بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه سیستان و بلوچستان

تحصیلات تکمیلی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

گرایش آنالیز عددی

عنوان:

اصل حافظه کوتاه مدت برای حل معادله دیفرانسیل آبل از مرتبه کسری

استاد راهنما:

دکتر مریم عرب عامری

تحقیق و نگارش:

فریبا میرشکاری

دی‌ماه ۱۳۹۲

بسمه‌تعالی

این پایان‌نامه با عنوان اصل حافظه کوتاه مدت برای حل معادله دیفرانسیل آبل از مرتبه کسری قسمتی از برنامه آموزشی دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی توسط دانشجو فریبا میرشکاری با راهنمایی استاد پایان‌نامه سرکار خانم دکتر مریم عرب‌عامری تهیه شده است. استفاده از مطالب آن به‌منظور اهداف آموزشی با ذکر مرجع و اطلاع کتبی به حوزه تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیستان و بلوچستان مجاز می‌باشد.

فریبا میرشکاری

امضاء

این پایان‌نامه ۶ واحد درسی شناخته می‌شود و در تاریخ .... توسط هیئت داوران بررسی و درجه .... به آن تعلق گرفت.

	نام و نام خانوادگی	امضاء	تاریخ
استاد راهنما:	دکتر مریم عرب‌عامری		
استاد راهنما:			
استاد مشاور:			
داور ۱ :	دکتر پرویز سرگلزایی		
داور ۲ :	دکتر رضایی		
نماینده تحصیلات تکمیلی:			

دانشگاه سیستان و بلوچستان

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب فریبا میرشکاری تعهد می‌کنم که مطالب مندرج در این پایان‌نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این نوشته از آن استفاده شده است مطابق مقررات ارجاع گردیده است. این پایان‌نامه پیش از این برای احراز هیچ مدرک هم‌سطح یا بالاتر ارائه نشده است.
کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه سیستان و بلوچستان می‌باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو: فریبا میرشکاری

امضاء

تقدیم به:

خدایی که آفرید

جهان را، انسان را، عقل را، معرفت را، عشق را

و تقدیم به کسانی که عشقشان را در وجودم دمید:

پدرم

کوهی استوار و حامی من در تمام طول زندگی

مادرم

سنگ صبوری که الفبای زندگی را به من آموخت

همسرم

که مسیح وار با صبرش در تمامی لحظات رفیق راه بود

و دختر و پسر عزیزم

که لذت وجودشان شیرینی زندگی من است.

سپاس‌گزاری

سپاس و ستایش مر خدای راجل و جلاله که آثار قدرت او بر چهره روزِ روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شبِ تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید.
در اینجا لازم می‌دانم از استاد با کمالات و شایسته سرکار خانم دکتر مریم عرب عامری که با متانت و خلق و خوی نیکو مرا یاری نمودند و زحمت راهنمایی این رساله را برعهده گرفتند تقدیر و تشکر نمایم. هم‌چنین از آقایان دکتر پرویز سرگلزایی و دکتر رضایی که زحمت داوری را قبول کردند سپاسگزارم و از خداوند متعال برای این عزیزان طول عمری با عزت و توفیق روزافزون خواستارم.

فریبا میرنگاری
دی‌ماه ۱۳۹۲

چکیده

اصل حافظه کوتاه‌مدت، یک روش عددی برای حل معادله دیفرانسیل آبل از مرتبه کسری است که از مشتق‌های گرانوالد-لتنیکوف و ریمان-لیوویل در آن استفاده می‌شود. در این روش ابتدا معادله دیفرانسیل آبل از مرتبه کسری را به یک معادله انتگرال ولترای معادل تبدیل کرده و با حل آن مقدار تقریبی را در نقطه پایانی بازه مورد نیاز برآورد می‌کنیم. سپس این نقطه پایانی را به‌عنوان مقدار اولیه درنظر گرفته و با ساخت یک طرح تکراری مناسب به نام روش پیش‌گو-اصلاحگر، مقادیر تقریبی را در نقاط دیگر بازه محاسبه می‌کنیم.

نتایج عددی نشان می‌دهد که روش مذکور بسیار ساده و کارآمد است و همچنین انتخاب طول صحیح از حافظه می‌تواند اعتبار این روش را حفظ کند و دقت مسأله را بالا ببرد.

واژگان کلیدی: اصل حافظه کوتاه مدت، معادله دیفرانسیل آبل از مرتبه کسری، مشتق گرنوالد-لتنیکوف، مشتق ریمان-لیوویل.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست جدول‌ها

عنوان جدول **صفحه**

فهرست شکل‌ها

عنوان شکل **صفحه**

پیش‌گفتار

حساب کسری (مشتقات کسری و انتگرال‌های کسری) به‌عنوان شاخه فعال تجزیه و تحلیل ریاضیات، قدمتی دیرینه و همپای محاسبات مرتبه صحیح دارد. ایده اصلی محاسبات کسری به پایان قرن هفدهم می‌رسد [۲۱] و بحث‌های اولیه این شاخه شامل کارهای لایب‌نیتز[۱]، اویلر[۲]، لاپلاس[۳]، آبل[۴]، لیوویل[۵]، لاگرانژ[۶]، ریمان[۷] و بسیاری دیگر بوده است. اولین گزارش مربوط به تعمیم مشتقات معمولی به مشتقات کسری منسوب به لایب‌نیتز و هاسپیتال[۸] است که در آن هاسپیتال (۱۶۹۵) از لایب‌نیتز می‌پرسد: «مشتق غیرصحیح یک عدد به معنای چیست؟» یعنی اگر در نماد $\frac{d^n}{dx^n}$، به‌جای n عدد $\frac{۱}{۲}$ قرار دهیم چه اتفاقی می‌افتد؟ که در واقع این سؤال باعث نامگذاری این نوع حساب دیفرانسیل و انتگرال شد [۱۸].

لاپلاس (۱۸۱۲) مشتقات کسری را به‌صورت یک انتگرال تعریف کرد [۵] و در سال ۱۸۱۹ لاگرانژ مشتقات کسری با مرتبه دلخواه را با تعمیم فرمول مشتق معمولی زیر معرفی کرد [۴، ۹]:

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, \qquad m \geq n, \quad m,n \in \mathbb{N}$$

که فرمول فوق برای هر m و n به‌صورت زیر تعمیم داده شد

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+۱)}{\Gamma(m-n+۱)}x^{m-n}.$$

آبل (۱۸۲۳) اولین کسی است که عملگرهای کسری را مستقیماً برای حل یک معادله انتگرال مورد استفاده قرار داد. معادله انتگرالی که آبل برای آن از عملگر کسری استفاده کرد به معادله انتگرال تعمیم‌یافته آبل شهرت دارد که در آن حرکت یک ذره را که به سمت پایین در طول یک منحنی هموار نامعلوم، در یک صفحه قائم، تحت تأثیر نیروی جاذبه لغزیده می‌شد، مطالعه کرد.

معادله انتگرال تعمیم یافته آبل به‌صورت زیر است:

$$k = \int_{۰}^{x} \frac{۱}{(x-t)^{\alpha}} u(t)dt, \qquad ۰ < \alpha < ۱,$$

که در حالت $\alpha = \frac{۱}{۲}$، معادله فوق به معادله انتگرال آبل معروف است.

در معادلات انتگرال نظیر معادله بالا، تابع $u(t)$ باید محاسبه شود. آبل با اثر دادن عملگر کسری $\frac{d^{\frac{۱}{۲}}}{dx^{\frac{۱}{۲}}}$، بر دو

[۱] Leibniz
[۲] Euler
[۳] Laplace
[۴] Abel
[۵] Liouville
[۶] Lagrange
[۷] Riemann
[۸] Hospital

طرف معادله آن را حل کرد [۳]. که جواب آبل مورد توجه لیوویل قرار گرفت و لیوویل نظریه حساب کسری را توسعه داد و در مسائل تئوری پتانسیل آنها را به‌کار برد [۵، ۷].

امروزه اصطلاح حساب کسری عبارت است از حساب مربوط به انتگرال و مشتق‌گیری از مرتبه دلخواه به‌طوری‌که مرتبه مشتق بتواند گویا، گنگ و حتی مختلط باشد و با اینکه مفاهیم و محاسبات کسری چندین قرن است که شناخته شده اما فقط چند دهه است که دانشمندان دریافتند که این مفهوم می‌تواند در مدل‌سازی دنیای واقعی به خوبی به کار رود، لذا در سی سال اخیر دانشمندان بیشتر و بیشتر جذب مطالعه معادلات دیفرانسیل کسری در فیزیک، شیمی، مهندسی، مالی و علوم دیگر شدند [۱۱، ۲۱].

معادله دیفرانسیل آبل از مرتبه کسری نیز دارای سابقه‌ای طولانی است و در بسیاری از مباحث مربوط به ریاضیات کاربردی و محض می‌توان آن را یافت. این معادله نقش مهمی در تئوری حساب دیفرانسیل و انتگرال و برنامه‌های مورد استفاده در فیزیک و مهندسی دارد و چون حل تحلیلی آن دشوار است به سراغ روش‌های عددی به‌عنوان راه‌های آسان و قدرتمند برای حل آن خواهیم رفت [۸].

در این پایان‌نامه به بیان روشی جدید، به نام «اصل حافظه کوتاه مدت» برای حل تقریبی معادله دیفرانسیل آبل خواهیم پرداخت، به همین منظور مطالب مورد نظر به شکل زیر در چهار فصل گنجانده شده‌اند.

در فصل اول به معرفی حساب کسری و بیان مفاهیم اولیه مربوط به آن خواهیم پرداخت و معروف‌ترین تعاریف موجود مشتق‌های کسری، یعنی تعریف ریمان، لیوویل و گرنوالد[۱]-لتنیکوف[۲] و ... را مطرح می‌کنیم. در فصل دوم روش‌های عددی را که تا به حال برای حل معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری به‌کار رفته بیان می‌کنیم.

در فصل سوم ابتدا قضایای وجود و یکتایی جواب را برای معادلات دیفرانسیل کسری خطی و غیرخطی مطرح کرده و سپس به بیان روش «اصل حافظه کوتاه مدت» می‌پردازیم و در فصل چهارم چند مثال عددی را با روش حافظه کوتاه مدت حل خواهیم کرد و نتیجه‌گیری و پیشنهادات نیز در پایان فصل چهارم ارائه خواهد شد.

[۱] Grunwald
[۲] Letnikov

فصل اول

آشنایی با حساب کسری (مشتق و انتگرال کسری)

مقدمه

بیش از سیصد سال است که آنالیز تواناترین شاخه ریاضیات بوده و مبحث معادلات دیفرانسیل بخش عمده آن است. بسیاری از قوانین عمومی طبیعت در فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و ستاره‌شناسی طبیعی‌ترین بیان ریاضی خود را در زبان معادلات دیفرانسیل می‌یابند.
کاربردهای معادلات دیفرانسیل همچنین در ریاضیات به‌ویژه در هندسه و نیز در مهندسی و اقتصاد و بسیاری از زمینه‌های دیگر علوم فراوان‌اند. به‌عنوان مثال در مکانیک، حرکت جسم به‌وسیله سرعت و مکان آن در زمان‌های مختلف توصیف می‌شود و معادلات نیوتن به ما رابطه بین مکان، سرعت، شتاب و نیروهای گوناگون وارده بر جسم را می‌دهد. در چنین شرایطی می‌توانیم حرکت جسم را در قالب یک معادله دیفرانسیل که در آن مکان ناشناخته جسم تابعی از زمان است بیان کنیم.
معادلات انتگرال نیز یک بحث اساسی ریاضیات عالی را تشکیل می‌دهد که می‌توان کاربرد آن را در تمام علوم طبیعی، انسانی و غیره مورد مطالعه قرار داد. مباحثی که در این فصل بیان شده از منابع [۵، ۱۳، ۱۵، ۱۸] استخراج شده است.
معادلات در حالت کلی به دو دسته معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال تقسیم‌بندی می‌شوند:

۱.۱ معادلات دیفرانسیل

معادله دیفرانسیل بیانگر رابطه بین یک تابع مجهول با یک یا چند متغیر مستقل و مشتق‌های مرتبه‌های مختلف آن نسبت به متغیرهای مستقل است. مرتبه یک معادله دیفرانسیل، مرتبه بالاترین مشتق و منظور از درجه یک معادله دیفرانسیل، درجه جبری بالاترین مرتبه مشتقی است که در معادله ظاهر شده است.

۱.۱.۱ معادلات دیفرانسیل معمولی

یک معادله دیفرانسیل معمولی رابطه‌ای بین یک متغیر مستقل x، و یک متغیر وابسته y و مشتقات مراتب مختلف آن می‌باشد که فرم کلی آن به شکل زیر می‌باشد:

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

۲.۱.۱ روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی

مسئله مقدار اولیه زیر را درنظر می‌گیریم

$$y' = f(x, y) \quad a \leq x \leq b \ , \ \ y(a) = \alpha. \tag{۱.۱}$$

مسئله فوق دارای جواب منحصربه‌فرد است اگر تابع f در شرایط زیر صدق نماید:

- $f(x,y)$ حقیقی باشد.
- تابع f در ناحیه مستطیلی $D = \{(x,y) \mid a < x < b,\ -\infty < y < \infty\}$ پیوسته باشد.
- تابع $f(x,y)$ به‌ازای جمیع مقادیر x متعلق به بازه $[a,b]$ و برای هر $y_۱$ و $y_۲$ که متعلق به ناحیه D باشد در شرط لیپ‌شیتز صدق کند، یعنی:

$$|f(x,y_۱) - f(x,y_۲)| < L|y_۱ - y_۲|$$

که در آن L ثابت لیپ‌شیتز نامیده می‌شود. آنگاه مسئله مقدار اولیه (۱.۱) دارای جواب منحصربه‌فرد $y(x)$ است که در شرط اولیه صدق می‌کند [۲۲].

برای توضیح و بیان روش‌ها، ابتدا بازه $[a,b]$ را به n زیربازه با گام مساوی h افراز می‌کنیم:

$$h = \frac{b-a}{n},$$
$$x_۰ = a,\ x_۱, \ldots, x_n = b,$$
$$x_j = x_۰ + jh, \quad j = ۰, \ldots, n,$$
$$y'(x_j) = f(x_j, y(x_j)), \quad j = ۰, \ldots, n.$$

روش‌های تفاضلی برای حل مسئله مقدار اولیه (۱.۱) به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند:

- روش‌های تک گامی
- روش‌های چندگامی

این روش‌ها خود به دو بخش صریح و ضمنی تفکیک می‌شوند، روش‌هایی که در آن طرف راست یعنی $y_{j+۱}$ صراحتاً و بدون واسطه در هر مرحله توسط y_j تعریف شده در مرحله قبل، محاسبه شوند را روش‌های صریح و در غیراین‌صورت روش‌های ضمنی می‌نامند.

روش‌های تک گامی مانند روش تفاضلی اویلر، رانگ-کوتا و ... می‌باشند و روش‌های چندگامی مانند آدامز-بشفورث، آدامز مولتون و ... می‌باشند که در این پایان‌نامه به‌علت استفاده از روش‌های چندگامی به بیان آنها می‌پردازیم [۲۲].

۱- روش k گامی:

فرم کلی روش‌های k گامی به‌صورت زیر است

$$y_{j+۱} = \sum_{i=۱}^{k} a_i y_{j-i+۱} + h\phi(x_{j+۱}, x_j, \ldots, x_{j-k+۱}, y'_{j+۱}, \ldots, y'_{j-k+۱}, h).$$

۲- روش k گامی خطی:

فرم کلی روش‌های k گامی خطی به فرم زیر است:

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= \sum_{i=1}^{k} a_i y_{j-i+1} + h\sum_{i=0}^{k} b_i y'_{j-i+1}, \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i y_{j-i+1} + h[b_0 y'_{j+1} + \sum_{i=1}^{k} b_i y'_{j-i+1}]. \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

اگر در رابطه (۲.۱)، $b_0 = 0$، روش k گامی خطی، روش صریح یا روش پیشگو و در غیر این‌صورت روش ضمنی یا اصلاحگر نامیده می‌شود.

۳- روش‌های k گامی صریح آدامز-بشفورث[1]:

اگر از معادله (۱.۱)، در فاصله $[x_j, x_{j+1}]$ نسبت به x انتگرال بگیریم، داریم:

$$\begin{aligned} &\int_{x_j}^{x_{j+1}} y'dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x,y)dx, \\ &y(x_{j+1}) = y(x_j) + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x,y)dx. \end{aligned} \tag{۳.۱}$$

در (۳.۱)، از آن‌جا که y مجهول می‌باشد از تابع f، نمی‌توان انتگرال گرفت لذا آن را توسط فرمول درون‌یاب پسرو نیوتن در نقاط گره‌ای قبل از x_j یعنی k نقطه x_j، x_{j-1}، ... و x_{j-k+1} تقریب می‌زنیم:

$$\begin{aligned} P_{k-1}(x) &= f_j + \frac{x-x_j}{h}\nabla f_j + \frac{(x-x_j)(x-x_{j-1})}{2h^2}\nabla^2 f_j + \cdots \\ &+ \frac{(x-x_j)\cdots(x-x_{j-k+2})}{(k-1)!h^{k-1}}\nabla^{k-1} f_j + \frac{(x-x_j)\cdots(x-x_{j-k+1})}{k!} f^{(k)}(c). \end{aligned}$$

با تغییر متغیر زیر می‌توان حدود انتگرال‌گیری را ساده نمود.

$$\begin{aligned} &\frac{x-x_j}{h} = u \Rightarrow dx = hdu \\ &x \in [x_j, x_{j+1}] \Rightarrow u \in [0,1] \\ P_{k-1} &= f_j + u\nabla f_j + \frac{1}{2}u(u+1)\nabla^2 f_j + \cdots + \frac{u(u-1)\cdots(u+k-2)}{(k-1)!}\nabla^{k-1} f_j \\ &+ \frac{u(u+1)\cdots(u+k-1)}{k!} h^k f^{(k)}(c). \end{aligned} \tag{۴.۱}$$

با جایگذاری رابطه (۴.۱) در رابطه (۳.۱) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + h\int_0^1 \Big[f_j + u\nabla f_j + \frac{1}{2}u(u+1)\nabla^2 f_j + \cdots$$

[1] Adams-Bashforth

$$
+\frac{u(u-۱)\cdots(u+k-۲)}{(k-۱)!}\nabla^{k-۱}f_j\Big]d\,u
+\int_{\circ}^{۱}\frac{u(u+۱)\cdots(u+k-۱)}{k!}h^{k+۱}f^{(k)}(c)d\,u.
$$

اگر از خطای قطع کردن صرف‌نظر کنیم رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$
y_{j+۱}=y_j+h\left\{f_j+\frac{۱}{۲}\nabla f_j+\frac{۵}{۱۲}\nabla^{۲}f_j+\frac{۳}{۸}\nabla^{۳}f_j+\frac{۲۵۱}{۷۲۰}\nabla^{۴}f_j+\cdots\right\} \qquad (۵.۱)
$$

که خطای آن عبارت است از:

$$
T_j=\frac{h^{k+۱}}{k!}\int_{\circ}^{۱}u(u+۱)\cdots(u+k-۱)f^{(k)}(c)d\,u.
$$

با استفاده از رابطه (۵.۱) می‌توان خانواده‌ای از روش‌های آدامز-بشفورث را با انتخاب جملات متفاوت آن به‌دست آورد. به‌عنوان مثال اگر تا تفاضل مرتبه اول به‌عنوان تقریب استفاده شود یا به‌عبارت دیگر تابع f با یک چندجمله‌ای درجه اول تقریب زده شود، روش آدامز-بشفورث دوگانی یا مرتبه دوم را خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
y_{j+۱} &= y_j+h\left\{f_j+\frac{۱}{۲}\nabla f_j\right\},\\
y_{j+۱} &= y_j+h\left[f_j+\frac{۱}{۲}(f_j-f_{j-۱})\right],\\
y_{j+۱} &= y_j+\frac{h}{۲}\left[۳f_j-f_{j-۱}\right]. \quad j=۱,۲,\ldots,n-۱.
\end{aligned}
$$

۴- روش چندگانی ضمنی آدامز-مولتون[۱]:

با انتگرال‌گیری از معادله دیفرانسیل (۱.۱) در بازه $[x_j,x_{j+۱}]$ داریم:

$$
\begin{aligned}
&\int_{x_j}^{x_{j+۱}}y'd\,x=\int_{x_j}^{x_{j+}}f(x,y)d\,x,\\
&y(x_{j+۱})=y(x_j)+\int_{x_j}^{x_{j+۱}}f(x,y)d\,x.
\end{aligned}
$$

چنان‌چه تابع f را در $k+۱$ نقطه قبل از $x_{j+۱}$ با استفاده از فرمول درون‌یاب پسرو نیوتن یعنی در نقاط $x_{j+۱},x_j,\ldots,x_{j-k+۱}$ تقریب بزنید چندجمله‌ای درون‌یاب درجه kام به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$
P_k(x) = f_{j+۱}+\frac{x-x_{j+۱}}{h}\nabla f_{j+۱}+\frac{(x-x_{j+۱})(x-x_j)}{۲!h^{۲}}\nabla^{۲}f_{j+۱}+\cdots
$$

[۱] Adams-Moulton

$$+\frac{(x-x_{j+1})(x-x_j)\cdots(x-x_{j-k+2})}{k!h^k}\nabla^k f_{j+1}$$
$$+\frac{(x-x_{j+1})(x-x_j)\cdots(x-x_{j-k+1})}{k!h^k}f^{(k+1)}(c).$$

جهت تغییر حدود انتگرال‌گیری از تغییر متغیر $u=\frac{x-x_j}{h}$، استفاده می‌شود لذا خواهیم داشت:

$$dx = h\,du$$

$$u\in[0,1]$$
$$\frac{x-x_{j+1}}{h}=\frac{x-(x_j+h)}{h}=\frac{x-x_j-h}{h}=u-1,$$

$$\begin{aligned}P_k(u) &= f_{j+1}+(u-1)\nabla f_{j+1}+\frac{u(u-1)}{2!}\nabla^2 f_{j+1}+\frac{(u-1)u(u+1)}{3!}\nabla^3 f_{j+1}+\cdots\\ &+\frac{(u-1)u(u+1)\cdots(u+k-2)}{k!}\nabla^k f_{j+1} \qquad (*)\\ &+h^{k+1}\frac{(u-1)u(u+1)\cdots(u+k-1)}{(k+1)!}f^{(k+1)}(c).\end{aligned}$$

جایگذاری عبارت اخیر در رابطه (۱.۱) نتیجه می‌دهد:

$$y(x_{j+1})=y(x_j)+\int_0^1(*)dx+h^{k+2}\int_0^1\frac{(u-1)u(u+1)\cdots(u+k-1)}{(k+1)!}f^{(k+1)}(c)du.$$

اگر از خطای برشی این رابطه صرف‌نظر شود، داریم:

$$\begin{aligned}y_{j+1} &= y_j+h\Big[f_{j+1}-\frac{1}{2}\nabla f_{j+1}-\frac{1}{12}\nabla^2 f_{j+1}-\frac{1}{24}\nabla^3 f_{j+1}-\frac{19}{720}\nabla^4 f_{j+1}\\ &-\frac{27}{1440}\nabla^5 f_{j+1}-\cdots\Big] \qquad (6.1)\end{aligned}$$

که خطای برشی آن عبارت است از:

$$T_j=\frac{h^{k+2}}{(k+1)!}\int_0^1(u-1)u(u+1)\cdots(u+k-1)f^{(k+1)}(\mu)\quad \mu\in(0,1).$$

در رابطه (۶.۱)، با انتخاب جملات مراتب مختلف، می‌توان روش‌های مختلف آدامز-مولتون را به‌دست آورد به‌عنوان مثال چنان‌چه تا تفاضل مرتبه اول به‌عنوان تقریب درنظر گرفته شود روش آدامز-مولتون مرتبه دوم به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}y_{j+1} &= y_j+h\left[f_{j+1}-\frac{1}{2}\nabla f_{j+1}\right],\\ y_{j+1} &= y_j+h\left[f_{j+1}-\frac{1}{2}(f_{j+1}-f_j)\right],\quad j=0,1,\ldots,n-1.\end{aligned}$$