بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشکده علوم پایه

گروه فیزیک

نمایش‌های شبه احتمالی و توموگرافیک حالت‌های فاز میدان الکترومغناطیسی کوانتیده

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی فیزیک

گرایش اتمی مولکولی

تقی رشوند

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا بذرافکن

استاد مشاور:

دکتر الهه نحوی فرد

اسفند ۱۳۹۰

چکیده

ما در این پایان نامه تعدادی از تعاریف عملگر فاز و حالت‌های فاز متناظر آن‌ها را بررسی می‌کنیم. توابع توزیع فاز قابل پیش بینی آن‌ها (در مورد چند حالت دلخواه) با یکدیگر مقایسه می‌شوند. برای برخی از تعاریف مبتنی بر تعریف حالت فاز از طریق شبه توزیع‌های منتج از توابع نماد s' - پارامتری، نمایش s - پارامتری آن‌ها مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. ضمناً شبه توزیع‌های نظیر حالت فاز پگ- بارنت برای هر مقدار پارامتر ترتیب محاسبه شده‌اند. با توجه به این که در تجربه توموگرام حالت کوانتومی بدست می‌آید و لذا داشتن نماد توموگرافیک و نماد توموگرافیک دوگان اپراتور فاز سبب می‌شود که مستقیماً توابع توزیع فاز قابل استخراج باشند ، نمایش توموگرافیک و نمایش توموگرافیک دوگان حالت‌های فاز محاسبه شده‌اند.

کلمات کلیدی: عملگر و حالت‌های فاز، توابع نماد s –پارامتری، نماد توموگرافیک، نماد توموگرافیک دوگان.

فهرست

عنوان صفحه

فهرست

عنوان صفحه

فصل چهارم : پیش‌بینی‌های فاز چند حالت دلخواه و مقایسه تابع توزیع فازها

فهرست

عنوان صفحه

فهرست شکل ها

مقدمه

همان‌طور که می‌دانیم در غیاب جریان و بار می‌توان از معادلات ماکسول شروع کرد و با گرفتن پیمانه کولنی، پتانسیل برداری میدان الکترومغناطیسی را بر حسب متغیرهای که قیدی رویشان نیست نوشت؛ و سپس E و B را بر حسب آن‌ها بیان کرد و مشاهده کرد که این متغیرها، متغیرهای کانونیک هستند[۲۲]. چون این متغیرها مستقل کانونیک اند با توجه به قاعده کوانتش کانونیک می‌توان میدان‌های الکترومغناطیسی را کوانتیزه کرد؛ و دید که یک میدان الکترومغناطیسی به لحاظ ریاضی شبیه بینهایت نوسانگر هارمونیک است. هر یک از این نوسانگرها متناظر با یک مد میدان دیده می‌شود. با توجه به کوانتش میدان الکترومغناطیسی انتظار داریم برای هر مشاهده پذیر آن (در صورت امکان) عملگر متناظر را بتوان بیان کرد. یک جفت از کمیت‌های (مشاهده پذیر) که همیوغ کانونیک همدیگراند کمیت‌های فاز φ و دامنه‌اند. ما این موضوع را در فصل ۳ نشان می‌دهیم؛ بنابراین انتظار است که بتوان عملگرهای متناظر را برای آن‌ها یافت. دیراک[1] از خاصیت همیوغ بودن φ و J استفاده کرد و با توجه به قاعده کوانتش آن‌ها را کوانتیزه کرد. ولی متأسفانه عملگر $\hat{\varphi}$ مشکل داشت و بنابراین دیراک پیشنهاد به ساخت عملگر $\hat{\varphi}$ از طریق تجزیه عملگر فنا داد. ولی کمی بعد متوجه شدند که این نیز روش نیز مشکل دارد. این موضوع‌ها در بخش ۳-۱ بررسی شده است. سپس پیشنهاد شد به جای بررسی خود φ از توابع متناوب آن $\sin\varphi, \cos\varphi$ استفاده شود و عملگرهای متناظر ساخته شوند سپس از طریق آن‌ها راجع به توزیع فاز صحبت شود [۱۸]. انتظار می رود کروشه لی این عملگرها صفر باشد اما همان طوری که در بخش ۳-۲ بررسی شده، کروشه لی آن‌ها مخالف صفر است. سوسکیند- گلاگوور[2] بعد از بررسی مشکلات فاز دیراک حالت فاز خودشان را پیشنهاد دادند. همان‌طور که در بخش ۳-۳ خواهیم دید این

---

[1] Dirac
[2] Susskind-Glogower

حالت‌ها بهنجار نیستند. هنوز معمای عملگر فاز هرمیتی حل نشده بود تا اینکه پگ – بارنت[3] با محدود گرفتن بعد فضای هیلبرت حالت سیستم عملگر هرمیتی فاز را بیان کردند. این موضوع در قسمت ۳-۴ آورده شده است. روش‌های دیگری هم برای تعریف فاز موجود است از جمله آن‌ها تعریف تابع توزیع چگالی احتمال فاز با استفاده از توابع شبه احتمال است که بررسی آن‌ها قسمت پایانی فصل ۳ را تشکیل می‌دهد؛ بنابراین همان طوری که در چند سطر بالا (به طور خلاصه) بیان شد اپراتور فاز خوش تعریف وجود ندارد یا حداقل ما آن را نمی‌شناسیم، با این وجود تعاریف نسبتاً خوبی مطرح است. ازجمله آن‌ها تعریف سوسکیند گلاگوور، پگ–بارنت و تابع توزیع فاز s – پارامتری می‌باشند. متأسفانه این تعاریف برای سیستمی که در حالت معین $\hat{\rho}$ است تابع توزیع فاز یکسانی را پیش‌بینی نمی‌کنند. برای نشان دادن این موضوع ما در فصل ۴ توابع توزیع احتمالی را که تعاریف فاز (ی که در فصل ۳ آورده‌ایم) برای چند حالت دلخواه پیش بینی می‌کنند، را می‌آوریم. یک مقایسه‌ای بین تعاریف فاز و پیش بینی‌هایشان انجام می‌دهیم.

همان‌طور که می‌دانیم فاز به عنوان یکی از مشاهده پذیرهایی که در مکانیک کلاسیک خوش تعریف و قابل اندازه گیری است (البته اختلاف فاز اندازه گیری می‌شود) مطرح است؛ بنابراین پیدا کردن اپراتور فاز متناظر، یکی از اهداف دانشمندان فیزیک از سال ۱۹۲۶ تا به حال بوده است. ما در این پایان نامه با اهداف زیر سعی در برداشتن گامی در جهت حل این مسئله پرداخته‌ایم.

۱. **محاسبه نماد توموگرافیک دوگان فاز.** می‌دانیم آنچه در آزمایشگاه بدست می‌آید توموگرام حالت (یا به طور معادل نماد توموگرافیک) است. اگر نماد توموگرافیک دوگان فاز در دست باشد می‌توانیم مستقیماً (بدون نیاز به بازسازی عملگر حالت) توابع توزیع فاز را از طریق انتگرال همپوشان بدست بیاوریم.

---

[3] Pegg - Barnett

۲. **محاسبه نماد توموگرافیک فاز.** با داشتن نماد توموگرافیک فاز می‌توان از انتگرال همپوشان برای بدست آوردن تابع توزیع فاز اقدام کرد ولی باید توجه کرد برعکس مورد ۱ این بار به نماد توموگرافیک دوگان حالت نیاز است.

۳. با بررسی نماد توموگرافیک و نماد توموگرافیک دوگان فاز احتمالاً بتوان اپراتور فاز خوش تعریفی را یافت.

برای رسیدن به این مهم ما در فصل ۵ به محاسبه توابع توزیع شبه احتمال، نماد توموگرافیک و توموگرافیک دوگان اپراتورهای فاز (ی که در فصل ۳ بیان شد) پرداختیم. روابط ریاضیاتی این نمادها به طور کامل بدست آمده است ولی بررسی موشکافانه این روابط برای یافتن اپراتور فاز خوش تعریف مجال دیگری می‌طلبد.

و نهایتاً در پیوست ابتدا به موضوع مهم فنون انتگرال گیری و مشتق گیری از عملگرها (که نیاز نیست در هنگام عملیات نگران جا بجا نشدن عملگرها باشیم) می‌پردازیم. این نوع فنون در کارهای هانگ–فن[4] به وفور موجود است [۹] و [۷] . البته یک اشاره کوچکی به این بحث در [۴] هم دیده می‌شود. موضوع از این قرار است چون بین عملگرها بحث عدم جابجایی (بین آن‌های که جابجاگرشان مخالف صفر است) مطرح است بنابراین نمی‌توان به راحتی عملیات‌های مثل مشق گیری و انتگرال گیری را انجام داد. باید در طی کار حواسمان به رابطه جابجاگر بین عملگرها باشد. اما این مشکل با به وجود آمدن چنین فنون انتگرال گیری برطرف می‌شود. در ادامه پیوست چند اتحاد که در پایان نامه به آن‌ها نیاز می‌باشد، آورده شده است.

[4] Hong-fan

فصل اول:فرمالیزم کلی نگاشت‌های کوانتش و واکوانتش

در فرمالیزم متداول مکانیک کوانتومی، حالت‌ها به وسیله بردارهایی متعلق به فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ سیستم نمایش داده می‌شوند. البته در حوزه مکانیک آماری کوانتومی بهتر است بجای بردار حالت $\left|\psi\right\rangle$، از ترکیب آماری وزن دار تصویرگرهای $\left|\psi_k\right\rangle\left\langle\psi_k\right|$ که عملگر چگالی $\hat{\rho}$ نامیده می‌شود استفاده کنیم. به این ترتیب هم حالت‌ها و هم مشاهده پذیرها با عملگرهای هرمیتی نمایش داده می‌شوند. عملگر چگالی، عملگری مثبت با تریس واحد و هرمیتی است. آنچه حالت‌های کوانتومی $\hat{\rho}$ را به اطلاعات تجربی ربط می‌دهد چشمداشتی‌ها است. در واقع می‌دانیم توابع توزیع ویژه مقادیر مشاهده پذیرها، خود چشمداشتی کلاسی از تصویرگرها هستند که با ویژه مقادیر متناظر برچسب زده می‌شوند. اگر $\hat{\rho}$عملگر چگالی و $\hat{A}$ یک مشاهده پذیر باشد آنگاه $\left\langle \hat{A}\right\rangle_{\hat{\rho}} = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}\hat{A}\right\}$. ترکیب عملیات ضرب دو عملگر و سپس محاسبه تریس ویژگی‌های یک ضرب داخلی را دارد که در آن عملگرهای دخیل نقش بردارها را بازی می‌کنند. خود عملگرها نیز با توابعی، که نقش مؤلفه بردارها را بازی می‌کنند، قابل نمایش هستند.

اگر $\mathcal{L}\left(\mathcal{H}\right)$ فضای همه عملگرهای خطی روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد (که شامل همه عملگرهای چگالی نیز هست) می‌توان نگاشتی یک به یک از آن به مجموعه‌ای از توابع اسکالر بنا کرد و محاسبات کوانتوم مکانیکی را بر حسب این توابع اسکالر انجام داد. اگر توابع اسکالر مذکور را با $W\left(\vec{x}\right)$ که در آن $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ است نشان دهیم و مجموعه توابع مذکور که متناظر با حالت‌ها و مشاهده پذیرها هستند را با $\mathcal{L}'$ نشان دهیم قصد داریم تناظر زیر:

$$\hat{A} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}\right) \leftrightarrow W_{\hat{A}}\left(\vec{x}\right) \in \mathcal{L}'$$

را بنا کنیم. البته باید در $\mathcal{L}'$ ضربی را تعریف کنیم که ناجابجایی بوده و نقش ضرب عملگرهای فضای هیلبرت را تقلید کند. همین‌طور باید برای محاسبه عبارت‌هایی به فرم $\mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}\hat{F}\right\}$ دستورالعمل‌های مناسبی پیدا کنیم که محاسبه آن‌را بر حسب $W_{\hat{F}}\left(\vec{x}\right), W_{\hat{\rho}}\left(\vec{x}\right) \in \mathcal{L}'$ ممکن سازد. نگاشتی که ما را از عملگر $\hat{A} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}\right)$به تابع اسکالر $W_{\hat{A}}\left(\vec{x}\right) \in \mathcal{L}'$، که اغلب نماد عملگر مذکور نامیده می‌شود،

می‌برد نگاشت وا- کوانتش نامیده می‌شود. بر عکس نگاشتی که امکان بازسازی عملگر $\hat{A}$ را از نماد آن فراهم می‌کند نگاشت کوانتش نامیده می‌شود. عموماً نگاشت‌های کوانتش و واکوانتش خطی هستند و معکوس یکدیگر محسوب می‌شوند لذا تناظر بین عملگرها و نمادهایشان یک به یک است.

برای سادگی بحث را به یک نوسانگر هارمونیک یک بعدی، که سیستمی با یک درجه آزادی است محدود می‌کنیم. عملگرها $\hat{a},\hat{a}^\dagger$ به ترتیب عملگرهای خلق و فنا نامیده می‌شوند که در رابطه $\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]=\hat{1}$ صدق می‌کنند. عملگر مشاهده پذیر تعداد فوتون را با $\hat{N}$ نشان می‌دهیم که به صورت $\hat{N}=\hat{a}^\dagger\hat{a}$ تعریف می‌شود. عملگر یکانی $\hat{D}(\alpha)\equiv e^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}},\ \ \alpha\in\mathbb{C}$ عملگر انتقال حالت در فضای فاز است و به اختصار آن‌را عملگر انتقال می‌نامیم. حالت‌های همدوس را که ویژه حالت‌های عملگر فنا هستند با $\big|\alpha\big\rangle,\ \ \alpha\in\mathbb{C}$ نشان می‌دهیم. این حالت‌ها در رابطه $\big|\alpha\big\rangle\equiv\hat{D}(\alpha)\big|0\big\rangle$ صدق می‌کنند و در این معنی حالت‌های همدوس از انتقال حالت خلأ بدست می‌آیند. برای آشنایی با تعاریف مقدماتی می‌توان به [۴] و [۲۲] مراجعه کرد.

در فضای هیلبرت نوسانگر هماهنگ پایه‌های متفاوتی می‌توان انتخاب کرد. برخی مثال‌های آشنا پایه انرژی (شمارگان فوتون) و مکان بی بعد یا تکانه بی بعد است. همه آن‌ها در روابط راست هنجاری و تعامد زیر صدق می‌کنند.

$$\begin{array}{llll}
\hat{N}\big|n\big\rangle=n\big|n\big\rangle, & \big\{\big|n\big\rangle\big|n=0,1,2,\cdots\big\}, & \sum\limits_{n=0}^{\infty}\big|n\big\rangle\big\langle n\big|=\hat{1}, & \big\langle n'\big|n''\big\rangle=\delta_{n'n''}\\
\hat{q}\big|q\big\rangle=q\big|q\big\rangle, & \big\{\big|q\big\rangle\big|q\in\mathbb{R}\big\}, & \int dq\big|q\big\rangle\big\langle q\big|=\hat{1}, & \big\langle q'\big|q''\big\rangle=\delta\big(q'-q''\big)\\
\hat{p}\big|p\big\rangle=p\big|p\big\rangle, & \big\{\big|p\big\rangle\big|p\in\mathbb{R}\big\}, & \int dp\big|p\big\rangle\big\langle p\big|=\hat{1}, & \big\langle p'\big|p''\big\rangle=\delta\big(p'-p''\big)
\end{array}$$

حالت‌های همدوس نیز یک پایه فوق کامل تشکیل می‌دهند که در رابطه بستاری و تعامد زیر صدق می‌کنند:

$$\int |\alpha\rangle\langle\alpha| \frac{d^2\alpha}{\pi} = \hat{1}, \qquad \langle\alpha|\beta\rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right) + \alpha^*\beta\right\} \qquad (۱-۱)$$

از اثبات این روابط که می‌توان آن‌ها را در کتاب‌های اپتیک کوانتومی مثل [۱۲] به سادگی یافت صرف نظر می‌کنیم.

اکنون فرض کنید $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ فضای همه عملگرهای خطی روی فضای هیلبرت نوسانگر هارمونیک یک بعدی، $\mathcal{H}$، باشد. اگر بتوان دو خانواده از عملگرها مانند $\{\hat{D}(\vec{x})\}$ و $\{\hat{U}(\vec{x})\}$ چنان یافت که:

$$W_{\hat{F}}(\vec{x}) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{F}\hat{U}(\vec{x})\right\}, \qquad \hat{F} = \int W_{\hat{F}}(\vec{x})\hat{D}(\vec{x})\mu(d\vec{x})$$

آنگاه نگاشت‌های خطی فوق تناظر یک به یکی بین $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ و $\mathcal{L}'$ایجاد خواهند کرد. با استفاده از دو رابطه بالا داریم:

$$W_{\hat{F}}(\vec{x}) = \int \mu(d\vec{y})W_{\hat{F}}(\vec{y})\mathrm{Tr}\left\{\hat{D}(\vec{y})\hat{U}(\vec{x})\right\},$$

بنابراین همیشه رابطه تعامدی به فرم $\mathrm{Tr}\left\{\hat{D}(\vec{y})\hat{U}(\vec{x})\right\} = \delta^{(n)}(\vec{x} - \vec{y})$ بین خانواده عملگرهای $\{\hat{D}(\vec{x})\}$ و $\{\hat{U}(\vec{x})\}$ وجود خواهد داشت. در روابط بالا $\vec{x} \equiv (x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ و $\hat{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ و $\hat{D}(\vec{x})$، $\hat{U}(\vec{x})$ به ترتیب مشهور به عملگر کوانتش کننده[۱] و پادکوانتش کننده[۲] اند. در زیر مثال‌هایی از این عملگرها ارائه می‌کنیم.

۱-۱ عملگر انتقال در نقش عملگر کوانتش

در اینجا نشان می‌دهیم که مجموعه $\left\{\hat{D}(\xi) = e^{\xi\hat{a}^\dagger - \xi^*\hat{a}}\right\}_{\xi\in\mathbb{C}}$ یک مجموعه کامل (برای مشاهده پذیرهای نوسانگر هارمونیک یک بعدی) است. چون حالت‌های همدوس شرط بستاری (۱-۱) را ارضا می‌کنند لذا برای هر عملگر $\hat{F}$ داریم:

---

۱ quantizer operator

۲ dequantizer operator

$$\hat{F} = \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\frac{d^2\beta}{\pi}\big|\alpha\big\rangle\big\langle\alpha\big|\hat{F}\big|\beta\big\rangle\big\langle\beta\big| = \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\frac{d^2\beta}{\pi}\big\langle\alpha\big|\hat{F}\big|\beta\big\rangle\big|\alpha\big\rangle\big\langle\beta\big| \qquad (۲-۱)$$

اگر بتوان $\big|\alpha\big\rangle\big\langle\beta\big|$ ها را بر حسب عملگر انتقال بسط داد به هدف خود رسیده‌ایم. برای این منظور لم زیر را ثابت می‌کنیم. لم:

$$\int \frac{d^2\xi}{\pi}\big\langle\beta\big|\hat{D}(\xi)\big|\alpha\big\rangle\hat{D}(-\xi) = \big|\alpha\big\rangle\big\langle\beta\big|$$

برای اثبات، طرف چپ معادله فوق را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\int \frac{d^2\xi}{\pi}\big\langle\beta\big|\hat{D}(\xi)\big|\alpha\big\rangle\hat{D}(-\xi) = \int \frac{d^2\xi}{\pi}\big\langle\beta\big|e^{\xi\hat{a}^\dagger-\xi^*\hat{a}}\big|\alpha\big\rangle e^{-\xi\hat{a}^\dagger+\xi^*\hat{a}}$$

از سوی دیگر چون $e^{\xi\hat{a}^\dagger-\xi^*\hat{a}} = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}e^{\xi\hat{a}^\dagger}e^{-\xi^*\hat{a}}$ بنابراین داریم:

$$\text{L.H.S.}= \int \frac{d^2\xi}{\pi}e^{-|\xi|^2}e^{\xi\beta^*}e^{-\xi^*\alpha}\big\langle\beta\big|\alpha\big\rangle e^{-\xi\hat{a}^\dagger}e^{\xi^*\hat{a}}$$

ضرب داخلی حالت‌های همدوس نیز از رابطه $\big\langle\beta\big|\alpha\big\rangle = e^{-\frac{|\beta|^2}{2}-\frac{|\alpha|^2}{2}}e^{\beta^*\alpha}$ بدست می‌آید لذا:

$$\text{L.H.S.}= e^{-\frac{|\beta|^2}{2}-\frac{|\alpha|^2}{2}}e^{\beta^*\alpha} : \int \frac{d^2\xi}{\pi}\exp\Big\{-\big|\xi\big|^2 + \xi\big(\beta^* - \hat{a}^\dagger\big) - \xi^*\big(\alpha - \hat{a}\big)\Big\} :$$

اکنون با استفاده از تکنیک انتگرال‌گیری درون حاصل‌ضرب های مرتب (پیوست الف) و فرمول انتگرال گوسی دوبعدی در فرم مختلط (پیوست ت) داریم:

$$\begin{aligned}\text{L.H.S.}&= e^{-\frac{|\beta|^2}{2}-\frac{|\alpha|^2}{2}}e^{\beta^*\alpha} : e^{-\left(\beta^*-\hat{a}^\dagger\right)\left(\alpha-\hat{a}\right)} : \\ &= e^{-\frac{|\beta|^2}{2}-\frac{|\alpha|^2}{2}}e^{\beta^*\alpha}e^{-\beta^*\alpha}e^{\alpha\hat{a}^\dagger} : e^{-\hat{a}^\dagger\hat{a}} : e^{\beta^*\hat{a}}\end{aligned}$$

با توجه به اتحاد $\big|0\big\rangle\big\langle0\big| =: e^{-\hat{a}^\dagger\hat{a}}$: (پیوست الف) و تعریف حالت همدوس به عنوان حالت خلأ انتقال یافته داریم:

$$\text{L.H.S.} = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} \big|0\big\rangle\big\langle 0\big| e^{\beta^* \hat{a}} e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} = \big|\alpha\big\rangle\big\langle\beta\big|$$

و لم ثابت شده است. در ادامه از (۱-۲) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\hat{F} &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\frac{d^2\beta}{\pi}\frac{d^2\xi}{\pi}\big\langle\alpha\big|\hat{F}\big|\beta\big\rangle\big\langle\beta\big|\hat{D}(\xi)\big|\alpha\big\rangle\hat{D}(-\xi)\\ &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\frac{d^2\xi}{\pi}\big\langle\alpha\big|\hat{F}\hat{D}(\xi)\big|\alpha\big\rangle\hat{D}(-\xi) = \int \frac{d^2\xi}{\pi}\mathrm{Tr}\Big\{\hat{F}\hat{D}(\xi)\Big\}\hat{D}(-\xi)\end{aligned}$$

یعنی هر عملگر $\hat{F}$ را می‌توان بر حسب $\hat{D}(-\xi) = \hat{D}^\dagger(\xi)$ ها بسط داد. آشکارا رابطه بالا را می‌توان به فرم زیر نیز نوشت:

$$\hat{F} = \int \frac{d^2\xi}{\pi}\mathrm{Tr}\Big\{\hat{F}\hat{D}^\dagger(\xi)\Big\}\hat{D}(\xi) \qquad (۱-۳)$$

اگر تناظرهای زیر را بپذیریم، چنین بسطی در چارچوب فرمالیزم کلی معرفی شده در ابتدای فصل قرار می‌گیرد:

$$\vec{x} \mapsto \xi \in \mathbb{C}, \quad \hat{D}(\vec{x}) \mapsto \hat{D}(\xi) \quad \hat{U}(\vec{x}) \mapsto \hat{D}^\dagger(\xi),$$

البته آشکارا جای دو مجموعه $\hat{D}(\eta), \hat{D}^\dagger(\xi)$ را می‌توان عوض کرد. به عنوان یک تعمیم ساده، از مجموعه عملگرهای انتقال می‌توان مجموعه جدید عملگرهای انتقال s - پارامتری را با تعریف زیر ساخت:

$$\hat{D}(\xi, s) \equiv \exp\left\{\frac{s}{2}|\xi|^2\right\}\hat{D}(\xi)$$

به سادگی می‌توان دید که رابطه (۱-۳) به فرم جدید زیر قابل باز نویسی است:

$$\hat{F} = \int \frac{d^2\xi}{\pi}\mathrm{Tr}\left\{\hat{F}\exp\left\{-\frac{s}{2}|\xi|^2\right\}\hat{D}^\dagger(\xi)\right\}\exp\left\{\frac{s}{2}|\xi|^2\right\}\hat{D}(\xi),,$$

$$\hat{F} = \int \frac{d^2\xi}{\pi}\mathrm{Tr}\Big\{\hat{F}\hat{D}^\dagger(\xi, -s)\Big\}\hat{D}(\xi, s) \qquad (۱-۴)$$

پس آشکارا این مجموعه نیز یک پایه تشکیل می‌دهد و از طریق آن می‌توان نگاشت‌های کوانتش و واکوانتش تعریف کرد. برای پیدا کردن شرط تعامد کافی است عبارت تریس $\mathrm{Tr}\left\{\hat{D}\left(\alpha\right)\hat{D}^{\dagger}\left(\beta\right)\right\}$ را محاسبه کنیم. این کار به راحتی بر پایه حالت‌های همدوس قابل انجام است. می‌نویسیم:

$$\mathrm{Tr}\left\{\hat{D}\left(\alpha\right)\hat{D}^{\dagger}\left(\beta\right)\right\}=\mathrm{Tr}\left\{e^{\alpha\hat{a}^{\dagger}-\alpha^{*}\hat{a}}e^{-\left(\beta\hat{a}^{\dagger}-\beta^{*}\hat{a}\right)}\right\}$$

اکنون تنها کافی است عبارت داخل علامت تریس را به فرم هم ارز نرمال بنویسیم:

$$\begin{aligned}e^{\alpha\hat{a}^{\dagger}-\alpha^{*}\hat{a}}e^{-\left(\beta\hat{a}^{\dagger}-\beta^{*}\hat{a}\right)}&=e^{\beta\alpha^{*}-\alpha\beta^{*}}e^{\left(\alpha-\beta\right)\hat{a}^{\dagger}-\left(\alpha-\beta\right)^{*}\hat{a}}\\&=e^{\left(\beta\alpha^{*}-\alpha\beta^{*}\right)/2}e^{-\left|\alpha-\beta\right|^{2}/2}e^{\left(\alpha-\beta\right)\hat{a}^{\dagger}}e^{-\left(\alpha-\beta\right)^{*}\hat{a}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left\{\hat{D}\left(\alpha\right)\hat{D}^{\dagger}\left(\beta\right)\right\}&=e^{\left(\beta\alpha^{*}-\alpha\beta^{*}\right)/2}e^{-\left|\alpha-\beta\right|^{2}/2}\int\frac{d^{2}\xi}{\pi}\left\langle\xi\right|e^{\left(\alpha-\beta\right)\hat{a}^{\dagger}}e^{-\left(\alpha-\beta\right)^{*}\hat{a}}\left|\xi\right\rangle\\&=\pi e^{\left(\beta\alpha^{*}-\alpha\beta^{*}\right)/2}e^{-\left|\alpha-\beta\right|^{2}/2}\int\frac{d^{2}\xi}{\pi\pi}e^{\left(\alpha-\beta\right)\xi^{*}-\left(\alpha-\beta\right)^{*}\xi}\\&=\pi e^{\left(\beta\alpha^{*}-\alpha\beta^{*}\right)/2}e^{-\left|\alpha-\beta\right|^{2}/2}\delta^{(2)}\left(\alpha-\beta\right)\end{aligned}$$

بنابراین $\mathrm{Tr}\left\{\hat{D}\left(\alpha\right)\hat{D}^{\dagger}\left(\beta\right)\right\}=\pi\delta^{(2)}\left(\alpha-\beta\right)$ و از آنجا رابطه تعامد عام‌تر زیر را بدست می‌آوریم.

$$\mathrm{Tr}\left\{\hat{D}\left(\alpha,s\right)\hat{D}^{\dagger}\left(\beta,-s\right)\right\}=\mathrm{Tr}\left\{\hat{D}\left(\alpha\right)\exp\left(\frac{s}{2}\left|\alpha\right|^{2}\right)\hat{D}^{\dagger}\left(\beta\right)\exp\left(-\frac{s}{2}\left|\beta\right|^{2}\right)\right\},\mapsto$$

$$\mathrm{Tr}\left\{\hat{D}\left(\alpha,s\right)\hat{D}^{\dagger}\left(\beta,-s\right)\right\}=\pi\delta^{(2)}\left(\alpha-\beta\right)\qquad(۱-۵)$$

ویژگی‌های ریاضی تابع $\mathrm{Tr}\left\{\hat{F}\hat{D}^{\dagger}(\xi)\right\}$ به خصوصیات عملگر $\hat{F}$ بستگی دارند. مثلاً نشان داده شده است [۴] که اگر عملگر $\hat{F}$ کراندار باشد، به این معنی که $\left\|\hat{F}\right\|=\mathrm{Tr}\left\{\hat{F}^{\dagger}\hat{F}\right\}<\infty$، آنگاه تابع $\mathrm{Tr}\left\{\hat{F}\hat{D}^{\dagger}(\xi)\right\}$ تابعی مجذورا انتگرال پذیر خواهد بود.

۱-۲ عملگر تعمیم یافته ویگنر $\hat{U}_{s}\left(\alpha\right)$ به عنوان عملگر کوانتش

خانواده عملگرهای تعمیم یافته ویگنر $\hat{U}_s(\alpha)$ با رابطه تبدیل فوریه زیر:

$$\hat{U}_s(\alpha) \equiv \int \frac{d^2\xi}{\pi} e^{\alpha\xi^* - \alpha^*\xi} \hat{D}(\xi, s) = \hat{U}_s^\dagger(\alpha)$$

تعریف می‌شود و به طور معکوس پذیر به $\hat{D}(\xi, s)$ مربوط می‌شود. با تبدیل وارون فوریه داریم:

$$\hat{D}(\xi, s) = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{\xi\alpha^* - \xi^*\alpha} \hat{U}_s(\alpha), \quad \mapsto \quad \hat{D}^\dagger(\xi, -s) = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{\xi^*\alpha - \xi\alpha^*} \hat{U}_{-s}(\alpha) \quad (۱-۶)$$

بنابراین با استفاده از رابطه آخر در(۱-۴) داریم:

$$\begin{aligned}
\hat{F} &= \int \frac{d^2\xi}{\pi} \mathrm{Tr}\left\{\hat{F}\hat{D}^\dagger(\xi, -s)\right\} \hat{D}(\xi, s), \\
\hat{F} &= \int \frac{d^2\xi}{\pi} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{\xi^*\alpha - \xi\alpha^*} \hat{D}(\xi, s) \mathrm{Tr}\left\{\hat{F}\hat{U}_{-s}(\alpha)\right\} \\
\hat{F} &= \int \frac{d^2\xi}{\pi} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{\alpha\xi^* - \alpha^*\xi} \hat{D}(\xi, s) \mathrm{Tr}\left\{\hat{F}\hat{U}_{-s}(\alpha)\right\}
\end{aligned}$$

بعد از انتگرال‌گیری نسبت به $d^2\xi$ بدست می‌آوریم:

$$\hat{F} = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \hat{U}_s(\alpha) \mathrm{Tr}\left\{\hat{F}\hat{U}_{-s}(\alpha)\right\}$$

بنابراین مجموعه $\hat{U}_s(\alpha)$ ها نیز به طور هم ارزی یک پایه تشکیل می‌دهند. این یعنی می‌توان عملگر $\hat{F}$ را بر حسب $\left\{\hat{U}_s(\alpha)\right\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ ها بسط دهیم. اگر بخواهیم نتیجه بدست آمده را با نمادگذاری ابتدای این بخش نشان دهیم داریم:

$$\vec{x} = (x_1, x_2) \to (\alpha_r, \alpha_i) = \alpha, \quad \hat{U}(\vec{x}) \to \hat{U}_s(\alpha) \quad \hat{D}(\vec{x}) \to \hat{U}_{-s}(\alpha)$$

رابطه تعامد را می‌توان به شکل زیر ثابت کرد. برای اثبات می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\left\{\hat{U}_s(\alpha)\hat{U}_{-s}(\beta)\right\} = \cdots \\
&= \mathrm{Tr}\left\{\int \frac{d^2\xi}{\pi} e^{\left(\alpha\xi^* - \alpha^*\xi\right)} \hat{D}(\xi, s) \int \frac{d^2\xi'}{\pi} e^{\left(\beta\xi'^* - \beta^*\xi'\right)} \hat{D}(\xi', -s)\right\} \\
&= \int \frac{d^2\xi}{\pi} \frac{d^2\xi'}{\pi} e^{\left(\alpha\xi^* - \alpha^*\xi\right)} e^{\left(\beta\xi'^* - \beta^*\xi'\right)} \mathrm{Tr}\left\{\hat{D}(\xi, s)\hat{D}(\xi', -s)\right\} \\
&= \int \frac{d^2\xi}{\pi} \frac{d^2\xi'}{\pi} e^{\left(\alpha\xi^* - \alpha^*\xi\right)} e^{\left(\beta\xi'^* - \beta^*\xi'\right)} \pi\delta^{(2)}(\xi + \xi') \exp\left\{s\frac{|\xi|^2}{2} - s\frac{|\xi'|^2}{2}\right\}
\end{aligned}$$

که در آن از (۱-۵) و یکانی بودن عملگر انتقال $\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}^{-1}(\alpha) = \hat{D}(-\alpha)$ استفاده شده است. انتگرال آخر به خاطر وجود جمله دلتای دیراک انتگرال به فرم زیر ساده می‌شود:

$$\mathrm{Tr}\left\{\hat{U}_s\left(\alpha\right)\hat{U}_{-s}\left(\beta\right)\right\} = \int \frac{d^2\xi}{\pi} e^{\left(\alpha\xi^* - \alpha^*\xi\right)} e^{-\left(\beta\xi^* - \beta^*\xi\right)} = \pi\delta^{(2)}\left(\alpha - \beta\right) \quad (۱-۷)$$

که در آن از فرم انتگرالی (مختلط) دلتای دوبعدی $\int d^2\xi e^{\left(\alpha\xi^* - \alpha^*\xi\right)} = \pi^2\delta^{(2)}\left(\alpha\right)$ استفاده شده است [۴]. ویژگی دیگر عملگر ویگنر تعمیم یافته با اتحاد زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned}\int \frac{d^2\alpha}{\pi}\hat{U}_s\left(\alpha\right) &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\frac{d^2\xi}{\pi} e^{\left(\alpha\xi^* - \alpha^*\xi\right)}\hat{D}\left(\xi, s\right) = \int d^2\xi\delta^{(2)}\left(\xi\right)\hat{D}\left(\xi, s\right), \\ &= \hat{D}\left(0, s\right) = \hat{1}.\end{aligned}$$

۱-۳ نمایش‌های فضای فاز

تابع اسکالر:

$$W_{\hat{F}}\left(\alpha, s\right) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{U}_s\left(\alpha\right)\hat{F}\right\} \quad (۱-۸)$$

را نماد s – پارامتری عملگر $\hat{F}$ می‌نامند. این نماد با توجه به رابطه بازسازی:

$$\hat{F} = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} W_F\left(\alpha, -s\right)\hat{U}_s\left(\alpha\right) \quad (۱-۹)$$

به طور یگانه‌ای با عملگر $\hat{F}$ متناظر است. تریس حاصل‌ضرب دو عملگر را می‌توان بر حسب نمادهای آن‌ها به شکل زیر بدست آورد. اگر $\hat{G}, \hat{F}$ دو عملگر دلخواه باشند آنگاه قضیه تریس حاصل‌ضرب می‌گوید:

$$\mathrm{Tr}\left\{\hat{F}\hat{G}\right\} = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} W_F\left(\alpha, s\right) W_G\left(\alpha, -s\right)$$

برای اثبات این اتحاد از بسط(۱-۹) شروع می‌کنیم و سپس تعریف (۱-۸) را بکار می‌بریم:

$$\begin{aligned}&\hat{F} = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} W_F\left(\alpha, s\right)\hat{U}_{-s}\left(\alpha\right) \quad \mapsto \\ &\mathrm{Tr}\left\{\hat{F}\hat{G}\right\} = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} W_F\left(\alpha, s\right)\mathrm{Tr}\left\{\hat{U}_{-s}\left(\alpha\right)\hat{G}\right\} = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} W_F\left(\alpha, s\right) W_G\left(\alpha, -s\right)\end{aligned}$$

اگر یکی از دو عملگر، عملگر چگالی باشد آنگاه می‌توان از نماد مربوط به عملگر چگالی یک تعبیر شبه احتمالی کرد. مطابق قضیه تریس حاصل‌ضرب، چشمداشتی یک مشاهده پذیر $\hat{F}$ در حالت کوانتومی $\hat{\rho}$ برابر است با:

$$\mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}\hat{F}\right\} = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} W_\rho\left(\alpha,s\right) W_F\left(\alpha,-s\right) \qquad (۱۰-۱)$$

بنابراین اگر برای نمایش عملگر چگالی از تابع نماد $W_\rho\left(\alpha,s\right)$ استفاده کنیم ملزم می‌شویم برای مشاهده پذیر مورد نظر تابع نماد $W_F\left(\alpha,-s\right)$، یعنی با پارامتر مختلف العلامت با پارامتر اولی، را استفاده کنیم. تنها استثنا نماد وایل ویگنر، نظیر مقدار صفر برای این پارامتر است. در هر حال $W_\rho\left(\alpha,s\right)\frac{d^2\alpha}{\pi}$ را به عنوان (شبه) احتمال اینکه سیستم در حالت $\left(\alpha,d^2\alpha\right)$ باشد تعبیر می‌کنیم. دو حالت پرکاربرد از توابع شبه احتمال، تابع گلاوبر- سودارشان و تابع هوسیمی- کانو هستند که اکنون بررسی می‌شوند.

۴-۱ توابع شبه احتمال، تابع گلاوبر- سودارشان و تابع هوسیمی- کانو

بنا بر تعریف باز آرایش نرمال با چشم پوشی از روابط جابجاگری و چیدن عملگرهای خلق در سمت چپ عملگرهای فنا در تک جمله‌های سهیم در بسط تیلور بدست می‌آید. به همین ترتیب باز آرایش پاد نرمال از چیدن عملگرهای خلق در سمت راست عملگرهای فنا در تک جمله‌های سهیم در بسط تیلور بدست می‌آید. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که باز آرایش نرمال و پاد نرمال عملگر انتقال از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$:\hat{D}\left(\alpha\right):= e^{\alpha\hat{a}^\dagger}e^{-\alpha^*\hat{a}} = e^{\left|\alpha\right|^2/2}\hat{D}\left(\alpha\right) = \hat{D}\left(\alpha,+1\right)$$
$$\vdots\hat{D}\left(\alpha\right)\vdots = e^{-\alpha^*\hat{a}}e^{\alpha\hat{a}^\dagger} = e^{-\left|\alpha\right|^2/2}\hat{D}\left(\alpha\right) = \hat{D}\left(\alpha,-1\right),$$