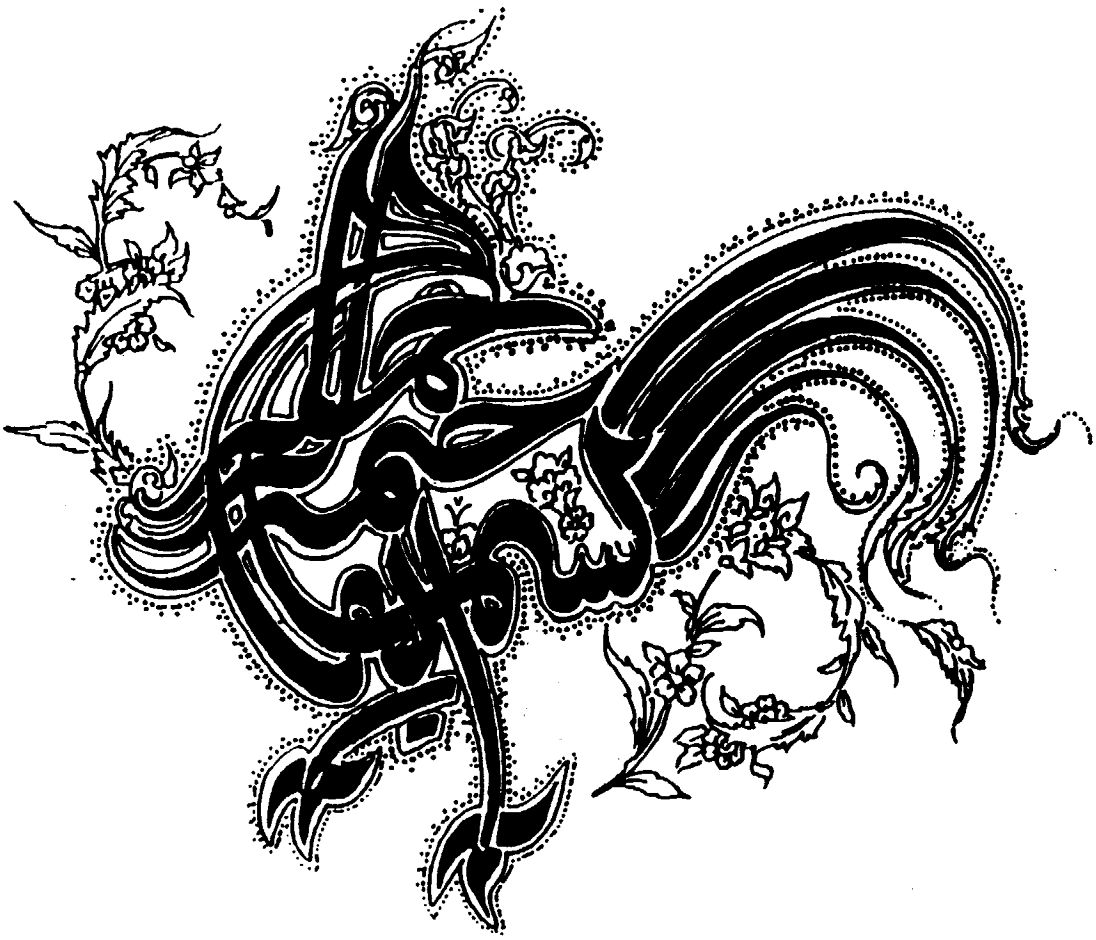
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکدۀ علوم

گروه ریاضی

موضوع :

مشتق در جبرهای باناخ

پایان نامه :

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشتۀ ریاضی محض

نگارش :

مهدی یغمایی مقدم

تقدیم به مادر عزیزم

که هرچه دارم نتیجهٔ تلاشها و فداکاریها و دعاهای خیر اوست اوکه از خودگذشت تا شیرابهٔ وجودش در رگهای فرزندانش موجب رشد و تکاملشان گردد.

مادر عزیزم، آنچه در طول سالهای تحصیل آموختم و آنچه از محضر استادان گرامی‌ام فراگرفتم در برابر درسی که در مکتب مهروزی و ایثار تو آموختم هیچ است. به پاس فداکاریهای بی‌شائبه‌ات و به پاس رنجی که برای به‌بار نشاندنم کشیدی پایان نامهٔ تحصیلی‌ام را به تو تقدیم می‌کنم.

باشد که تقدیری هرچند ناچیز را سبب گردد.

تقدیم به همسرم

که با صبر و گذشت خود، راه تحصیلم را
هموار نمود. همچنین تهیه این پایان نامه
به لطف
کمک‌های بی‌دریغ همسرم انجام گردید

بسمه تعالی

دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم - گروه ریاضی

Department of Mathematics
Ferdowsi University of Mashhad
P.O.Box 1159-91775,Mashhad
Islamic Republic of Iran

No: شماره:
Date: تاریخ:
پیوست:

جلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ آقای مهدی یغمائی مقدم دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی در ساعتِ ۱۰ روزِ ۷۴/۴/۱۰ دراتاقِ شمارهٔ ۲۵ ساختمانِ خوارزمی دانشکدهٔ علوم ۲ باحضور امضاءکنندگان ذیل تشکیل‌گردید. پس‌از بررسی و نظر هیأت داوران، پایان‌نامه نامبرده بانمرهٔ هیجده و هفتاد و پنج صدم (۱۸٫۷۵) موردتأیید قرارگرفت.ت

عنوان رساله : " مشتق درجبرهای باناخ "

تعداد واحد : ۶ واحد

داور رساله : آقای دکترمهدی رجبعلی پور
استاد گروه ریاضی دانشگاه شهید باهنرکرمان

داور رساله : آقای دکتر محمد علی پورعبداله نژاد
دانشیار گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

استاد راهنما : آقای دکتر اسداله نیکنام
استاد گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

مدیرگروه ریاضی : آقای دکتراسداله نیکنام
استاد گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

بلواروکیل آباد - سه راه کوکا - خیابان شهیدباهنر - دانشکده علوم ۲ - صندوق پستی ۱۱۵۹ -کد ۹۱۷۷۵ تلفن : ۰۵۱-۸۱۷۷۴۹
فاکس ۰۵۱-۸۱۷۷۴۹ ، پست الکترونیکی e-mail:math.sci@toos.um.ac.ir , Tel : 0098-51-817749 , Fax : 051-817749

فهرست مطالب

مقدمه

نظریه *-مشتق بسته جبرهای C^* اخیراً توسعه زیادی یافته‌است. خصوصاً مطالعه روی خواص حوزه تعریف چنین مشتقهایی مورد توجه زیادی قرار گرفته است. اما مشتق در جبرهای باناخ معمولی کمتر مورد توجه قرار گرفته و نظریهٔ مشابه جبرهای C^* برای جبرهای باناخ معمولی کمتر است.

در این پایان‌نامه به بحث در مورد چنین مشتقهایی می‌پردازیم خصوصاً خواص حوزه تعریف چنین مشتقاتی را مورد بحث قرار می‌دهیم. البته کارمان را روی مشتقهای X-مقداری که X یک A-مدول می‌باشد متمرکز می‌کنیم و می‌دانیم در حالتیکه X برابر جبر باناخ داده شده باشد $(X = A)$ مشتق X-مقداری همان مشتق روی جبر باناخ می‌شود بنابراین مادر واقع حالت کلی‌تری را مورد بحث قرار می‌دهیم.

پایان‌نامه حاضر در سه فصل تدوین شده است. فصل اول شامل تعریف‌ها و قضایای مقدماتی است که عمدتاً با آنها در آنالیز حقیقی، آنالیز تابعی و نظریه عملگرها آشنا شده‌ایم و بعنوان یادآوری این تعریف‌ها و قضیه‌ها را در فصل اول آورده‌ایم.

در فصل دوم نظریهٔ *-مشتق در جبرهای C^* را مورد بحث قرار می‌دهیم خصوصاً حوزه تعریف آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل سوم که در واقع فصل اصلی مامی باشد، به بیان مشتقهای X-مقداری در جبر باناخ A می‌پردازیم با استفاده از حساب تابعی که در بخش (۳-۳) بیان می‌کنیم، خواص حوزه تعریف این مشتقها را بررسی می‌کنیم (بخش (۴-۳)). در بخش (۵-۳) زوج‌های وینر را تعریف می‌کنیم و با استفاده از خواص آنهانشان می‌دهیم که بین مجموعهٔ ایده‌آل‌های بیشین جبر باناخ جابجایی یکدار A و مجموعهٔ ایده‌آل‌های بیشین حوزه تعریف مشتق X-مقداری، یک همسانریختی (همیومورفیسم) موجود است. در بخش (۶-۳) به مسأله ویلنسکی پاسخ منفی می‌دهیم.

در انتخاب واژه‌های معادل فارسی، سعی بر حفظ اعتدال بوده و در اکثر موارد، واژه‌های مورد استفاده انجمن ریاضی بکار گرفته شده است. از بکارگیری واژه‌های خیلی نامأنوس پرهیز شده است. واژه‌های مورد استفاده در آخر پایان‌نامه و در قالب واژه‌نامه‌ای ارائه شده است. در اینجا وظیفه خود می‌دانیم که از اساتید محترم، آقایان **دکتر نیکنام** و **دکتر پورعبدالله** که زحمات زیادی را در طول هفت‌سال تحصیلی اینجانب در دانشگاه فردوسی مشهد متحمل شدند و در تهیه این پایان‌نامه نیز بعنوان استاد راهنما و استاد مشاور راهنمائیم را به عهده گرفتند تشکر و قدردانی نمایم.

همچنین از کارکنان محترم بخش ریاضی به ویژه جناب آقای اتحاد مسئول محترم کتابخانه و سایر عزیزانی که در تهیه این پایان‌نامه همکاری نمودند و نیز از سرکار خانم ثریا طالبی که در تهیه مقالات و مراجع مورد نیاز، مرا یاری نمودند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

مهدی یغمایی مقدم

فصل اول:

مقدماتی از آنالیز تابعی

(۱ـ۱) جبرهای باناخ

(۱ـ۱ـ۱) تعریف: مجموعه A همراه با یک جمع (+) ضرب (·) و ضرب اسکالر که در شرایط زیر صدق می‌کند یک جبر (شرکت پذیر) روی میدان F گوئیم هرگاه

الف) A نسبت به جمع و ضرب اسکالر یک فضای خطی است.

ب) A نسبت به جمع و ضرب یک حلقه است یعنی در شرایط زیر صدق می‌کند

1) $x(yz)=(xy)z \qquad \forall x,y,z\in A$

2) $\begin{cases} (x+y)z=xz+yz \\ x(y+z)=xy+xz \end{cases} \qquad \forall x,y,z\in A$

ج) داشته باشیم

$$\alpha(xy)=(\alpha x)y=x(\alpha y) \qquad \forall x,y\in A\,,\ \alpha\in F$$

در حالتی که $F=R$ $(F=\mathbb{C})$ A را یک جبر حقیقی (مختلط) گوئیم

اگر A یک جبر شرکت پذیر بگونه‌ای باشد که به ازاء هر x, y در A داشته باشیم $xy=yx$ در اینصورت A را یک جبر جابجائی گوئیم، جبر A را یکدار گوئیم هرگاه عضوی از A مثل I چنان موجود باشد که به ازاء هر x در A داشته باشیم $Ix=xI=x$, I را عضو یکه A گوئیم.

(۲ـ۱ـ۱) تعریف: هرگاه A' یک جبر روی میدان F باشد و S زیر مجموعهٔ A را زیر نیم گروه A گوئیم هرگاه به ازاء هر Y,X در S حاصلضرب آنها یعنی xy نیز در S باشد.

یک زیر فضای خطی از A را یک زیر جبر A گوئیم هرگاه زیر نیم گروه A باشد.

(۳ـ۱ـ۱) تعریف: فرض کنیم A یک جبر روی $\mathbb{C}$ و نیز یک فضای نرمدار باناخ باشد در اینصورت A را یک جبر باناخ مختلط گوئیم هرگاه نرم A در نامساوی

$$\|xy\| \leq \|x\| \ \|y\| \qquad \forall x,y\in A$$

صدق کند

بعلاوه اگر A شامل عنصر یکه مثل I باشد در اینصورت $\|I\|=1$

هرگاه A و B در جبر باناخ نگاشت خطی $\Phi : A \to B$ را یک همریختی گوئیم

هرگاه $\forall x,y \in A$ $\quad \Phi(xy) = \Phi(x)\,\Phi(y)$

در حالت خاص که $B = \mathbb{C}$ و A یک جبر باناخ روی $\mathbb{C}$ باشد و $\Phi: A \to \mathbb{C}$ یک تابعک خطی باشد که

در شرط $\Phi(xy) = \Phi(x)\,\Phi(y) \quad \forall x,y \in A$

صدق می‌کند در اینصورت Φ را یک همریختی مختلط روی A گوئیم.

واضح است که اگر A جبر باناخ مختلط با عضویکه I و Φ یک همریختی مختلط باشد در اینصورت $\Phi(I)=1$

(۴ـ۱ـ۱) تعریف: فرض کنیم A یک جبر و J یک زیرفضای خطی A بگونه‌ای باشد که $AJ \subset J$ که در آن

$$AJ= \{aj, a\in A , j\in J \}$$

در اینصورت J را یک ایده‌ال چپ A گوئیم به همین ترتیب اگر J یک زیرفضای خطی A بگونه‌ای باشد که $JA \subset J$ که در آن $JA= \{ja, j\in J, a\in A \}$ J را یک ایده‌ال راست A گوئیم.

اگر J چنان باشد که هم ایده‌ال چپ A و هم ایده‌ال راست A باشد آنگاه J را یک ایده‌ال دوطرفه A گوئیم. توجه داشته باشیم که از این به بعد ایده‌ال دوطرفه را بطور اختصار ایده‌ال A می‌گوئیم.

J را یک ایده‌ال محض A گوئیم هرگاه J ایده‌الی از A و مخالف A باشد یعنی $J \neq A$ ایده‌ال J را یک ایده‌ال بیشین A گوئیم هرگاه J یک ایده‌ال سره A بوده و اگر J_o ایده‌ال دیگری از A به گونه‌ای باشد که $J\subset J_o \subset A$ آنگاه $J=J_o$ یا $J=A$ می‌دانیم که اگر J یک ایده‌ال محض از جبر یکدار A باشد آنگاه $I \notin J$ این نتیجه می‌دهد که اگر J یک ایده‌ال سره A باشد آنگاه $\bar{J}$ نیز ایده‌ال محض A است بنابراین از این مطلب نتیجه می‌گیریم که هر ایده‌ال بیشین از جبر جابجایی A بسته است.

(۵ـ۱ـ۱) تعریف: فرض کنیم A یک جبر یکدار باشد در اینصورت عنصر $a \in A$ را معکوسپذیر

(وارونپذیر) گوئیم هرگاه عنصری مانند b در A چنان موجود باشد که

$$ab = ba = I$$

در اینصورت b را معکوس a گفته، با a^{-1} نمایش می‌دهیم سایر عناصر A را عناصر معکوس ناپذیر A گوئیم.

مجموعهٔ همهٔ عناصر معکوسپذیر A را با Inv(A) (یا G(A)) و مجموعهٔ همهٔ عناصر معکوس ناپذیر A را با sing (A) نمایش می‌دهیم.

براحتی می‌بینم که مجموعهٔ همه عناصر معکوسپذیر A نسبت به ضرب تشکیل یک گروه می‌دهد این به اینعلت است که اگر عنصری معکوسپذیر باشد معکوس آن نیز معکوسپذیر است.

اگر A یک جبر یکدار و B زیر جبری از A باشد B را زیرجبر تمام A گوئیم اگر اولاً $I \in B$ و نیز B شامل معکوس عناصری از خود باشد که در A معکوس پذیر می‌باشد یعنی اگر $x \in B$ بگونه‌ای باشد که $X^{-1} \in A$ در اینصورت $x^{-1} \in B$

(۶ـ۱ـ۱) قضیه: فرض کنیم A یک جبر باناخ و $X \in A$ بقسمی که $\| x-I \| < 1$ آنگاه $X \in Inv(A)$ بوده و $x^{-1} = I + \sum_{n=1}^{\infty} (I-x)^n$

برهان: اگر قرار دهیم $r_o = \| x-I \|$ بنابراین داریم

$$\| (I-X)^n \| \leq \| I-X \|^n = r_o^n$$

و چون $r_o<1$ پس $\sum_{n=1}^{\infty} (I-X)^n$ یک سری مطلقاً همگراست و چون A باناخ است پس سری همگراست حال اگر قرار دهیم $y = I + \sum_{n=1}^{\infty} (I-x)^n$ در اینصورت داریم

$$y-xy = (I-x)y = (I-x)I + (I-x) \sum_{n=1}^{\infty} (I-x)^n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (I-x)^n = x-I$$

پس

$$y-xy = y-I$$

و یا

$$xy = I$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که $yx = I$ پس x معکوس پذیر بوده و معکوس آن برابر y می‌شود یعنی

$$x^{-1} = I + \sum_{n=1}^{\infty} (I-x)^n$$

(۷ـ۱ـ۱) قضیه: $Inv(A)$ زیر مجموعهٔ بازی از جبر باناخ A است.

برهان: فرض می‌کنیم $y \in Inv(A)$. $x \in A$ بگونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $\|x-y\| < \frac{1}{\|y^{-1}\|}$ در اینصورت داریم

$$\|y^{-1}x - I\| = \|x^{-1}(x-y)\| \leq \|y^{-1}\| \ \|x-y\| < 1$$

پس $\|y^{-1}x - I\| < 1$ و از قضیه (۶ـ۱ـ۱) نتیجه می‌گیریم که $y^{-1}x$ معکوس‌پذیر است و چون y معکوس‌پذیر می‌باشد پس $x \in Inv(A)$ این نشان می‌دهد که به‌ازاء هر $y \in Inv(A)$، $B(\frac{1}{\|y^{-1}\|}, y) \subseteq Inv(A)$ می‌باشد که در آن $B(\frac{1}{\|y^{-1}\|}, y)$ گوی باز به مرکز y و شعاع $\frac{1}{\|y^{-1}\|}$ می‌باشد.
این نشان می‌دهد که $Inv(A)$ یک زیرمجموعهٔ باز A است.

(۸ـ۱ـ۱) هرگاه A یک جبر باناخ یکدار باشد در اینصورت

$$f: Inv(A) \to Inv(A)$$

$$x \to x^{-1}$$

نگاشتی پیوسته است.

برهان: فرض کنم $x,y \in A$ به قسمی باشند که $\|x-y\| < \frac{1}{2\|y^{-1}\|}$ در اینصورت داریم

$$\|y^{-1}x-I\| = \|y^{-1}(x-y)\| \leq \|y^{-1}\| \ \|x-y\| < \frac{1}{2} < 1$$

پس طبق قضیه (۶ـ۱ـ۱)، $y^{-1}x \in Inv(A)$ و

$$(y^{-1}x)^{-1} = x^{-1}y = I + \sum_{n=1}^{\infty} (I-y^{-1}x)^n$$

بنابراین داریم:

$$\| f(x)-f(y) \| = \| x^{-1}-y^{-1} \| = \| (x^{-1}y-I)y^{-1} \| \leq \| x^{-1}y-I \| \ \| y^{-1} \|$$

اما داریم:

$$\| x^{-1}y-I \| = \| \sum_{n=1}^{\infty} (I-y^{-1}x)^n \| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \| (I-y^{-1}x) \|^n$$

پس

$$\| x^{-1}y - I \| \leq \| I-y^{-1}x \| \sum_{n=1}^{\infty} \| I-y^{-1}x \|^n$$

اما در بالا نشان دادیم $\| y^{-1}x-I \| < \frac{1}{2}$ پس

$$\| x^{-1}y-I \| \leq \frac{\| I-y^{-1}x \|}{1- \| I-y^{-1}x \|} < 2 \| I-y^{-1}x \| < 2 \| y^{-1} \| \ \| y-x \|$$

بنابراین

$$\| f(x)-f(y) \| < 2 \| y^{-1} \|^2 \ \| y-x \|$$

این نامساوی نشان می‌دهد که f تابعی پیوسته است.

(۲ـ۱) طیف و شعاع طیفی

(۱ـ۲ـ۱) تعریف: فرض کنیم A یک جبر یکدار و a عنصر دلخواهی در A باشد در اینصورت طیف a را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$sp(a,A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a-\lambda I \in singA \}$$

اگر بیم ابهامی نرود بجای $sp(a,A)$ می‌توان از نماد $SP(a,A)$ نیز استفاده کرد.

متمم $sp(a,A)$ را با $\rho(a,A)$ نشان داده و به آن مجموعهٔ حلال a می‌گوئیم پس

$$sp(a,A) = \mathbb{C} - \rho(a,A)$$

نشان می‌دهیم که طیف عنصر دلخواه a همواره فشرده و غیر تهی است. برای اینکار ابتدا لازم است که چند لم مقدماتی را ثابت کنیم. از جمله این لم‌ها، لمی را ثابت می‌کنیم که بیان می‌کند قضیه لیوویل که

در آنالیز مختلط مورد بحث قرارگرفت برای یک تابعی که برد آن اعضاء یک جبر باناخ باشند (تابع A-مقداری) نیز برقرار است

(۲ـ۲ـ۱) لم: تابع A- مقداری $F : \rho(a,A) \rightarrow A$ باضابطه $F(\lambda) = (\lambda I-a)^{-1}$ تابعی است تحلیلی، یعنی $F'(\lambda)$ به ازاء هر $\lambda\in\rho(a,A)$ موجود است.

برهان: فرض کنیم $\lambda_o\in\rho(a,A)$ در اینصورت داریم:

$$F(\lambda)-F(\lambda_o)=(\lambda I-a)^{-1} - (\lambda_o I-a)^{-1} = (\lambda I -a)^{-1} (I-(\lambda I-a)(\lambda_o I-a)^{-1})$$

$$=(\lambda I-a)^{-1} [(\lambda_o I-a) - (\lambda I -a)](\lambda_o I-a)^{-1}$$

$$=(\lambda_o - \lambda)(\lambda I-a)^{-1} (\lambda_o I-a)^{-1}.$$

بنابراین

$$\lim_{\lambda\to\lambda_o} \frac{F(\lambda)-F(\lambda_o)}{\lambda-\lambda_o} = \lim_{\lambda\to\lambda_o} - (\lambda I-a)(\lambda_o I-a) = -[(\lambda_o I-a)^{-1}]^2$$

پس

$$F'(\lambda_o)= -[(\lambda_o I-a)^{-1}]^2$$

و در نتیجه F تابعی است تحلیلی.

قبل از اینکه قضیه لیوویل را در حالت A مقداری ثابت کنیم قضیهٔ لیوویل در آنالیز مختلط را یادآوری می‌کنیم.

قضیه لیوویل:

فرض کنیم $F:\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ تابعی تام باشد یعنی $F'(\lambda), \forall \lambda \in \mathbb{C}$ موجود و $M\geq 0$ چنان موجود باشد که $\forall z\in \mathbb{C} \quad |f(z)|\geq M$ (f کراندار باشد) آنگاه f تابعی است ثابت [۵۸ و ۶]

(۳ـ۲ـ۱) قضیه لیوویل در حالت تابع A- مقداری

فرض کنیم $F:\mathbb{C} \rightarrow A$ تابعی تام و کراندار باشد که در آن A یک جبر نرمدار می‌باشد در اینصورت F ثابت است یعنی $a_o \in A$ چنان موجود است که $\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad F(\lambda) = a_o$.

برهان: ابتدا نشان می‌دهیم به ازاء هر تابعک خطی کراندار $F(F\in A^*)$ $(foF):\not{C} \rightarrow \not{C}$ تابعی ثابت

است به ازاء هر $\lambda \in \not{C}$ داریم

$$\frac{(foF)(\lambda)-(foF)(\lambda_o)}{\lambda-\lambda_o} = f(\frac{(F(\lambda)-F(\lambda_o)}{\lambda-\lambda_o}) = f(F'(\lambda_o))$$

پس (fOF) تابعی تام است و نیز داریم

$$|f(F(\lambda)| \leq \|f\| \ \|F(\lambda)\|$$

و چون F کراندار است پس $M\geq 0$ چنان موجود است که $\|F(\lambda)\| \leq M$ پس

$$|f(F(\lambda)| \leq \|f\| M$$

پس (foF) کراندار است. بنابراین (foF) طبق قضیه لیوویل در حالت مختلط مقداری ثابت است.

حال چون (foF) به ازاء هر $F\in A^*$ ثابت شده پس $f(F(\lambda)) = f(F(o))$ و یا به ازاء هر $f\in A^*$ $f(F(\lambda)-F(O))=0$. بنابراین طبق قضیه هان ـ باناخ $F(\lambda)=F(o)=0$ یعنی $F(\lambda)=F(o)$ پس F ثابت است.

(۴ـ۲ـ۱) قضیه: اگر A یک جبر باناخ و $a\in A$ در اینصورت $sp(a,A)$ زیر مجموعهٔ غیر تهی و فشرده از $\not{C}$ است

برهان: ابتدا نشان می‌دهیم $sp(a,A)$ فشرده است. تابع g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$g : \not{C} \rightarrow A \ , \ g(\lambda) = \lambda I\text{-}a$$

در اینصورت به وضوح g پیوسته است و داریم

$$\rho(a,A) = g^{-1}(Inv(A)).$$

زیرا

$$\lambda \in \rho(a,A) \Leftrightarrow \lambda I\text{-}a\in inv(A) \Leftrightarrow g(\lambda) \in Inv(A) \Leftrightarrow \lambda\in g^{-1}(Inv(A)).$$

این نشان می‌دهد که $\rho(a,A)=g^{-1}(Inv(A))$ و چون طبق قضیه (۷-۱-۱) $Inv(A)$ یک مجموعهٔ باز است و g نیز پیوسته است پس $\rho(a,A)$ باز بوده بنابراین $SP(a,A)$ بسته است.