بسم الله الرحمن الرحيم

۱۳۷۹ /۹/ ۱۶

دانشگاه آزاد اسلامی ـ واحد کرمان

بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی

تحت عنوان:

رادیکال اول یک زیر مدول روی حلقه‌های جابجایی

9216

دانشجو:

مریم غزنوی

استاد راهنما:

دکتر رضا نکویی

مردادماه ۱۳۷۹

۳۱۸۹۱

عنوان

رادیکال اول یک زیر مدول روی حلقه‌های جابجایی

دانشجو:

مریم غزنوی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته وگرایش ریاضی محض

از این پایان نامه در تاریخ ۷۹/۵/۹ در مقابل هیئت داوران دفاع بعمل آمد و مورد تصویب قرار گرفت.

اعضاء هیئت داوران

استاد راهنما: آقای دکتر رضا نکویی

داور: آقای دکتر محمدرضا مولایی

داور: آقای دکتر محمد حسن دوگانی

مدیر گروه آموزشی کارشناسی ارشد:

آقای دکتر اسفندیار اسلامی

سرپرست کمیته تحصیلات تکمیلی:

آقای دکتر محمدحسین متقی

معاون آموزشی دانشگاه

آقای مجید غلامحسین پور

رئیس دانشگاه:

آقای دکتر محمدحسین متقی

تقدیم به :

پدر بزرگوارم که مظهر عرفان و خلوص است

کانون عشق و محبت، مادر خوبم به پاس خوبیهایش

تشکر و قدردانی

• با سپاس بدرگاه الهی که به من سعادت کوشش در راه کسب علم و دانش عطا فرمود و با امید به اینکه آنچه را فرا گرفته‌ام در راه خیر و صلاح جامعه بکار گیرم. در ابتدا برخود واجب می‌دانم که از زحمات بی‌دریغ استاد ارجمند جناب آقای دکتر رضا نکویی که با صبر و متانت فراوان در به پایان رساندن پایان‌نامه‌ام اینجانب را راهنمایی کردند و در این راه قبول زحمت فرمودند تشکر نمایم.

همچنین از آقایان دکتر محمدرضا مولایی و دکتر محمدحسن دوگانی که زحمت مطالعه این پایان‌نامه را برخود هموار کرده و در جلسه دفاعیه اینجانب شرکت نموده‌اند سپاسگزاری می‌نمایم.

ضمناً از کلیه اعضای خانواده و دوستان عزیزم که در راه کسب دانش همواره مشوق من بوده و با خرید تمام سختیها برای خود راه تحصیل مرا هموار نمودند تشکر و سپاسگزاری می‌نمایم.

مریم غزنوی

مردادماه ۱۳۷۹

چکیده

در فصل اول به بیان تعریف زیر مدولهای اول، بیشین و M_رادیکالها پرداخته و سپس خاصیتهای بنیادی از M_رادیکالها را بررسی کرده و قضایایی را در این رابطه ثابت می‌کنیم. در فصل دوم M_رادیکالها را در مورد مدولهای ضربی، هموار و مدولهای با تولید متناهی روی حلقه‌های لاسکرین، مورد بحث قرار می‌دهیم. در فصل سوم به بررسی خصوصیاتی از رادیکال اول مدولها روی حلقه‌های جابجایی پرداخته و سپس در ادامه نشان می‌دهیم که دامنه‌های ددکیند در فرمول رادیکال صدق می‌کنند. همچنین شرایط معادلی برای صدق کردن یک مدول در فرمول رادیکال را بررسی کرده و نشان خواهیم داد که R_مدولهایی وجود دارند که در فرمول رادیکال صدق نمی‌کنند.

فهرست

عنوان	صفحه

مقدمه

در تمام این پایان‌نامه تمام حلقه‌ها جابجایی، یکدار و تمام Rـمدولها یکانی هستند.

در فصل اول این پایان‌نامه ابتدا ثابت می‌کنیم که هر زیرمدول بیشین از Rـمدول M یک زیرمدول اول آن است و سپس در ادامه خصوصیاتی از Mـرادیکالها و رابطه آنها را با ایده‌الهای حلقه R بیان می‌کنیم.

در فصل دوم Mـرادیکالها را روی مدولهای خاص مانند مدولهای ضربی، محتوایی و هموار بررسی کرده و در پایان ثابت می‌کنیم که اگر M یک مدول با تولید متناهی روی حلقه نوتری R و N زیرمدولی از M باشد آنگاه عدد صحیح مثبت n وجود دارد بطوریکه $((rad\ N) : M)^n \subseteq (N : M)$.

مک‌کاسلند و مور در ([۱]) ثابت کردند که اگر R یک دامنه ایده‌ال اصلی (PID) و M یک Rـمدول با تولید متناهی باشد آنگاه M در فرمول رادیکال صدق می‌کند یعنی $W(M) = rad_M(\circ)$.

در فصل سوم نشان می‌دهیم که دامنه‌های ددکیند در فرمول رادیکال صدق می‌کنند و همچنین شرایط معادلی را برای صدق کردن یک مدول در فرمول رادیکال بیان می‌کنیم. در پایان مثالهایی از Rـمدولهایی که در فرمول رادیکال صدق نمی‌کنند را ارائه می‌دهیم.

لازم به ذکر است که این پایان‌نامه حاصل بررسی دو مرجع [۱۰] و [۵] در فهرست مراجع می‌باشد.

فصل ۱

خاصیتهای اساسی Mـرادیکالها

۱ـ۱ تعریف: زیرمدول N از M را اول گوئیم اگر، $N \neq M$ و

$$\forall r \in R\ ,\ \forall m \in M\ ,\ rm \in N \Rightarrow m \in N \text{ یا } r \in (N : M)$$

که $(N : M)$ را بصورت $\{r \in R : rM \subseteq N\}$، تعریف می‌کنیم.

۱ـ۲ تعریف: زیرمدول N از M را Pـاول گوئیم اگر:

i) N زیرمدول اول M باشد

ii) $\sqrt{N : M} = P$.

که $\sqrt{N : M}$، اشتراک همهٔ ایده‌الهای اول R شامل $(N : M)$ است.

۱ـ۳ مثال: هر زیر فضای سره از یک فضای برداری یک زیرمدول $(\circ)$ـاول آن است.

برهان: فرض کنیم V فضای برداری روی میدان F و U زیرفضای سره‌ای از V باشد. می‌پذیریم $r \in F$ و $v \in V$ به قسمی باشد که $rv \in U$. چون $(U : V)$ ایده‌الی از میدان F می‌باشد لذا:

$$(U : V) = \{\circ\} \text{ یا } (U : V) = F \cdot$$

اگر $(U : V) = F$ آنگاه $1_F \in (U : V)$. لذا $U = V$، که این با سره بودن U تناقض دارد. حال اگر $r = \circ$ چون $\circ \in (U : V)$، لذا بوضوح U زیرمدول اول V است. می‌پذیریم $r \neq \circ$ باشد در اینصورت r دارای وارون است و چون $rv \in U$ است پس داریم:

$$r^{-1} rv \in U \Rightarrow v \in U$$

بنابراین U زیرمدول اول V است.

چون $(U : V) = \{\circ\}$ و $\sqrt{(U : V)}$ نیز یک ایده‌ال F است لذا $\sqrt{(U : V)} = \{\circ\}$. پس U زیرمدول $(\circ)$ـاول V است.

۱_۴ تعریف: زیرمدول N از M را P_اولیه گوئیم اگر $N \neq M$ و

$$\forall r \in R \text{ ، } \forall m \in M, rm \in N \Rightarrow m \in N \text{ یا } r \in P = \sqrt{N : M}$$

۱_۵ مثال: $2Z$ را بعنوان Z_مدول در نظر می‌گیریم. در اینصورت $4Z$، زیرمدول $2Z$_اولیه است.

برهان: چون $2Z = (2Z : 4Z)$.

۱_۶ تعریف: اشتراک همهٔ ایده‌الهای اول R را با $nil(R)$ و اشتراک همهٔ ایده‌الهای بیشین R را با $J(R)$ نمایش می‌دهیم.

۱_۷ تعریف: اشتراک همهٔ زیرمدولهای اول M شامل N را M_رادیکال از N می‌نامیم و با $rad_M N$، و یا بصورت ساده‌تر با $rad\ N$ نمایش می‌دهیم. $rad_M(0)$ را رادیکال اول از M می‌نامیم.

تذکر: اگر M دارای زیرمدول اول شامل N نباشد آنگاه قرار می‌دهیم $rad_M N = M$.

۱_۸ مثال: به ازای هر عدد اول p، $Z(p^\infty)$ بعنوان Z_مدول هیچ زیرمدول اولی ندارد. ([۳]، مثال ۱_۸)

۱_۹ مثال: زیرمدول صفر، تنها زیرمدول اول Q (اعداد گویا)، بعنوان Z_مدول است. ([۳]، مثال ۱_۹) بنابراین $rad_Q(0) = (0)$.

۱_۱۰ تعریف: زیرمدول N را زیرمدول رادیکال گوئیم هرگاه $rad_M N = N$.

۱_۱۱ تعریف: زیرمدول N از M بیشین گوئیم هرگاه:

$i)\quad N \neq M$

$ii)\quad \forall K \leq M\ ;\ N \leq K \leq M \Rightarrow N = K$ یا $K = M$

۱_۱۲ مثال: Z، را بعنوان Z_مدول در نظر می‌گیریم. در اینصورت pZ، p یک عدد اول، بعنوان زیرمدول Z بیشین و همچنین یک زیرمدول رادیکال است. اما Q بعنوان Z_مدول زیرمدول بیشین ندارد.

۱_۱۳ تعریف: اشتراک همهٔ زیرمدولهای بیشین M را با $Rad\ M$ نشان می‌دهیم.

تذکر: اگر M دارای زیرمدول بیشین نباشد قرار می‌دهیم $Rad\ M = M$.

۱_۱۴ تعریف: R_مدول M را ساده گوئیم هرگاه تنها زیرمدولهایش (0) و M باشند.

۱_۱۵ لم: زیرمدول N از R_مدول M بیشین است اگر و تنها اگر $\frac{M}{N}$ یک R_مدول ساده باشد.

برهان: $(\Leftarrow)$ فرض کنیم N زیرمدول بیشین از R_مدول M باشد. اگر $\frac{M}{N}$ زیرمدولی مانند K داشته باشد طبق ([۱۷]، تمرین ۶_۲۴) K باید به شکل $\frac{P}{N}$ باشد بطوریکه $N \subseteq P \subseteq M$. فرض کنیم $\frac{P}{N}$ صفر نباشد یعنی $P \neq N$. در اینصورت:

$$N \subset P \subseteq M \overset{\text{بیشین}\ N}{\Longrightarrow} P = M \Rightarrow K = \frac{P}{N} = \frac{M}{N}$$

بنابراین $\frac{M}{N}$ ساده است.

$(\Rightarrow)$ فرض کنیم $\frac{M}{N}$ یک R_مدول ساده باشد و $N \subseteq P \subseteq M$ نشان می‌دهیم که: $P = N$ یا $P = M$.

چون $N \subseteq P$ پس طبق ([۱۷]، تمرین ۶_۲۴)، $\frac{P}{N}$ زیرمدولی از $\frac{M}{N}$ است، و چون $\frac{M}{N}$ ساده است داریم:

$$\frac{P}{N} = 0_{\frac{M}{N}} \Rightarrow P = N$$

یا

$$\frac{P}{N} = \frac{M}{N} \Rightarrow P = M$$

پس N زیرمدول بیشین M می‌باشد. ■

۱_۱۶ لم: اگر M، R_مدول ساده باشد در اینصورت هر مقسوم‌علیه صفر در M، پوچساز M است.

برهان: فرض کنیم r یک مقسوم‌علیه صفر در M باشد. در اینصورت:

$$\exists \circ \neq e \in M \quad , \quad re = \circ$$

چون M یک R_مدول ساده است پس زیرمدول $Re \neq \circ$، مساوی M می‌باشد. حال داریم:

$$rM = r(Re) = (rR)e = (Rr)e = R(re) = \circ$$

و بنابراین r یک پوچساز از M است. ■

۱_۱۷ لم: هر مقسوم علیه صفر از R_مدول M، پوچساز M است اگر و تنها اگر زیرمدول $(\circ)$، اول باشد.

برهان: $(\Leftarrow)$ فرض کنیم که هر مقسوم‌علیه صفر M، پوچساز M باشد. اگر $rx \in (\circ)$ و $x \notin (\circ)$ و $r \in R$ و $x \in M$ نشان می‌دهیم که $r \in (\circ : M)$. داریم:

$$rx \in (\circ) \Rightarrow rx = \circ \overset{\text{فرض}}{\Longrightarrow} rM = \circ \Rightarrow r \in (\circ : M) \cdot$$

$(\Rightarrow)$ می‌پذیریم زیرمدول $(\circ)$، اول باشد. اگر $rx = \circ$ به ازای $x \neq \circ$، نشان می‌دهیم که $rM = \circ$.

$$rx = \circ, x \neq \circ \Rightarrow rx = \circ, x \notin (\circ) \overset{\text{اول است}(\circ)}{\Longrightarrow} rM \subseteq (\circ) \Rightarrow rM = \circ$$

بنابراین r پوچساز M است. ■

۱_۱۸ لم: هر زیرمدول بیشین، اول است.

برهان: فرض کنیم N زیرمدول بیشین از R_مدول M باشد. طبق لم ۱_۱۴، $\frac{M}{N}$، R_مدول ساده است و لذا طبق لم ۱_۱۶، هر مقسوم علیه $\frac{M}{N}$ پوچساز آن است. بنابراین طبق لم ۱_۱۷، $_{\frac{M}{N}}(\circ)$، یعنی N، زیر مدول اول M است. ■

۱_۱۹ مثال: $\mathcal{Z}(p^\infty)$ بعنوان $\mathcal{Z}$_مدول، زیرمدول بیشین ندارد. چون هر زیرمدول بیشین اول است و طبق مثال ۱_۸، $\mathcal{Z}(p^\infty)$ زیرمدول اول ندارد. پس $Rad(\mathcal{Z}(p^\infty)) = \mathcal{Z}(p^\infty)$.

۱_۲۰ لم: فرض کنید M یک R_مدول باشد، آنگاه:

۱) $J(R)M \subseteq Rad\ M$

۲) $nil(R)M \subseteq rad(\circ) \subseteq Rad\ M$.

برهان: ۱) کافی است نشان دهیم $J(R) \subseteq (Rad\ M : M)$ است. اما از طرفی داریم:

$$(Rad\ M : M) = \left(\bigcap_{i\in I} m_i : M\right) = \bigcap_{i\in I}(m_i : M)\ ,\ R \text{ ایده‌ال‌بیشین } m_i \ ,\ i \in I$$

لذا بایستی نشان دهیم برای هر زیرمدول بیشین N از R_مدول M، داریم: $J(R) \subseteq (N : M)$. فرض کنیم:

$$r \in J(R) \overset{\text{تعریف}}{\Longrightarrow} \text{ برای هر } x \in R\ ,\ 1 - rx \text{ یکه‌است}\ , \qquad (*)$$

حال ثابت می‌کنیم، $rM \subseteq N$ یا به طور معادل:

$$\forall m \in M\ ,\ rm \in N$$

برهان خلف: فرض کنیم

(N زیرمدول بیشین M است)، $\exists m \in M\backslash N, rm \notin N \;\Rightarrow\; N + Rrm = M$

$$\Rightarrow \quad m \in N + Rrm$$

$$\Rightarrow \quad \exists n \in N, s \in R \ , \ m = n + srm$$

$$\Rightarrow \quad m(1 - sr) = n$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad m = n(1 - sr^{-1}) \in N$$

که با فرض $m \notin N$، در تناقض است. پس $rM \subseteq N$.

۲) چون طبق لم ۱ـ۱۸، هر زیرمدول بیشین اول است پس به وضوح داریم:

$$\{P_i | \forall i \in I, M \text{ زیرمدول بیشین } P_i\} \subseteq \{N_j | j \in J, M \text{ زیرمدول اول } N_j\}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{j\in J} |\{N_j | M \text{ زیرمدول اول } N_j\} \subseteq \bigcap_{i\in I} |\{P_i | M \text{ زیرمدول بیشین } P_i\}$$

$$\Rightarrow \quad rad(0) \subseteq Rad\ M \cdot$$

حال برای اینکه نشان دهیم، $nil(R)M \subseteq rad(0)$ است کافی است نشان دهیم $nil(R) \subseteq (rad(0) : M)$. اما از طرفی داریم:

$$(rad(0) : M) = \left(\bigcap_{i\in I} m_i : M\right) = \bigcap_{i\in I} (m_i : M) \ , \ \forall i \in I, \ \text{زیرمدول‌اول } M \text{ است } m_i$$

لذا کافی است نشان دهیم برای هر زیرمدول اول N از Rـمدول M،

$$nil(R) \subseteq (N : M) \cdot$$

فرض کنیم:

$$r \in nil(R) \overset{\text{تعریف}}{\Longrightarrow} \exists n > 0 \ , \ r^n = 0$$