \sum_\nu \sum_{i,\mu} a_{i\mu}\, a^*_{i\mu}\, {}_B\langle\nu|\mu\rangle_B\ {}_B\langle\mu|\nu\rangle_B |i\rangle_A\, {}_A\langle i| \qquad (۲۵-۱)$$

$$= \sum_{i,\mu} |a_{i\mu}|^2\, {}_B\langle\mu| \underbrace{\left(\sum_\nu |\nu\rangle_B\, {}_B\langle\nu|\right)}_{=1} |\mu\rangle_B |i\rangle_A\, {}_A\langle i|$$

$$= \sum_{i,\mu} |a_{i\mu}|^2\, \underbrace{{}_B\langle\mu|\mu\rangle_B}_{=1} |i\rangle_A\, {}_A\langle i| = \sum_{i,\mu} |a_{i\mu}|^2\, |i\rangle_A\, {}_A\langle i| \quad \Rightarrow \rho_A = \sum_i p_i\, |i\rangle_A\, {}_A\langle i|$$

که درآن $p_i = \sum_\mu |a_{i\mu}|^2$ می‌باشد.

مثال: رد جزئی $|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)_{AB}$ نسبت به زیرسیستم A و B پیدا می‌کنیم:

$$\rho_{AB} = |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}| = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)_{AB}$$

$$= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0|_A \otimes |0\rangle\langle 0|_B + |0\rangle\langle 1|_A \otimes |0\rangle\langle 1|_B$$

$$+ |1\rangle\langle 0|_A \otimes |1\rangle\langle 0|_B + |1\rangle\langle 1|_A \otimes |1\rangle\langle 1|_B)$$

$$\rho_A = tr_B(\rho_{AB})$$

$$= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0|_A tr(0\rangle\langle 0|_B) + |0\rangle\langle 1|_A tr(0\rangle\langle 1|_B)$$

$$+ |1\rangle\langle 0|_A tr(1\rangle\langle 0|_B) + |1\rangle\langle 1|_A tr(1\rangle\langle 1|_B))$$

$$= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0|_A + |1\rangle\langle 1|_A) \equiv \frac{I_A}{2}$$

$$\rho_B = tr_A(\rho_{AB})$$

$$= \frac{1}{2}(tr(0\rangle\langle 0|_A)|0\rangle\langle 0|_B + tr(0\rangle\langle 1|_A)|0\rangle\langle 1|_B$$

$$+ tr(1\rangle\langle 0|_A)|1\rangle\langle 0|_B + tr(1\rangle\langle 1|_A)|1\rangle\langle 1|_B)$$

$$= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0|_B + |1\rangle\langle 1|_B) \equiv \frac{I_B}{2}$$

که I_A و I_B ماتریس‌های واحد (همانی) در زیرسیستم‌های A و B می‌باشد. حالتی که تمام ردهای جزئی آن متناسب با ماتریس واحد باشد، کاملاً در هم تنیده نامیده می‌شود. به $\rho_A = tr_B(\rho_{AB})$ و $\rho_B = tr_A(\rho_{AB})$ اپراتورهای ماتریس کاهیده نیز گفته می‌شود.

۱-۱۱ آنتروپی

مفهوم اساسی آنتروپی اطلاعات، در نظریه‌ی اطلاعات، در ارتباط با این مطلب است که یک سیگنال یا رخداد اتفاقی تا چه حد تصادفی است. آنتروپی اطلاعات، که با نام آنتروپی شانون هم شناخته می‌شود، در واقع میزان تصادفی بودن را به صورت یک سنجه‌ی ریاضی گزارش می‌کند. پس آنتروپی یعنی درهم ریختگی و آشفتگی و یا میزان تصادفی بودن یا میزان پیشامدی را گویند که در نظریه‌ی ارتباطات به عنوان سنجه‌ی اطلاعات به کار می‌رود.

۱-۱۱-۱ آنتروپی شانون

یکی از مفاهیم کلیدی نظریه‌ی اطلاعات کلاسیکی آنتروپی شانون است. [41] آنتروپی شانون وابسته به متغیر تصادفی X به صورت کمی معین می‌کند که وقتی X را بدانیم، به طور میانگین چه مقدار اطلاعات به دست می‌آوریم. دیدگاه دیگر این است که آنتروپی X میزان عدم قطعیت در مورد X را اندازه‌گیری می‌کند. قبل از آنکه مقدار آن را بدانیم.

آنتروپی یک متغیر تصادفی به وسیله‌ی احتمال‌های مقادیر ممکن مختلفی که متغیر تصادفی به خود می‌گیرد، به طور کامل تعیین می‌شود. به همین دلیل اغلب اقات آنتروپی را به عنوان تابعی از توزیع احتمال $p_1, \cdots, p_n$ در نظر می‌گیریم. آنتروپی وابسته به این توزیع احتمال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(X) = H(p_1, \cdots, p_n) \equiv -\sum_x p_x \log p_x \qquad (۲۶-۱)$$

در این تعریف لگاریتم در پایه ۲ می‌باشد. همچنین اگر $p_x = 0$ باشد، آنگاه $0 \log 0 = 0$ است.

۲-۱۱-۱ آنتروپی الحاقی

آنتروپی الحاقی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H(x, y) \equiv -\sum_{x,y} p(x, y) \log p(x, y) \qquad (۲۷-۱)$$

آنتروپی الحاقی، عدم قطعیت کلی را درباره‌ی زوج (x, y)، اندازه‌گیری می‌کند.

۳-۱۱-۱ آنتروپی شرطی

فرض کنید مقدار y را بدانیم، در این صورت $H(y)$ بیت اطلاعات مربوط به زوج (x, y) را بدست می‌آوریم. از این رو عدم قطعیت باقی‌مانده در باره‌ی زوج (x, y)، ناشی از عدم اطلاع ما درباره x است. بنابراین آنتروپی x، به شرط دانستن y، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(x|y) \equiv H(x,y) - H(y) \qquad (۲۸ - ۱)$$

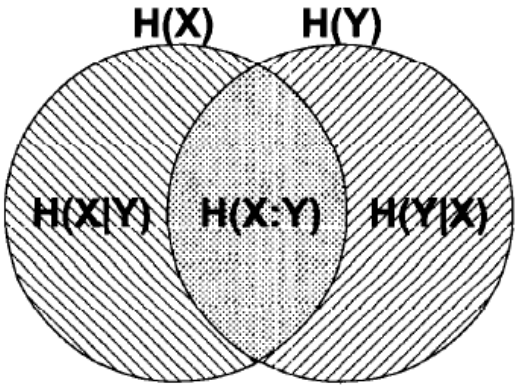
۱-۱۱-٤ اطلاعات متقابل

این کمیت، محتوی اطلاعات متقابل یعنی میزان اطلاعات مشترک زوج (x,y) را می‌سنجد. فرض کنید محتوی اطلاعات x، یعنی $H(x)$، را با محتوای اطلاعات y، یعنی $H(y)$، جمع کنیم. بدیهی است که در این حاصل‌جمع تمام اطلاعات مربوط به زوج (x,y) دست کم یک‌بار به حساب می‌آید. زیرا اطلاعات مشترک زوج (x,y) دوبار و اطلاعات غیرمشترک این زوج تنها یکبار به حساب می‌آید، که با تفریق کردن اطلاعات توأم (x,y)، یعنی $H(x,y)$، اطلاعات مشترک یا متقابل زوج (x,y) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(x:y) \equiv H(x) + H(y) - H(x,y) \qquad (۲۹ - ۱)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که میان آنتروپی شرطی و اطلاعات متقابل رابطه‌ی مفید زیر برقرار است:

$$H(x:y) \equiv H(x) - H(x|y) \qquad (۳۰ - ۱)$$



شکل۳-۱: طرحواره‌ی بیانگر رابطه‌ی بین آنتروپی‌های مختلف.

۱-۱۱-۵ خواص آنتروپی شانون

خواص آنتروپی شانون به صورت زیر است:

1) $H(x,y) = H(y,x) \quad , \quad H(x:y) = H(y:x)$

2) $H(x|y) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad H(x:y) \leq H(y)$

در این رابطه تساوی برقرار است، اگر و فقط اگر y تابعی از x باشد.