بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

موضوع:

رفتارهای عددی معادلات انتگرال - جبری ولترای نیمه‌صریح با هسته‌های منفرد ضعیف

استاد راهنما:

دکتر سعید سهرابی

نام دانشجو:

حمید رنجبر

شهریور ۱۳۹۳

تقدیم به

پدر و مادر بی‌همتا و مهربانم

سپاس گزاری...

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگان، به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است، به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید، و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند، این مجموعه را به پدر و مادر عزیزم تقدیم می‌کنم.

از استاد باکمالات و شایسته، جناب آقای دکتر سعید سهرابی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند، از استادان فرزانه و دلسوز، آقایان دکتر سعید پیش‌بین و دکتر جواد شکری که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند، و از تمامی اساتید دوران تحصیلم، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

حمید رنجبر

شهریور ۱۳۹۳

چکیده

در این پایان‌نامه، هدف، نشان دادن برخی نتایج نظری و عددی برای حل یک سیستم ترکیبی از معادلات انتگرال ولترا از نوع اول و دوم با هسته‌های منفرد ضعیف می‌باشد که به معادلات جبری - انتگرال منفرد ضعیف از اندیس یک معروف هستند. این نوع از معادلات، دارای جواب‌هایی هستند که مشتقات آنها در نقطه انتهایی چپ از بازه انتگرال‌گیری کراندار نیستند. برای غلبه بر این رفتار ناهمواری جواب‌ها، با استفاده از تبدیل مختصات مناسب، سیستم اولیه را به یک سیستم معادلات جبری - انتگرال جدید که جواب‌های آن دارای نظم بهتری هستند، تغییر می‌دهیم. سپس از یک روش عددی موثر بر پایه روش هم‌محلی چبیشف برای حل آن استفاده و تحلیل همگرایی آن را نیز بررسی می‌کنیم. در نهایت، با چندین مثال عددی، تطابق خوب نتایج نظری با سرعت همگرایی به دست آمده از الگوریتم داده شده را نشان می‌دهیم.

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

پیشگفتار

این پایان‌نامه بر اساس مقاله زیر تدوین گردیده است:

- S. Pishbin, F. Ghoreishi, M. Hadizadeh, The semi-explicit Volterra integral algebraic equations with weakly singular kernels: The numerical treatments, J. Comput. Appl. Math. 245 (2013) 121-132.

معادلات جبری - انتگرال دستگاهی مرکب از معادلات انتگرال ولترای نوع اول و دوم می‌باشد که در مسائل مقدار اولیه (یا مرزی) برای نوار نیمه نامتناهی و تعیین مرز درجه حرارت که شامل دو یا سه فاز مسائل استفان معکوس[۱] هستند، کاربرد دارد. همچنین یک پژوهش از برونر[۲] حوزه وسیعی از کاربردهای معادلات جبری - انتگرال را که در مسائل تعیین هسته در انتقال گرما و ویسکوالاستیک[۳] برای ارزیابی واکنش شیمیایی درون باطری کوچک ظاهر می‌شوند را، شامل می‌شود. برای دیدن جزئیات بیشتر در مورد کاربردهای این دسته از معادلات می‌توانید به مراجع [۲، ۸، ۱۲، ۱۳، ۱۷، ۱۸، ۲۵، ۲۷، ۲۸] نگاه کنید.
در این پایان‌نامه با استفاده از مفهوم اندیس قضایای وجود و یکتایی جواب معادلات جبری - انتگرال با هسته منفرد ضعیف از اندیس یک را بیان می‌کنیم. سپس از روش هم‌محلی چبیشف برای حل آن استفاده کرده و تحلیل همگرایی آن را بررسی می‌کنیم. در نهایت با چندین مثال عددی صحت نتایج نظری را با سرعت همگرایی به دست آمده از الگوریتم داده شده نشان می‌دهیم.
این پایان‌نامه در قالب چهار فصل تنظیم شده است:
در فصل اول مفاهیم اولیه‌ای از معادلات انتگرال و نظریه تقریب ارائه می‌شود که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار خواهند گرفت.
در فصل دوم معادلات جبری - انتگرال با هسته‌های هموار و منفرد ضعیف و همچنین

---
[۱] Inverse Stefan problems
[۲] Brunner
[۳] Viscoelastic

معادلات جبری - دیفرانسیل و معادلات جبری - انتگرال - دیفرانسیل را معرفی کرده و با استفاده از تعاریف مختلف اندیس برای این معادلات، قضایای وجود و یکتایی جواب این دسته از معادلات را مطرح می‌کنیم.
در فصل سوم با استفاده از روش هم‌محلی چبیشف معادلات جبری - انتگرال نیمه‌صریح از اندیس یک را حل کرده و سپس به تحلیل همگرایی این روش می‌پردازیم.
در فصل چهارم با چندین مثال عددی صحت نتایج نظری را با سرعت همگرایی به دست آمده از الگوریتم داده شده نشان می‌دهیم. در نهایت نتیجه‌گیری کرده و پیشنهاداتی برای کارهای آتی ارائه خواهیم کرد.

فصل ۱

مقدمه‌ای بر معادلات انتگرال و نظریه تقریب

در این فصل برخی تعاریف و قضایای مقدماتی را که در فصل‌های آتی مورد نیاز هستند، می‌آوریم. ابتدا معادلات انتگرال[1] را معرفی می‌کنیم، سپس مباحثی از نظریه تقریب[2] را مطرح کرده و در نهایت برخی فضاهای تابعی[3] را معرفی می‌کنیم.

۱.۱ تعاریف اولیه معادلات انتگرال

تعریف ۱.۱.۱. یک معادله که در آن یک تابع نامعلوم زیر یک یا چند علامت انتگرال ظاهر می‌شود یک معادله انتگرال نامیده می‌شود. به عنوان مثال معادلات

$$y(t) = \int_a^b K(t,s)y(s)ds, \tag{۱.۱}$$

$$y(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s)y(s)ds, \tag{۲.۱}$$

$$y(t) = \int_a^b K(t,s)(y(s))^{۲}ds, \quad a \le s,t \le b, \tag{۳.۱}$$

که در آن‌ها $y(t)$ تابعی نامعلوم و $f(t)$ و $K(t,s)$ توابعی معلومی می‌باشند، از نوع معادلات انتگرال هستند.

---

[1] Integral equations
[2] Approximation theory
[3] Functional spaces

نکته ۲.۱.۱. در حالت کلی یک معادله انتگرال به شکل

$$y(t) = f(t) + \int_a K(t, s, y(s))ds, \tag{۴.۱}$$

می‌باشد که در آن $f(t)$ و $K(t, s, y(s))$ توابعی معلوم و $y(t)$ تابعی نامعلوم می‌باشد. معادله انتگرال فوق غیرخطی است و حالت خطی آن با فرض $K(t, s, y(s)) = k(t, s)y(s)$ به وجود می‌آید. برای مثال معادلات انتگرال (۱.۱) و (۲.۱) خطی و معادله انتگرال (۳.۱) غیرخطی است.

تعریف ۳.۱.۱. فرض می‌کنیم که V و W فضاهای خطی[۱] باشند. در این صورت عملگر $L : V \to W$ خطی[۲] نامیده می‌شود هرگاه:

$$L(\alpha_۱ v_۱ + \alpha_۲ v_۲) = \alpha_۱ L(v_۱) + \alpha_۲ L(v_۲),\ \forall v_۱, v_۲ \in V,\ \forall \alpha_۱, \alpha_۲ \in \mathbb{C}. \tag{۵.۱}$$

تعریف ۴.۱.۱. عملگر خطی $L : V \to W$ کراندار[۳] نامیده می‌شود هر گاه ثابت مثبت M موجود باشد به طوری که:

$$\|Lv\|_W \le M\|v\|_V,\ \forall v \in V. \tag{۶.۱}$$

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم V و W فضاهای نرمدار و $K : V \to W$ عملگر خطی باشد، در این صورت K فشرده[۴] نامیده می‌شود هرگاه مجموعه

$$\{Kv|\ \|v\|_V \le ۱\}, \tag{۷.۱}$$

دارای یک بستار فشرده در W باشد یا به طور معادل برای هر دنباله کراندار $\{v_n\} \subset V$، دنباله $\{Kv_n\}$ دارای یک زیردنباله همگرا به یک نقطه از W باشد.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم $G \subset \mathbb{R}^m$ یک مجموعه بسته و کراندار و $K : G \times G \to \mathbb{C}$ یک تابع پیوسته باشد. در این صورت عملگر خطی $A : C(G) \to C(G)$ به صورت:

$$(A\phi)(x) := \int_G K(x, y)\phi(y)dy,\ x \in G, \tag{۸.۱}$$

عملگر انتگرال[۵] با هسته پیوسته K نامیده می‌شود که یک عملگر کراندار با نرم

$$\|A\|_\infty = \max_{x\in G} \int_G |K(x, y)|dy, \tag{۹.۱}$$

می‌باشد.

[۱] Linear spaces
[۲] Linear
[۳] Bounded
[۴] Compact
[۵] Integral operator

حال با توجه به اینکه حد بالایی انتگرال در رابطه (۴.۱) می‌تواند ثابت یا متغیر باشد، معادلات انتگرال فردهلم و ولترا را خواهیم داشت که در ادامه به تعریف آنها می‌پردازیم.

۲.۱ معادلات انتگرال ولترا با هسته‌های هموار

در معادلات انتگرال ولترا با هسته‌های هموار، حد بالایی انتگرال در رابطه (۴.۱) متغیر می‌باشد. همچنین بسته به اینکه تابع متغیر $y(t)$ در زیر علامت انتگرال ظاهر بشود یا اینکه هم در زیر علامت انتگرال و هم بیرون علامت انتگرال، معادلات انتگرال ولترای نوع اول و دوم را خواهیم داشت که در قسمت‌های بعدی به تشریح آنها می‌پردازیم. برای مطالعه بیشتر در مورد مطالب این بخش به مرجع [۲] مراجعه کنید.

۱.۲.۱ معادلات انتگرال ولترای خطی از نوع دوم

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم $V: C(I) \to C(I)$ نشان دهنده‌ی عملگر انتگرال ولترای خطی باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(V\phi)(t) = \int_{\circ}^{t} K(t,s)\phi(s)ds,\ t \in I := [\circ, T],\ (T < \infty), \tag{۱۰.۱}$$

به طوری که هسته $K(t,s)$ روی $D = \{(t,s) : \circ \leq s \leq T\}$ پیوسته است. در این صورت معادله‌ی

$$y(t) = g(t) + (Vy)(t),\ t \in I, \tag{۱۱.۱}$$

یک معادله انتگرال ولترای خطی نوع دوم نامیده می‌شود که در آن $y(t)$ تابعی نامعلوم و $g(t)$ تابعی پیوسته روی I است.

نظریه‌ی کلاسیک معادلات انتگرال ولترای خطی توسط ویتو ولترا[۱] در سال ۱۸۹۶ ارائه شد. نقطه‌ی شروع این نظریه، مسأله‌ی "وارون کردن انتگرال"

$$(Vy)(t) = g(t),\ t \in I,\ g(\circ) = \circ, \tag{۱۲.۱}$$

در $C(I)$ بوده است. این مسأله شامل حل یک معادله‌ی انتگرال ولترا از نوع اول می‌باشد. ولترا نشان داد که تحت شرایط خاصی روی هسته‌ی آن، معادله‌ی انتگرال ولترای نوع اول

[۱] Vito Volterra

(۱۲.۱) معادل با یک معادله‌ی انتگرال ولترای نوع دوم است که تکرار پیکارد[۱] روی آن می‌تواند به کار برده شود. این فرایند تکراری، از طریق سری نویمان [۲] مربوط به هسته‌ی K در فرمول (۱۲.۱)، منجر به هسته حلال و در نتیجه نمایش حلال برای جواب مسأله می‌شود.

به طور دقیق تر برای حل این معادله انتگرال با استفاده از تکرارهای متوالی پیکارد، فرض کنیم که $y_0(t) = g(t)$ و دنباله نامتناهی $y_n(t)$ رامتناسب با (۱۱.۱) به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$y_n(t) = g(t) + (Vy_{n-1})(t),\ t \in I,\ n \geq 1, \qquad (۱۳.۱)$$

یک استدلال منطقی نشان می‌دهد که تکرارهای $y_n(t)$ می‌توانند در عبارت‌هایی از هسته‌های تکراری $K_n(t,s),\ n \geq 1$ به صورت زیر نوشته شوند:

$$y_n(t) = g(t) + \int_0^t (\sum_{v=1}^{n} K_v(t,s))g(s)ds,\ n \geq 1, \qquad (۱۴.۱)$$

که در آن $K_1(t,s) = K(t,s)$ و

$$K_n(t,s) = \int_s^t K_1(t,v)K_{n-1}(v,s)dv,\ n \geq 2. \qquad (۱۵.۱)$$

همچنین این هسته‌های تکراری در یک رابطه کلی‌تر از رابطه (۱۵.۱) که در لم زیر نشان داده شده است، صدق می‌کنند.

لم ۲.۲.۱. *فرض کنیم $K \in C(D)$. بنابراین برای هر r صحیح با $1 \leq r < n (n \geq 2)$ داریم:*

$$K_n(t,s) = \int_s^t K_r(t,v)K_{n-r}(v,s)dv,\ (t,s) \in D. \qquad (۱۶.۱)$$

برهان. به صفحه ۵۵ از مرجع [۲] مراجعه شود. □

حال به معادله‌ی (۱۵.۱) با $K \in C(D)$ و $\bar{K} = \max\{|K(t,s)| : (t,s) \in D\}$ توجه می‌کنیم یک استدلال منطقی به آسانی کران یکنواخت زیر را نتیجه می‌دهد:

$$|K_n(t,s)| \leq \bar{K}^n \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \leq \bar{K}^n \frac{T^{n-1}}{(n-1)!},\ (t,s) \in D,\ (n \geq 1), \qquad (۱۷.۱)$$

که این نتیجه می‌دهد سری نیومن تولید شده توسط K و رابطه‌ی (۱۵.۱) یعنی

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_n(t,s) = \lim_{v \to \infty} \sum_{n=1}^{v} K_n(t,s) := R(t,s), \qquad (۱۸.۱)$$

[۱] Picard iteration
[۲] Neumann series

روی D همگرای یکنواخت و مطلق است. بنابراین حد آن یعنی $R(t,s)$ هسته حلال[1] متناسب با هسته داده شده K نامیده می‌شود که روی D پیوسته است. این همگرایی یکنواخت نتیجه می‌دهد که $R(t,s)$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند :

$$\begin{aligned} R(t,s) &= K(t,s) + \sum_{n=2}^{\infty} K_n(t,s) \\ &= K(t,s) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_s^t K(t,v)K_{n-1}(v,s)dv, \end{aligned} \tag{۱۹.۱}$$

که با استفاده از روابط (۱۵.۱) و (۱۹.۱) خواهیم داشت:

$$R(t,s) = K(t,s) + \int_s^t K(t,v)R(v,s)dv, \tag{۲۰.۱}$$

معادله (۲۰.۱) با استفاده از لم (۲.۲.۱) (برای $r = n - 1$) به صورت زیر نیز قابل بیان است:

$$R(t,s) = K(t,s) + \int_s^t R(t,v)K(v,s)dv. \tag{۲۱.۱}$$

در نظریه مدرن معادلات انتگرال ولترای خطی، هسته حلال معمولا به وسیله معادلات بالا معرفی می‌شود که آن را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم $K \in C(D)$. هسته حلال منحصر به فرد $R(t,s)$ متناظر با هسته‌ی داده شده‌ی K در معادله انتگرال ولترای خطی (۱۱.۱) به وسیله یکی از معادلات حلال (۲۰.۱) یا (۲۱.۱) تعریف می‌شود.

وجود و یکتایی جواب معادله انتگرال ولترای خطی (۱۱.۱) در قضیه زیر داده شده است:

قضیه ۴.۲.۱. *فرض کنیم $K \in C(D)$ و $R(t,s)$ نشان دهنده‌ی هسته حلال متناظر با $K(t,s)$ باشد. برای هر $g \in C(I)$ معادله انتگرال ولترای نوع دوم (۱۱.۱) دارای جواب منحصر به فرد $y \in C(I)$ است که این جواب به صورت زیر داده می‌شود:*

$$y(t) = g(t) + \int_0^t R(t,s)g(s)ds. \tag{۲۲.۱}$$

برهان. به صفحه ۵۶ از مرجع [۲] مراجعه شود. □

چون $K \in C^m(D)$ نتیجه می‌دهد که $K_n \in C^m(D),\ n \geq 2$، بنابراین به وسیله

[1] Resolvent kernel

همگرایی یکنواخت سری نیومن خواهیم داشت: $R \in C^m(D)$. لذا نتیجه نظم[1] زیر یک نتیجه فوری از تعریف هسته‌های تکراری K وهسته حلال R است.

قضیه ۵.۲.۱. *فرض کنیم $K \in C^m(D)$. بنابراین هسته حلال آن دارای درجه نظم مشابه به صورت $R \in C^m(D)$ است و برای هر $g \in C^m(I)$ جواب معادله انتگرال ولترای (۱۱.۱) در $y \in C^m(I)$ صدق می‌کند.*

برهان. به صفحه ۵۸ از مرجع [۲] مراجعه شود. $\square$

۲.۲.۱ معادلات انتگرال ولترای خطی از نوع اول

نظریه کلی معادلات انتگرال ولترا توسط ولترا به ارائه شده است. همانطور که در بخش قبلی ذکر شد او حل‌پذیری معادله انتگرال ولترای نوع اول خطی زیر را تحت مفروضات مناسب روی g و K بررسی کرد:

$$(Vy)(t) := \int_{\circ}^{t} K(t,s)y(s)ds = g(t),\ t \in I := [\circ, T],\ g(\circ) = \circ, \qquad (۲۳.۱)$$

در قضیه زیر نتیجه کلاسیک ولترا آمده است:

قضیه ۶.۲.۱. *فرض کنیم K در مفروضات $K \in C(D)$، $\frac{\partial K}{\partial t} \in C(D)$ و $|K(t,t)| \geq k_{\circ} > \circ,\ \forall t \in I$ صدق کند. بنابراین برای هر $g \in C^{۱}(I)$ با $g(\circ) = \circ$ معادله انتگرال (۲۳.۱) دارای یک جواب منحصر به فرد $y \in C(I)$ است.*

برهان. به صفحه ۶۴ از مرجع [۲] مراجعه شود. $\square$

با مشتق‌گیری از دو طرف معادله انتگرال (۲۳.۱) داریم:

$$K(t,t)y(t) + \int_{\circ}^{t} \frac{\partial K(t,s)}{\partial t} y(s)ds = g'(t),\ t \in I, \qquad (۲۴.۱)$$

چون $K(t,t)$ روی I صفر نیست، لذا معادله (۲۳.۱) معادل با معادله انتگرال ولترای خطی نوع دوم زیر است:

$$y(t) = g_{۱}(t) + \int_{\circ}^{t} K_{۱}(t,s)y(s)ds,\ t \in I, \qquad (۲۵.۱)$$

که در آن توابع $g_{۱} \in C(I)$ و $K_{۱} \in C(D)$ در معادله فوق به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$g_{۱}(t) := \frac{g'(t)}{K(t,t)},\ K_{۱}(t,s) := -\frac{\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}}{K(t,t)}. \qquad (۲۶.۱)$$

[1] Regularity result

معادل بودن معادلات (۲۳.۱) و (۲۵.۱) نتیجه نظم زیر را می‌دهد:

قضیه ۷.۲.۱. *فرض کنیم $m \geq 0$ و همچنین:*

(۱) $g \in C^{m+1}(I), g(0) = 0$،

(۲) $K \in C^{m+1}(D), |K(t,t)| \geq k_0 > 0, \forall t \in I$،

بنابراین جواب منحصر به فرد معادله انتگرال ولترای نوع اول (۲۳.۱) در فضای $C^m(I)$ قرار دارد.

برهان. به صفحه ۶۶ از مرجع [۲] مراجعه شود. □

۳.۱ معادلات انتگرال ولترا با هسته منفرد ضعیف

معادلات انتگرال ولترا با هسته منفرد ضعیف (از نوع جبری یا لگاریتمی) به طور خاص دارای جوابهایی هستند که مشتقات آنها در نقطه چپ انتهایی از بازه انتگرال‌گیری کراندار نیستند. برای دیدن جزئیات بیشتر در مورد این بخش به مرجع [۲] مراجعه شود.

۱.۳.۱ معادلات انتگرال ولترای خطی از نوع دوم با هسته منفرد ضعیف

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم $V_\alpha : C(I) \to C(I)$ نشان‌دهنده‌ی عملگر انتگرال ولترای منفرد ضعیف باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(V_\alpha \phi)(t) = \int_0^t P_\alpha(t-s)K(t,s)\phi(s)ds,\ t \in I := [0,T],\ (t < \infty), \qquad (۲۷.۱)$$

که دارای فاکتور پیچشی منفرد ضعیف[۱] به شکل

$$P_\alpha(t-s) = \begin{cases} (t-s)^{-\alpha} & , 0 < \alpha < 1 \\ \log(t-s) & , \alpha = 1 \end{cases}, \qquad (۲۸.۱)$$

است در این صورت معادله‌ی انتگرال ولترای

$$y(t) = g(t) + (V_\alpha y)(t),\ t \in I, \qquad (۲۹.۱)$$

یک معادله‌ی انتگرال ولترای نوع دوم منفرد ضعیف نامیده می‌شود.

[۱] Weakly singular convolution factor

چون هسته‌ی $H_\alpha(t,s) := P_\alpha(t-s)K(t,s)$ در معادله انتگرال ولترای خطی (۲۹.۱) روی D انتگرال‌پذیر است، تکرار پیکارد منجر به یک سری نیومن همگرای یکنواخت و مطلق با حد $R_\alpha(t,s)$ در مقایسه با قضیه (۴.۲.۱) می‌شود. لذا جواب معادله (۲۹.۱) دارای یک نمایش مشابه معادله (۲۲.۱) می‌باشد که به صورت زیر است:

$$y(t) = g(t) + \int_0^t R_\alpha(t,s)g(s)ds, \ t \in I, \tag{۳۰.۱}$$

یک حالت مهم برای $0 < \alpha < 1$ در قضیه زیر داده شده است:

قضیه ۲.۳.۱. *فرض کنیم $K \in C(D)$ و $0 < \alpha < 1$. بنابراین برای هر $g \in C(I)$ معادله انتگرال ولترای خطی منفرد ضعیف (۲۹.۱) دارای جواب منحصر به فرد $y \in C(I)$ است. این جواب به وسیله رابطه (۳۰.۱) بیان می‌شود. هسته حلال R_α متناظر با هسته H_α عامل منفرد ضعیف $(t-s)^{-\alpha}$ را به ارث می‌برد و به شکل زیر است:*

$$R_\alpha(t,s) = (t-s)^{-\alpha}Q(t,s;\alpha), \tag{۳۱.۱}$$

که در آن

$$Q(t,s;\alpha) := \sum_{n=1}^{\infty}(t-s)^{(n-1)(1-\alpha)}\Phi_n(t,s;\alpha), \tag{۳۲.۱}$$

و توابع Φ_n به صورت بازگشتی زیر تعریف می‌شوند:

$$\Phi_n(t,s;\alpha) := \int_0^1 (1-z)^{-\alpha}z^{(n-1)(1-\alpha)-1}K(t,s+(t-s)z)\Phi_{n-1}(s+(t-s)z,s;\alpha)dz, \tag{۳۳.۱}$$

که در آن $n \geq 2$ و $\Phi_1(t,s;\alpha) := K(t,s)$ و $\Phi_n(t,s;\alpha) \in C(D)$. علاوه بر این $Q(.,.;\alpha)$ معادلات حلال زیر را روی D حل می‌کند:

$$Q(t,s;\alpha) = K(t,s)+(t-s)^\alpha\int_s^t(t-v)^{-\alpha}(v-s)^{-\alpha}K(t,v)Q(v,s;\alpha)dv, \tag{۳۴.۱}$$

$$Q(t,s;\alpha) = K(t,s)+(t-s)^\alpha\int_s^t(t-v)^{-\alpha}(v-s)^{-\alpha}Q(t,v;\alpha)K(v,s)dv. \tag{۳۵.۱}$$

برهان. به صفحه ۳۴۳ از مرجع [۲] مراجعه شود. □

قضیه ۳.۳.۱. *فرض کنیم $g \in C^m(I)$ و $K^m(D)$ و $|K(t,t)| \neq 0, \forall t \in I$ بنابراین:*

(۱) *برای هر $0 < \alpha < 1$ توابع $\Phi_n(t,s;\alpha), n \geq 1$ در (۳۲.۱) در فضای $C^m(D)$ قرار دارند و نظم جواب منحصر به فرد معادله انتگرال ولترای منفرد ضعیف (۲۹.۱) به*

صورت زیر توضیح داده می‌شود:

$$y \in C^m(0,T] \cap C(I), |y'(t)| \le C_\alpha t^{-\alpha},\ \forall t \in (0,T], \tag{۳۶.۱}$$

(۲) *جواب y می‌تواند به شکل زیر نوشته شود:*

$$y(t) = \sum_{(j,k)_\alpha} \gamma_{j,k}(\alpha) t^{j+k(1-\alpha)} + Y_m(t,\alpha),\ t \in I, \tag{۳۷.۱}$$

که در آن $(j,k)_\alpha := \{(j,k) : j,k \in \mathbb{N}, j+k(1-\alpha) < m\}$ و $Y_m(.,\alpha) \in C^m(I)$ در اثبات قضیه تعریف می‌شود.

برهان. به صفحه ۳۴۷ از مرجع [۲] مراجعه شود. □

قضیه ۴.۳.۱. *فرض کنیم $g(t) = g_1(t) + t^\beta g_2(t)$ که در آن $g_i \in C(I)(i = 1,2)$ و $\beta > 0(\beta \notin \mathbb{N})$ و $K \in C(D)$. بنابراین جواب منحصر به فرد $y \in C(I)$ از معادله (۲۹.۱) با این تابع g می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:*

$$y(t) = g_1(t) + \int_0^t R_\alpha(t,s) g_1(s) ds + t^\beta g_2(t) + \int_0^t R_\alpha(t,s) g_2(s) s^\beta ds,\ t \in I, \tag{۳۸.۱}$$

که در آن $R_\alpha(t,s)$، هسته حلال داده شده به وسیله رابطه (۳۱.۱) در قضیه (۲.۳.۱) است.

برهان. به صفحه ۳۵۰ از مرجع [۲] مراجعه شود. □

۲.۳.۱ معادلات انتگرال ولترای خطی از نوع اول با هسته منفرد ضعیف

ابتدا با نتایج نیلز هنریک آبل[1] در حل معادله انتگرال نوع اول

$$\int_0^t (t-s)^{-\alpha} y(s) ds = g(t),\ t \in (0,T](0 < \alpha < 1), \tag{۳۹.۱}$$

شروع می‌کنیم:

قضیه ۵.۳.۱. *فرض کنیم $g \in C^1(I)$. بنابراین برای هر $0 < \alpha < 1$ معادله انتگرال آبل (۳۹.۱) دارای یک جواب پیوسته منحصر به فرد در $[0,T]$ می‌باشد. این جواب می‌تواند به فرم زیر نوشته شود:*

$$y(t) = \frac{1}{\gamma_\alpha}\left(g(0)t^{\alpha-1} + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g'(s) ds\right),\ t \in (0,T], \tag{۴۰.۱}$$

که در آن $\gamma_\alpha := \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$.

[1] Niels Henrik Abel