

# فهرست مندرجات

۱	منحنی بزیر	۱
۲	..... مقدمه	۱-۱
۶	..... الگوریتم دوکاستل جو	۲-۱
۷	..... منحنی بزیر	۳-۱
۱۱	..... تکرار فرایند افزایش درجه یک منحنی بزیر	۱-۳-۱
۱۳	..... فرایند کاهش درجه یک منحنی بزیر	۲-۳-۱
۱۴	..... شکل ماتریسی منحنی بزیر	۳-۳-۱
۱۵	..... منحنی های پارامتری	۴-۳-۱
۱۵	..... نقش الگوریتم دوکاستل جو در منحنی بزیر	۴-۱
۱۶	..... خصوصیات منحنی بزیر	۵-۱
۱۹	..... قضایای مربوط به چندجمله ای های برنشتاین	۱-۵-۱
۲۵	..... اتصال دو منحنی بزیر و پیوستگی آن در $C^1$	۶-۱
۲۶	..... اتصال دو منحنی بزیر مکعبی	۱-۶-۱
۲۷	..... محاسبه مشتقات منحنی بزیر	۷-۱

۲۷	رابطه بین مشتق بزیر و الگوریتم دوکاستل جو	۸-۱
۲۹	مشتقات مراتب بالاتر منحنی بزیر	۹-۱
۳۰	انتگرال بزیر	۱۰-۱
۳۱	منحنی های بزیر کسری	۱۱-۱
۳۱	۱-۱۱-۱ خواص منحنی بزیر کسری	
۳۳	رویه های بزیر	۲
۳۴	مقدمه	۱-۲
۳۴	رویه بزیر سه بعدی	۲-۲
۳۷	رویه بزیر مثلثی	۱-۲-۲
۳۸	قضایای مربوط به بزیر حاصلضربی	۲-۲-۲
۳۹	کاهش درجه بزیر حاصلضربی با ثابت نگه داشتن مرزها	۳-۲-۲
۳۹	تقریب منحنی های مرزی بزیر حاصلضربی	۴-۲-۲
۴۰	الگوریتم دوکاستل جو برای رویه ها	۳-۲
۴۲	اتصال بزیر دوخطی	۴-۲
۴۳	رویه های آمیخته	۵-۲
۴۴	روش اتصال دوخطی <i>Coons</i>	۱-۵-۲
۴۷	روش اتصال دومکعبی <i>Coons</i>	۲-۵-۲
۴۹	روش اتصال مثلثی <i>Coons</i>	۶-۲
۵۱	روش رویه ضمنی	۱-۶-۲
۵۲	$T$ -اسپلاین	۲-۶-۲

۵۴	روش کمترین مربعات برای حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از نقاط کنترلی	۳
۵۵	مقدمه	۱-۳
۵۶	روش کمترین مربعات برای مسایل مقدار مرزی معمولی	۲-۳
۵۶	روش کمترین مربعات با استفاده از نقاط کنترلی بزیر	۱-۲-۳
۵۹	افزایش درجه منحنی بزیر	۳-۳
۶۲	همگرایی	۴-۳
۶۲	قضایای مربوط به افزایش درجه	۱-۴-۳
۶۶	زیرتقسیمات	۲-۴-۳
۷۴	کاربرد رویه بزیر	۴
۷۵	مقدمه	۱-۴
۷۷	تاریخچه اتصال	۲-۴
۷۸	استفاده از بزیرها برای طراحی شبکه منحنی های نامنظم	۳-۴
۸۰	طرح زیرتقسیمات برای پنج ضلعی و شش ضلعی	۱-۳-۴
۸۱	تولید منحنی برشی با استفاده از رویه ها	۲-۳-۴
۸۲	تولید رویه اولیه	۴-۴
۸۲	تولید رویه از منحنی های مرزی	۱-۴-۴
۸۴	تولید رویه با استفاده از شکل رویه به صورت ضمنی	۲-۴-۴
۸۵	ساخت رویه $G^1$	۵-۴
۸۵	شرط پیوستگی $G^1$ با توابع اسکالروزی درجه یک و درجه چهار	۱-۵-۴
۹۰	شرط پیوستگی $G^1$ رأسی	۲-۵-۴

۹۷	..... شرط پیوستگی $G^1$ یالی	۳-۵-۴
۹۸	..... طراحی نقاط نرمال رویه کراندار از شبکه منحنی کراندار	۶-۴
۹۹	..... تولید نقاط پراکنده یکنواخت در رویه ضمنی	۷-۴
۱۰۰	..... تولید منحنی های برشی	۸-۴
۱۰۳	..... قیود چسبیدگی رأسی در روش زیرتقسیمات با $T$ تقاطع ها	۹-۴
۱۰۴	..... قیود چسبیدگی رأسی در روش زیرتقسیمات چهارضلعی و شش ضلعی	۱۰-۴
۱۰۵	..... تحلیل الگوریتم ساخت رویه $G^1$	۱۱-۴
۱۰۶	..... تحلیل خطا	۱-۱۱-۴
۱۰۷	..... تحلیل پیوستگی $G^1$	۲-۱۱-۴
۱۰۷	..... نتایج	۱۲-۴
۱۰۸	..... شبکه منحنی	۱-۱۲-۴
۱۱۰		A مراجع
۱۱۳		B واژه‌نامه

## مقدمه و تاریخچه

منحنی های بزیر<sup>۱</sup> در گرافیک کامپیوتری و مدل های هندسی کاربردهای بسیاری دارند. یک منحنی بزیر با راس های یک چندضلعی در ارتباط است که بعضی از رئوس این چندضلعی بر روی این منحنی قرار دارند و دیگر رئوس چندضلعی تعیین کننده، شکل منحنی هستند. از آنجا که شکل منحنی از شکل چندضلعی تبعیت می کند، با تغییر راس های این چندضلعی، کاربرابطای بین داده ها و خروجی کامپیوتر را به خوبی احساس می کند. این مساله وی را قادر می سازد که مانند یک طراح، شکل منحنی و درجه آن را با استفاده از پارامترهای کنترل شده ورودی تا هنگامی که شکل دلخواه وی به وجود آید، تعیین نماید [۱۶، ۲۶].

تنها عملی که برای افزایش درجه هر کدام از قطعات اتصالی بزیر بایستی انجام گیرد، مشخص کردن یک راس داخلی دیگر است. از این رو، این شیوه قابلیت انعطاف پذیری بسیاری ایجاد می کند.

منحنی های بزیر در دوران رقابت دو مهندس اروپایی در دهه ۱۹۶۰ به منظور طراحی اجزای ماشین کشف شد. این دو مهندس رقیب، یکی پیر بزیر<sup>۲</sup> بود که در کارخانه رنو و دیگری پل دوکاستل جو<sup>۳</sup> که در کارخانه اتومبیل سازی سیتروئن<sup>۴</sup> فعالیت داشت.

هرچند این منحنی ها به نام بزیر ثبت شده است، ولی دوکاستل جو اولین کسی بود که از این منحنی ها استفاده کرد ولی بزیر زودتر آن را به چاپ رساند، لذا این منحنی ها به نام او شهرت یافته است. در واقع دوکاستل جو از این منحنی ها در سال ۱۹۵۹ شروع به استفاده کرد، ولی تحقیقاتش تا سال ۱۹۷۵ که توسط بوم<sup>۵</sup> چاپ شد، همچنان پنهان مانده بود. روش دوکاستل جو یک روش، بر مبنای روش بازگشتی است در حالی که روش بزیر صریح است [۲۵].

یکی از مهم ترین مباحث *CAD*<sup>۶</sup> منحنی ها و سطوح بزیر است. *CAD* را می توان به هرگونه استفاده از کامپیوتر در طراحی یک قسمت، بخش یا کل یک سیستم اطلاق کرد.

صنایع خودروسازی عموماً با سیستم های *CAD* در ارتباط نزدیکی هستند. تکنولوژی کامپیوتر، مهندسين

---

<sup>۱</sup> Bezier curves

<sup>۲</sup> Pierre Bezier

<sup>۳</sup> de Casteljau

<sup>۴</sup> Citroen

<sup>۵</sup> W.Boehm

<sup>۶</sup> Computer Aided Design

را قادر می سازد که طرح های جدید خودروها را به سمت ایجاد ایمنی بالا و کاهش وزن خودرو برای مصرف کمتر سوخت پیش ببرند. در صورت به کارگیری سیستم های CAD، زمان و هزینه ساخت اتومبیل ها کاهش می یابند.

بازدهی و کارایی تکنولوژی CAD در طراحی خودرو، موقعی آشکار شد که کمپانی جنرال موتورز از تکنیک شبیه سازی کامپیوتری در طرح ماشین های سری B بهره گرفت. این تکنولوژی، به مهندسان این توانایی را می داد تا از وزن ماشین با حفظ سرعت، قابلیت و کیفیت حمل و نقل آن، حدود ۵۰۰ کیلو بکاهد. از دیگر فایده های حاصل از بکارگیری شبیه سازی کامپیوتری در صنایع اتومبیل سازی، کاهش هزینه و زمان ساخت محصولات است. برای مثال، در طرح ماشین کادیلاک سویل، زمان زیادی بر روی شبیه سازی کامپیوتری آن صرف شد و یک طرح خوب و قابل اجرا در مدت شش ماه و کمتر از زمان پیش بینی شده به دست آمد.

با آغاز جنگ جهانی دوم کارخانه های هواپیما سازی شروع به ساخت هواپیما نمودند و این محرکی برای اختراع و سرعت بخشی طرح های جدید گردید که خود باعث توسعه هرچه بیش تر طراحی هندسی برای ساخت بدنه هواپیما شد. به عنوان مثال در سال ۱۹۴۴ لیمینگ<sup>۸</sup> از روش فوق بیضوی<sup>۹</sup> با یک دستگاه محاسبه گر الکترونیک<sup>۱۰</sup> برای طراحی بدنه هواپیما استفاده کرد.

از این روش برای کشتی نیز استفاده می شد ولی مشکلاتی نیز در برداشت که از آن جمله می توان نیاز به فضای بزرگ برای کشیدن طرح کشتی در نزدیک محل ساخت کشتی و بروز مشکلاتی در دستگاه های محاسبه گر به علت رطوبت آن محل ها اشاره کرد.

با اختراع دستگاه های محاسبه گر پیشرفته تر این رشته توسعه بیش تری یافت و در سال ۱۹۶۳ فرگوسن<sup>۱۱</sup> روشی به وجود آورد که با استفاده از منحنی های قطعه به قطعه یک منحنی هموار می ساخت و با استفاده از آن، منحنی ها و سطح ها را به وجود می آورد [۱]، [۶].

در این پایان نامه، در فصل اول، به تعریف منحنی های بزیر پرداخته، سپس خواص آنها را مورد بررسی قرار می دهیم. در فصل دوم، رویه های بزیر و روش تولید انواع این رویه ها شرح می دهیم. در فصل سوم، به کاربرد منحنی های بزیر در حل معادلات دیفرانسیل با مرز اولیه می پردازیم. در فصل چهارم، تعریفی از

---

Full-sized B cars<sup>۷</sup>

Liming<sup>۸</sup>

Super-Elliptic<sup>۹</sup>

Electro-Mechanical<sup>۱۰</sup>

Ferguson<sup>۱۱</sup>

شرط پیوستگی  $G^1$  ارائه می شود و در ادامه به کاربرد رویه های بزیر در طراحی بدنه کشتی با استفاده از شرایط پیوستگی  $G^1$  پرداخته می شود.

# فصل ۱

منحنی برزیر

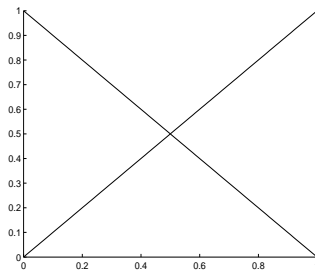


## ۱-۱ مقدمه

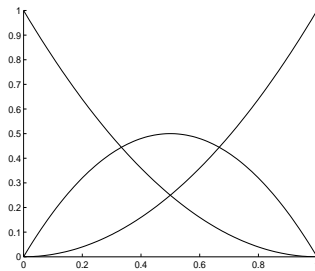
در این فصل به معرفی منحنی بزییر و خصوصیات آن می پردازیم. این منحنی ها مبتنی بر چندجمله ای های برنشتاین<sup>۱</sup> باشند، صورت کلی چندجمله ای های برنشتاین  $t \in [0, 1]$  به صورت زیر است [۲۲]

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i, \quad 0 \leq i \leq n.$$

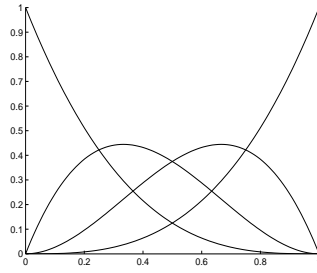
که به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ، تعداد  $n+1$  چندجمله ای تولید می شود (برای  $i=0$  تا  $i=n$ ). در ادامه، چندجمله ای های برنشتاین به ازای  $n=1$  تا  $n=8$  در اشکال زیر نمایش داده شده اند (مثلاً  $B_{1,1}(t) = t$  و  $B_{0,1}(t) = 1-t$ ).



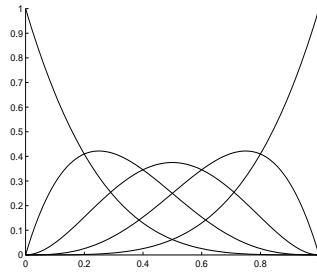
شکل ۱-۱: چندجمله ای های برنشتاین از درجه یک



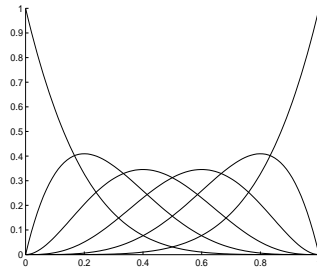
شکل ۱-۲: چندجمله ای های برنشتاین از درجه دو



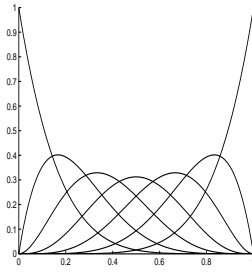
شکل ۱-۳: چندجمله ای های برنشتاین از درجه سه



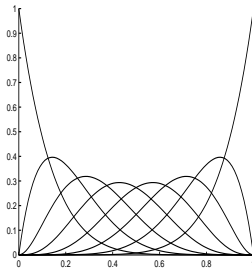
شکل ۱-۴: چندجمله ای های برنشتاین از درجه چهار



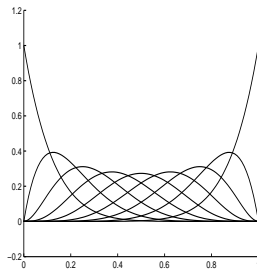
شکل ۱-۵: چندجمله ای های برنشتاین از درجه پنج



شکل ۱-۶: چندجمله ای های برنشتاین از درجه شش



شکل ۱-۷: چندجمله ای های برنشتاین از درجه هفت



شکل ۱-۸: چندجمله ای های برنشتاین از درجه هشت

مهم ترین خواص چندجمله ایهای برنشتاین عبارتند از (در بخش ۱-۵-۱ اثبات می شود) [۲۱، ۲۳]

• شرایط مرزی

$$B_{i,n}(0) = B_{i,n}(1) = 0, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$B_{0,n}(0) = B_{n,n}(1) = 1$$

- خاصیت نرمال بودن

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1$$

- خاصیت مثبت بودن

$$B_{i,n}(t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

- خاصیت مثبت بودن

$$B_{i,n}(t) = B_{n-i,n}(1-t)$$

- پیشینه چندجمله ای

هرکدام از چندجمله ای های برنشتاین در بازه  $0 \leq t \leq 1$  دارای یک مقدار بیشینه هستند که در  $t = \frac{i}{n}$  رخ می دهد.

همان طور که پیش تر اشاره شد، منحنی بزیر بر مبنای چندجمله ای های برنشتاین تعریف می شود، این منحنی مانند سایر منحنی های حاصل از برازش (درون یابی) الزامی به عبور از نقاط مرجع ندارد. اگر مجموعه نقاط مرجع یا نقاط کنترلی که می توانند دارای دو یا سه بعد باشند، به صورت  $P = \{P_0, \dots, P_n\}$

باشد، منحنی بزیر مبتنی بر این نقاط، به صورت زیر تعریف می شود [۱]

$$C(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t), \quad t \in [0, 1]$$

اگر نقاط کنترل، نقاطی در صفحه باشند، منحنی بزیر به صورت زیر خواهد بود

$$C(t) = \begin{bmatrix} x_{bezier} \\ y_{bezier} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \times B_{0,n}(t) \\ y_0 \times B_{0,n}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \times B_{1,n}(t) \\ y_1 \times B_{1,n}(t) \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} x_n \times B_{n,n}(t) \\ y_n \times B_{n,n}(t) \end{bmatrix}$$

بنابراین، مولفه اول منحنی بزیر بر اساس ترکیب خطی چندجمله ای های برنشتاینی که در آن مولفه اول نقاط کنترل، به عنوان ضرایب ترکیب در نظر گرفته شده اند، حاصل می شود و به طور مشابه مولفه دوم یا سوم تعریف می شوند.

با توجه به ویژگی های چندجمله ای های برنشتاین که پیش تر ذکر شد، منحنی بزیر قطعاً از نقاط  $P_0$  و  $P_n$  خواهد گذشت و همچنین در این نقاط بر خط واصل  $P_0 P_1$  و  $P_{n-1} P_n$  مماس است [۱۳].

در بخش ۱-۲، منحنی بزیر برای چهار نقطه ی کنترلی در موقعیت های مختلف ارائه شده است.

در صورتی که یکی از نقاط کنترل جابجا شود، تمام منحنی دچار تغییر می شود، اما در بسیاری اوقات ممکن است که تمام نقاط برای ما اهمیت یکسانی نداشته باشند و بخواهیم تاثیر برخی نقاط را در شکل نهایی منحنی بزیر افزایش دهیم. برای این کار، می توان از ضرایب وزنی برای نقاط مختلف استفاده کرد. منحنی بزیر حاصل، که در آن وزن (اهمیت) نقاط مختلف، متفاوت است، را منحنی بزیر کسری می نامیم (بعداً توضیح داده می شود) [۲۵، ۲۶].

## ۲-۱ الگوریتم دوکاستل جو

الگوریتم دوکاستل جو<sup>۲</sup>، توسط پل دوکاستل جو در سال ۱۹۵۹ ابداع شد. این الگوریتم، روشی تکراری برای محاسبه منحنی های بزیر می باشد [۲۴].

الگوریتم دوکاستل جو برای نقاط کنترلی  $P_0, \dots, P_n$  و  $t_0 \in \mathbb{R}$  به صورت زیر است

$$P_i^0(t_0) := P_i \quad (i = 0, \dots, n) \quad (1-1)$$

$$P_i^j(t_0) := P_i^{j-1}(1-t_0) + P_{i+1}^{j-1}t_0 \quad (i = 0, \dots, n-j, j = 1, \dots, n) \quad (2-1)$$

$$C(t_0) = P_0^n.$$

چون (۱-۱)، (۱+ $n$  دفعه و (۲-۱)،  $n^2 \approx n(n-j+1)$  دفعه تکرار می شود، بنابراین این الگوریتم از مرتبه  $O(n^2)$  می باشد.

اکنون الگوریتم را از نظر هندسی (شکل ۱-۹)، شرح می دهیم (برای  $n=3$ ):

فرض کنید نقاط کنترلی  $P_0, P_1, P_2, P_3$  با خط قرمز به هم متصل شده باشند (که این منحنی کنترل ایجاد شده، شکل یک چندوجهی<sup>۳</sup> را دارد). فاصله آنها به نسبت  $t_0$  و  $1-t_0$  تقسیم می شوند تا نقاط سبز رنگ  $P_0^1, P_1^1, P_2^1$  بدست آیند. سپس هر دو نقطه از نقاط سبز رنگ با خطی به هم وصل می شوند و فاصله آنها به نسبت  $t_0$  و  $1-t_0$  تقسیم می شوند تا نقاط  $P_0^2, P_1^2, P_2^2$  بدست آیند. سپس هر دو نقطه از نقاط آبی رنگ با خطی به هم وصل می شوند و دوباره تقسیم بندی انجام می شود، تا نقطه سیاه بدست آید، سپس این نقطه کنار گذاشته می شود، این نقطه، مکان حرکت در زمان  $t_0$  است [۲۴].



یعنی منحنی از  $P_0$  شروع و به  $P_n$  ختم می شود و  $\overrightarrow{P_0 P_1}$  و  $\overrightarrow{P_{n-1} P_n}$  شیب برداری منحنی در نقاط انتهایی اش می باشد. بنابراین اگر  $P_0, \dots, P_n$  نقاط کنترلی باشند، (در بازه  $[0, 1]$ ) داریم [۳، ۵]

$$C'(0) = n \overrightarrow{P_0 P_1} \quad (6-1)$$

$$C'(1) = n \overrightarrow{P_{n-1} P_n} \quad (7-1)$$

اکنون اگر نقاط کنترلی را به دو دنباله  $P_0, \dots, P_{n-1}$  و  $P_n, \dots, P_1$  تفکیک کنیم، در این صورت

$$C_{P_0, \dots, P_n}(t) = (1-t)C_{P_0, \dots, P_{n-1}}(t) + tC_{P_1, \dots, P_n}(t) \quad (8-1)$$

و در نتیجه

$$C_{P_0}(t) = P_0. \quad (9-1)$$

از فرمول (۸-۱) می توان یک فرمول صریح برای بزیرها بدست آورد

$$C_{P_0, P_1} = (1-t)C_{P_0} + tC_{P_1} = (1-t)P_0 + tP_1 \quad (10-1)$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} C_{P_0, P_1, P_2} &= (1-t)C_{P_0, P_1} + tC_{P_1, P_2} \\ &= (1-t)[(1-t)P_0 + tP_1] + t[(1-t)P_1 + tP_2] \\ &= (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2 \end{aligned} \quad (11-1)$$

پس برای محاسبه  $C_{P_0, \dots, P_n}$  کافی است از جملات بسط  $((1-t) + t)^{n-1}$  استفاده کنیم. مثلاً اگر پنج نقطه کنترلی داشته باشیم، وزن ها عبارتند از

$$(1-t)^4, 4t(1-t)^3, 6t^2(1-t)^2, 4t^3(1-t), t^4 \quad (12-1)$$

و منحنی بزیر از درجه چهار به صورت زیر می باشد

$$C_{P_0, \dots, P_4} = (1-t)^4 P_0 + 4t(1-t)^3 P_1 + 6t^2(1-t)^2 P_2 + 4t^3(1-t) P_3 + t^4 P_4. \quad (13-1)$$

بنابراین هر نقطه در منحنی بزیر متناسب بانقاط ورودی وزن اختیار می کند. علاوه بر آن داریم [۵]

$$\|C(t)\| \leq \max_i \|P_i\| \quad (14-1)$$

برای این که یک منحنی بزیر از درجه  $n$ ،  $C(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t)$  را بتوان به یک منحنی از درجه  $n+1$ ،  $C(t) = \sum_{i=0}^{n+1} P_i^1 B_{i,n+1}(t)$  تبدیل کرد، قرار می دهیم

$$C(t) = (1-t)C(t) + tC(t) \\ = \sum_{i=0}^n \frac{n+1-i}{n+1} P_i B_{i,n+1}(t) + \sum_{i=0}^n \frac{i+1}{n+1} P_i B_{i+1,n+1}(t)$$

چون سیگمای اولی برای  $i = n+1$  صفر می باشد، می توان اندیس بالای سیگما را به  $n+1$  تغییر داد، همچنین برای سیگمای دومی، اندیس  $i$  درون سیگما را یک واحد کاهش و کران های سیگما را یک واحد افزایش داد، چون این سیگما برای  $i = 0$  مقدار صفر را دارد، اندیس این سیگما را به  $i = 0$  می توان تغییر داد

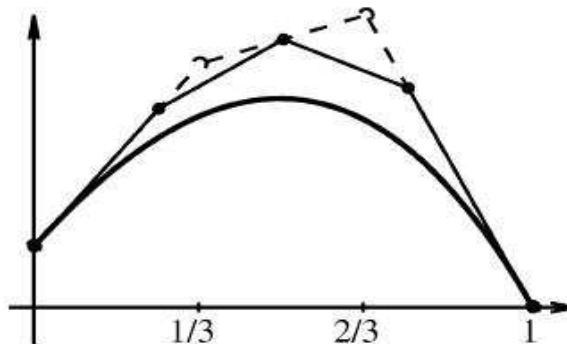
$$C(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{n+1-i}{n+1} P_i B_{i,n+1}(t) + \sum_{i=0}^{n+1} \frac{i}{n+1} P_{i-1} B_{i,n+1}(t)$$

باساده سازی این رابطه داریم

$$C(t) = \sum_{i=1}^{n+1} P_i^1 B_{i,n+1} \\ P_i^1 = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + (1 - \frac{i}{n+1}) P_i \quad (15-1)$$

با نقاط کنترلی  $P_i^1$ ، نقاط کنترلی جمعاً  $n+2$  نقطه می شوند (برای مثال در شکل ۱-۱۰ می توان افزایش درجه یک منحنی بزیر از درجه سه به چهار را مشاهده کرد).

بنابراین می توان درجه یک منحنی بزیر (از درجه  $n$ ) به  $n+m$  افزایش داد به طوری که وقتی  $m \rightarrow \infty$  این منحنی به  $C(t)$  (منحنی ای که از بزیر برای تقریب آن استفاده می کنیم) به صورت یکنواخت همگرا باشد ( $C(t)$  می تواند یک چندجمله ای از درجه نامتناهی باشد).



شکل ۱-۱۰: افزایش درجه یک منحنی بزیر



از روند ذکر شده در بالا، نقطه کنترلی  $P_i^m$  به صورت زیر می باشد

$$P_i^m - C\left(\frac{i}{n+m}\right) = o\left(\frac{1}{n+m}\right), m \rightarrow +\infty \quad (16-1)$$

زیرا

$$P_i^{\forall} = \frac{i}{n+2}P_{i-1}^{\lambda} + \left(1 - \frac{i}{n+2}\right)P_i^{\lambda} \quad (17-1)$$

با جایگذاری (۱۵-۱) در (۱۷-۱) داریم

$$P_i^{\forall} = \frac{i}{n+2} \left[ \frac{i-1}{n+1}P_{i-2}^{\lambda} + \left(1 - \frac{i-1}{n+1}\right)P_{i-1}^{\lambda} \right] + \left(1 - \frac{i}{n+2}\right) \left[ \frac{i}{n+1}P_{i-1}^{\lambda} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)P_i^{\lambda} \right] \quad (18-1)$$

با ادامه روند بالا به فرمول (۱۶-۱) می رسیم [۱۲، ۱۵].

از خصوصیات دیگر منحنی بزیر، این است که می توان  $[a, b]$  را به زیر بازه هایی تفکیک کرد (مثلاً با قرار دادن  $t = c$  ( $a < c < b$ ))، برای  $[a, c]$  و  $[c, b]$  به ترتیب  $C_L(t)$  و  $C_R(t)$  به صورت زیر تعریف می شوند

$$C_L(t) = \sum_{i=0}^n P_i^L B_{i,n}\left(\frac{t-a}{c-a}\right) \quad (19-1)$$

$$C_R(t) = \sum_{i=0}^n P_i^R B_{i,n}\left(\frac{t-c}{b-c}\right), \quad (20-1)$$

که در آنها نقاط کنترلی  $P_i^L$  و  $P_i^R$  توسط الگوریتم دوکاستل جو به صورت زیر محاسبه می شوند

$$P_i^L = \sum_{j=0}^i P_j B_{j,i}(\alpha) \quad (21-1)$$

$$P_i^R = \sum_{j=i}^n P_j B_{j-i,n-i}(\alpha), \quad (22-1)$$

که در آنها  $\alpha = \frac{c-a}{b-a}$  می باشد.

مثلاً فرض کنید  $n = 2$ ،  $a = 0$ ،  $b = 2$ ،  $c = 1$ ،  $\alpha = \frac{1}{2}$  و  $P_0, P_1, P_2$  نقاط کنترلی موردنظر باشند، بنابه الگوریتم دوکاستل جو داریم

$$P_0^L = P_0 = P_0 B_{0,0}(\alpha)$$

$$P_1^L = (1-\alpha)P_0 + \alpha P_1 = P_0 B_{0,1}(\alpha) + P_1 B_{1,1}(\alpha)$$

$$P_2^L = (1-\alpha)^2 P_0 + 2\alpha(1-\alpha)P_1 + \alpha^2 P_2 = P_0 B_{0,2}(\alpha) + P_1 B_{1,2}(\alpha) + P_2 B_{2,2}(\alpha)$$

$$P_0^R = (1-\alpha)^2 P_0 + 2\alpha(1-\alpha)P_1 + \alpha^2 P_2 = P_0 B_{0,2}(\alpha) + P_1 B_{1,2}(\alpha) + P_2 B_{2,2}(\alpha)$$

$$P_1^R = (1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2 = P_1 B_{\circ, 1}(\alpha) + P_2 B_{1, 1}(\alpha)$$

$$P_2^R = P_2 = P_2 B_{\circ, \circ}(\alpha)$$

$$C_L(t) = \sum_{i=0}^2 P_i^L B_{i, 2}(t)$$

$$C_R(t) = \sum_{i=0}^2 P_i^R B_{i, 2}(t - 1)$$

که  $P_i^R$  و  $P_i^L$  ( $0 \leq i \leq 2$ ) به ترتیب نقاط کنترلی در بازه‌های  $[0, 1]$  و  $[1, 2]$  هستند و  $C_L(t)$  و  $C_R(t)$  منحنی های بزیر در بازه های  $[0, 1]$  و  $[1, 2]$  هستند [۸].

توجه کنید که مشتق  $k$ ام  $C(t)$  به صورت زیر نمایش داده می شود

$$\frac{d^k C(t)}{dt^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(b-a)^k} \sum_{i=0}^{n-k} \Delta^k P_i B_{i, n-k}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$$

$$\frac{d^k P(a)}{dt^k} = \Delta^k P_0$$

$$\frac{d^k P(b)}{dt^k} = \Delta^k P_{n-k}$$

یادآوری: اگر  $\varphi_i(u) \geq 0$  ( $0 \leq i \leq n$ ) تابع وزنی (که مقدارش داده شده باشد) و  $u \in [0, 1]$  باشد بطوری که  $\sum_{i=0}^n \varphi_i(u) = 1$  و  $P_0, \dots, P_n$  بردارهای دلخواهی باشند آنگاه نامساوی زیر برقرار است [۵]

$$\left\| \sum_{i=0}^n \varphi_i(u) P_i \right\| \leq \max_{i=0}^n \|P_i\|$$

چون  $\sum_{i=0}^n B_{i, n}(t) = 1$  ( $t \in [0, 1]$ ) بنابراین  $\|C(t)\| = \left\| \sum_{i=0}^n P_i B_{i, n}(t) \right\| \leq \max_i \|P_i\|$

### ۱-۳-۱ تکرار فرایند افزایش درجه یک منحنی بزیر

فرض کنیم  $BC(t)$  منحنی ای باشد که از منحنی بزیر  $C_n$  (از درجه  $n$ ) برای تقریب آن استفاده می کنیم. اکنون تکرار فرایند افزایش درجه <sup>۵</sup> را روی منحنی  $C_n$  انجام می دهیم (شکل های ۱-۱ و ۱-۱۲)، منحنی  $\varepsilon C_n$  از آن حاصل شود [۵]. اگر فرایند افزایش درجه را  $r$  مرتبه تکرار کنیم، منحنی های  $\varepsilon C_n, \dots, \varepsilon^r C_n$  بدست می آیند. نقاط کنترلی  $P_0^r, \dots, P_{n+r}^r$  می باشند، به استقرا ریاضی ثابت می شود که  $P_i^r$  ( $i = 0, 1, \dots, n+r$ ) از فرمول زیر محاسبه می شوند (بنابه (۱-۱۵)) [۵]

$$P_i^r = \sum_{j=0}^n P_j \binom{n}{j} \frac{\binom{r}{i-j}}{\binom{n+r}{i}}$$

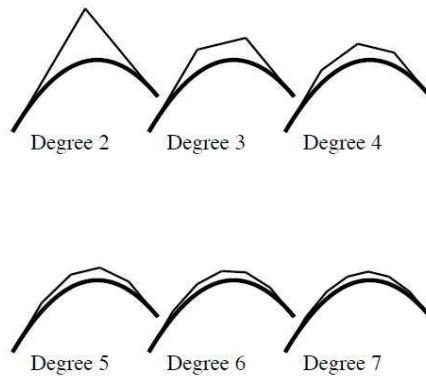
بعداً ثابت می شود که  $\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon^r C = BC$ . اکنون برای پارامتر ثابت  $t$  و برای هر  $r$ ، اندیس  $i$  را طوری می یابیم که  $\frac{i}{n+r}$  به  $t$  نزدیک باشد.

حال اگر  $r \rightarrow \infty$  آنگاه  $\frac{i}{n+r} \rightarrow t$  و بنابه فرمول استرلینگ<sup>۶</sup>

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(n + \frac{1}{2}\right) e^{-n}$$

داریم [۵]

$$\lim_{\frac{i}{n+r} \rightarrow t} \frac{\binom{r}{i-j}}{\binom{r+n}{i}} = t^j (1-t)^{n-j}. \quad (۲۳-۱)$$



شکل ۱-۱۱: تکرار فرایند افزایش درجه

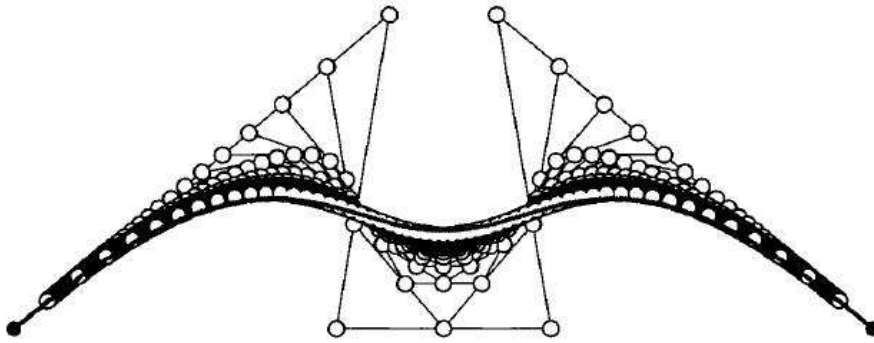
توجه شود که (۲۳-۱) همگرایی توزیع فوق هندسی<sup>۷</sup> را به توزیع دوجمله ای<sup>۸</sup> بیان می کند [۲۳]. بنابراین

$$\lim_{\frac{i}{n+r} \rightarrow t} P_i^{(r)} = \sum_{j=0}^n P_j B_{j,n}(t) = [BC](t)$$

<sup>۶</sup> Stirling's formula

<sup>۷</sup> Hypergeometric distribution

<sup>۸</sup> Binomial distribution



شکل ۱-۱۲: افزایش درجه منحنی بزیر: دنباله ای از چندوجهی ها که با این فرایند خود را به منحنی اصلی، نزدیک می شویم

### ۱-۳-۲ فرایند کاهش درجه یک منحنی بزیر

در این بخش، این سوال مطرح می شود که اگر یک تابع منحنی بزیر از درجه  $n + 1$  داشته باشیم، آیا می توان آن را به یک منحنی از درجه  $n$  تبدیل کرد [۶، ۲۳]؟ در واقع، کاهش درجه به صورت دقیق، امکان پذیر نمی باشد، علت این مطلب را در سطرهای زیر شرح می دهیم.

چون  $P_i^r = \sum_{j=0}^n P_j \binom{n}{j} \frac{\binom{r}{i-j}}{\binom{n+r}{i}}$  (برای  $r = 1$ ) پس داریم

$$P_0^1 = \sum_{j=0}^n P_j \binom{n}{j} \frac{\binom{1}{-j}}{\binom{n+1}{0}} = P_0 \quad (i = 0),$$

$$P_1^1 = \sum_{j=0}^n P_j \binom{n}{j} \frac{\binom{1}{1-j}}{\binom{n+1}{1}} = \frac{P_0}{n+1} + \frac{P_1}{n+1} \quad (i = 1),$$

$$P_2^1 = \sum_{j=0}^n P_j \binom{n}{j} \frac{\binom{1}{2-j}}{\binom{n+1}{2}} = \frac{2P_1}{n+1} + P_2 \frac{n-1}{n+1} \quad (i = 2),$$

⋮

$$P_n^1 = \sum_{j=0}^n P_j \binom{n}{j} \frac{\binom{1}{n-j}}{\binom{n+1}{n}} = P_{n-1} \frac{n}{n+1} + \frac{P_n}{n+1} \quad (i = n),$$

$$P_{n+1}^1 = \sum_{j=0}^n P_j \binom{n}{j} \frac{\binom{1}{n+1-j}}{\binom{n+1}{n+1}} = P_n \quad (i = n+1)$$

بنابراین