دانشگاه حکیم سبزواری

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض - آنالیز

پایداری متعامد معادلات تابعی

استاد راهنما

دکتر قدیر صادقی

استاد مشاور

دکتر طیبه لعل شاطری

نگارش

معصومه سادات دیواندری

بهمن ماه ۱۳۹۱

تقدیم به

آسمان سخاوت پدرم

دریای محبت مادرم

صبر و شکیبایی همسرم

و بهار زندگیم

کیانا

من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق

حمد و ستایش خداوند سبحان را، که توفیق دوباره تحصیل علم را به من عطا نمود تا در راه کسب علم و معرفت گامی در رسیدن به کمال بی انتهایش بردارم.

به پاس احترام به حرمت دانش، از زحمات و راهنمایی‌های استاد گرانقدر و ارجمندم

جناب آقای دکتر صادقی

که نظارت این تحقیق را بر عهده داشته و در تمام مراحل چه در دوره کارشناسی و چه در دوره ارشد از یاری و مساعدت ایشان برخوردار بوده‌ام و از ایشان درس زندگی آموختم، نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

همچنین از استاد عزیزم **سرکار خانم دکتر شاطری** که زحمات زیادی در به نتیجه رسیدن این پایان نامه بر عهده داشتند و دلسوزانه مرا در این مهم راهنمایی کردند، صمیمانه سپاسگزارم.

معصومه دیواندری

چکیده

نام خانوادگی : دیواندری **نام :** معصومه سادات

عنوان پایان نامه : پایداری متعامد معادلات تابعی

استاد راهنما : دکتر قدیر صادقی

استاد مشاور: دکتر طیبه لعل شاطری

درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** آنالیز
محل تحصیل: دانشگاه حکیم سبزواری **دانشکده:** ریاضی و علوم کامپیوتر
تاریخ فارغ التحصیلی: بهمن ۱۳۹۱ **تعداد صفحه:۸۴**

واژه‌های کلیدی: پایداری هایرز-الام، معادلات کشی از نوع پکسیدر، نگاشت های درجه دوم متعامد، فضای متعامد، مدول باناخ.

چکیده: در دهه های اخیر پایداری معادلات تابعی توسط ریاضیدانان زیادی بررسی شده است. در این پایان نامه به بررسی مفهوم پایداری متعامد معادلات تابعی می پردازیم. ابتدا پایداری متعامد معادلات تابعی جمعی را بررسی می کنیم. سپس پایداری متعامد معادلات تابعی درجه دوم، کشی، درجه سه و درجه چهار را مطالعه خواهیم کرد. هم چنین با استفاده از قضیه نقطه ثابت پایداری معادلات تابعی بالا را اثبات خواهیم کرد.

پیشگفتار

پایداری معادلات تابعی : تحت چه شرایطی یک تابع که به طور تقریبی در معادله تابعی صدق می کند، می تواند به یک جواب معادله تابعی فوق نزدیک شود؟ اگر این سوال جواب داشته باشد آن گاه می گوییم معادله تابعی پایدار است .

در سال ۱۹۴۰ الام [۱]برای اولین بار سوالی در مورد پایداری همریختی گروه ها به صورت زیر مطرح کرد:

فرض کنید G_1 یک گروه و G_2 یک گروه متریک با متریک $d(.,.)$ باشد آیا برای $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که اگر نگاشت $h : G_1 \longrightarrow G_2$ برای هر $x, y \in G_1$ در نامساوی $d(h(xy), h(x)h(y)) \leq \delta$ صدق کند آنگاه یک هomomorفیسم $H : G_1 \longrightarrow G_2$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in G_1$ داریم $d(h(x), H(x)) \leq \varepsilon$ ؟

سوال مطرح شده توسط الام در سال ۱۹۴۱ توسط هایرز [۲] پاسخ داده شد.

اگر E_1 یک فضای برداری نرمدار و E_2 یک فضای باناخ باشد و $f : E_1 \longrightarrow E_2$ برای $\varepsilon > 0$ درنامساوی زیر صدق کند

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon \qquad (x, y \in E_1)$$

[۱] Ulam
[۲] Hyers

آن گاه نگاشت جمعی یکتایی مانند $g: E_1 \to E_2$ وجود دارد به طوری که

$$\|f(x) - g(x)\| \leq \varepsilon \quad (x \in E_1)$$

قضیه فوق در سال ۱۹۷۸ توسط راسیاس[۳] تعمیم داده شد . جونگ[۴] و ساهو [۵] پایداری معادلات درجه دوم از نوع پکسیدر[۶] را مورد بررسی قرار دادند . در سال ۱۹۸۵ راتز [۷] ساختار نگاشت های متعامد جمعی را بررسی کرد . سپس گر [۸] و سیکورسکا[۹] پایداری متعامد معادلات تابعی کشی $f(x+y) = f(x) + f(y)$ را بررسی کردند و نشان دادند اگر f یک تابع از فضای متعامد X به توی فضای باناخ Y باشد و برای $\varepsilon > 0$ و برای هر $x, y \in X$ که $x \perp y$ داشته باشیم:

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$$

آن گاه دقیقا یک نگاشت جمعی متعامد $g: X \to Y$ وجود دارد به طوری که

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \frac{16}{3}\varepsilon \quad (x \in X).$$

این پایان نامه شامل سه فصل است که اصل آن بر بررسی پایداری معادلات تابعی بنا شده است. در فصل اول ابتدا به بیان مفاهیم اولیه در آنالیز پرداخته ایم. در بخش دوم و سوم به بررسی پایداری معادلات تابعی جمعی در مدول های باناخ و هم چنین روی $*-$ جبرهای باناخ می پردازیم. در بخش چهارم با استفاده از قضیه نقطه ثابت پایداری معادلات تابعی جمعی را بررسی می کنیم. این فصل عمدتا از مقالات

[۳] Rassias
[۴] Jung
[۵] Sahoo
[۶] pexider
[۷] Ratz
[۸] Ger
[۹] Sikorska

C. Park, Fixed points and Hyers-Ulam-Rassias stability of Cauchy-Jensen functional equations in Banach algebras, Fixed Point Theory Appl. Art. ID 50175 (2007)

M. S. Moslehian, Th. M. Rassias. Orthogonal stability of additive type equation. Aequation Math. 73, 249-259 (2007).

برگرفته شده است.

فصل دوم شامل دو بخش است در بخش اول پایداری متعامد معادلات کشی در مدول های باناخ را بررسی می کنیم و در بخش دوم با استفاده از قضیه نقطه ثابت به بررسی پایداری معادلات تابعی درجه دوم می پردازیم. این فصل عمدتا از مقالات

M. S. Moslehian, On the orthogonal stability of the Pexiderized quadratic equation. J. Differ. Equat. App1. 11, 999-1004 (2005)

J. Diaz and B.Margolis, A fixed point theorem of the alternative for contractions on a generalized complete metric space, Bull. Amer. Math. Soc. 74 , 305-309. 1.1 (1968).

برگرفته شده است.

فصل آخر شامل سه بخش است که در ابتدا پایداری معادلات تابعی درجه چهار را برسی می کنیم سپس به بررسی پایداری معادلات تابعی درجه سه-چهار روی نگاشت های فرد و نگاشت های زوج می پردازیم. مرجع اصلی در این فصل

S. H. Lee, S. M. Im and I. S. Hwang, Quartic functional equations, J. Math. Anal. Appl. 307, 387-394 (2005).

فهرست مطالب

فصل ۱

پایداری متعامد معادلات تابعی جمعی

در این فصل ابتدا به بیان برخی مفاهیم لازم در فصل های آینده می پردازیم. سپس پایداری متعامد معادلات تابعی جمعی را بررسی خواهیم کرد.

۱.۱ مفاهیم و تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۱. A را یک جبر [۱] روی میدان $\mathbb{F}$ نامیم، هرگاه A یک فضای برداری [۲] روی $\mathbb{F}$ باشد و نگاشتی مانند $(a,b) \mapsto ab$ از $A \times A$ به A موجود باشد به قسمی که به ازای هر a,b,c در A و $a \in \mathbb{F}$ داشته باشیم

1) $a(bc) = (ab)c,$

2) $a(b+c) = ab + ac,$

3) $(a+b)c = ac + bc,$

4) $\alpha(ab) = (\alpha a)b.$

[۱] algebra
[۲] vector space

تعریف ۲.۱.۱. اگر یک نرم روی A موجود باشد که در نامساوی جبری $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ صدق کند، آن گاه A را جبر نرم دار[۳] نامند. اگر A جبر نرم دار و $(A, \|.\|)$ فضای باناخ باشد، آن گاه A را جبر باناخ[۴] نامیم.

تعریف ۳.۱.۱. یک برگشت روی جبر A نگاشت مزدوج خطی $a \mapsto a^*$ روی A است به طوری که برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $a^{**} = a$ و $(ab)^* = b^*a^*$. دوتایی $(A, *)$ یک جبر برگشتی یا یک $*$− جبر نامیده می شود.

تعریف ۴.۱.۱. عضو $x \in A$ را یکانی[۵] گوییم در صورتی که $xx^* = x^*x = 1$.

تعریف ۵.۱.۱. یک $*$−جبر نرم دار یک جبر نرم دار روی A همراه با یک برگشت $x \mapsto x^*$ است به طوری که برای هر $x \in A$ داشته باشیم $\|x^*\| = \|x\|$. علاوه بر این اگر A باناخ باشد A را یک باناخ $*$−جبر [۶] گوییم. اگر A عضو یکه داشته باشد به طوری که $\|1\| = 1$ آن گاه A یک باناخ $*$−جبر یکدار نامیده می شود.

تعریف ۶.۱.۱. C^* جبر، یک باناخ $*$− جبر است به طوری که برای هر $x \in A$ داریم

$$\|x^*x\| = \|x\|^2.$$

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید A یک جبر و M یک فضای خطی روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. M را یک A− مدول چپ[۷] گوییم، در صورتی که نگاشت $(a, m) \to am$ از $A \times M$ به M در شرایط زیر صدق کند:

[۳] normed algebra
[۴] Banach algebra
[۵] unital
[۶] Banach *-algebra
[۷] left A-module

۱. برای هر $a \in A$ ، نگاشت $m \to am$ روی M خطی باشد؛

۲. برای هر $m \in M$ ، نگاشت $a \to am$ روی A خطی باشد؛

۳. برای هر $a_1, a_2 \in A$ و $m \in M$ داشته باشیم $a_1(a_2m) = (a_1a_2)m$.

تعریف ۸.۱.۱. یک $A-$ مدول چپ را یکدار گوییم، در صورتی که دارای عضو یکه 1 باشد و برای هر $m \in M$ داشته باشیم $1m = m$.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید A یک جبر نرم دار و M یک فضای خطی نرم دار روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. اگر M یک $A-$ مدول چپ باشد و یک $K > 0$ وجود داشته باشد به طوری که در شرط زیر صدق کند

$$\|am\| \leq K\|a\|\|m\| \qquad (a \in A, m \in M)$$

آن گاه M را $A-$ مدول چپ نرم دار [۸] گوییم.

تعریف ۱۰.۱.۱. زیر مجموعه B از فضای برداری حقیقی X را مخروط [۹] گوییم در صورتی که $B + B \subseteq B$ و برای هر عدد حقیقی $\lambda > 0$ ، $\lambda B \subseteq B$.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی با بعد بزرگتر از ۲ و $\perp$ یک رابطه دوتایی با شرایط زیر باشد:

۱. برای هر $x \in X$ داریم $0 \perp x$ و $x \perp 0$ ؛

۲. اگر $x, y \in X - \{0\}$ و $x \perp y$ آن گاه x, y مستقل خطی اند؛

[۸] normed left A-module
[۹] cone

۳. اگر $x,y\in X$ و $x\perp y$ آن گاه $\alpha x\perp \beta y$ برای هر $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ؛

۴. اگر P یک زیر فضای دو بعدی از X باشد و $x\in P$ و $\lambda\in\mathbb{R}_+$ آن گاه $y_0\in P$ وجود دارد به طوری که $x\perp y_0$ و $x+y_0\perp \lambda x-y_0$.

دوتایی $(X,\perp)$ یک فضای متعامد [۱۰] نامیده می شود.

مثال ۱۲.۱.۱. تعامد بدیهی [۱۱] روی یک فضای برداری X به صورت زیر تعریف می شود:
برای هر $x\in X$ داریم $0\perp x$ و $x\perp 0$ و برای عضو های غیر صفر $x,y\in X$ داریم $x\perp y$ اگر و فقط اگر x,y مستقل خطی باشند.

مثال ۱۳.۱.۱. تعامد معمولی[۱۲] روی یک فضای ضرب داخلی $(X,\langle .,.\rangle)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$x\perp y$ اگر و فقط اگر $\langle x,y\rangle=0$ باشد.

مثال ۱۴.۱.۱. تعامد بیرخوف-جیمز[۱۳] روی یک فضای نرم $(X,\|.\|)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$x\perp y$ اگر و فقط اگر برای هر $\lambda\in\mathbb{R}$ داشته باشیم

$$\|x+\lambda y\|\geq\|x\|.$$

در ادامه تمام مدول ها $A-$ مدول چپ یکدار روی جبر باناخ یکدار A فرض می شوند.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنید $(X,\perp)$ یک فضای برداری متعامد باشد و $(Y,+)$ یک گروه آبلی باشد

[۱۰] orthogonality space
[۱۱] trivial orthogonality
[۱۲] ordinary orthogonality
[۱۳] Birkhoff-James orthogonality

نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را (متعامد) جمعی[۱۴] گوییم در صورتی که برای هر $x, y \in X$ با شرط $x \perp y$ در معادله تابعی کشی[۱۵] $f(x + y) = f(x) + f(y)$ صدق کند. علاوه بر این اگر X, Y مدول باشند و برای هر $a \in A$ و $x \in X$ داشته باشیم $f(ax) = af(x)$ آن گاه f را $A-$ خطی گوییم.

تعریف ۱۶.۱.۱. یک نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را (متعامد) درجه دوم[۱۶] گوییم اگر در معادله تابعی

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y) \quad (x, y \in X, \quad (x \perp y))$$

صدق کند. علاوه بر این اگر X, Y مدول باشند و برای هر $a \in A$ و $x \in X$ داشته باشیم $f(ax) = a^2 f(x)$ آنگاه f را $A-$ درجه دوم گوییم.

تعریف ۱۷.۱.۱. فضای متعامد $(X, \perp)$ را متقارن[۱۷] گوییم در صورتی که برای هر $x, y \in X$ رابطه $x \perp y$ نتیجه دهد $y \perp x$.

۲.۱ پایداری متعامد در مدول های باناخ

در طول این بخش A جبر باناخ حقیقی یکانی با عضو یکه ی 1 و گوی یکانی A_1 می باشد. $(X, \perp)$ نمایش $A-$ مدول چپ نرم دار متعامد حقیقی با ویژگی $1x = x$ و همچنین $(Y, \|.\|)$ ، $A-$ مدول چپ باناخ حقیقی می باشد.

گزاره ۱.۲.۱. اگر $\phi : X \longrightarrow Y$ برای هر $x, y \in X$ در رابطه زیر صدق کند

$$\phi(x + y) + \phi(x - y) = 2\phi(x) \quad (x \perp y) \tag{۱.۱}$$

و $\perp$ متقارن باشد در این صورت $\phi(x) - \phi(0)$ متعامد جمعی است.

[۱۴] additive
[۱۵] cauchy
[۱۶] quadratic
[۱۷] symmetric

اثبات. با قرار دادن $x=0$ در (۱.۱) داریم

$$-\phi(y) = \phi(-y) - 2\phi(0) \qquad (y \in X)$$

اگر $x \perp y$ آن گاه $y \perp x$. بنابراین بدست می آوریم

$$\phi(y-x) = -\phi(y+x) + 2\phi(y)$$

از این رو

$$\begin{aligned}\phi(x+y) &= -\phi(x-y) + 2\phi(x)\\ &= (\phi(y-x) - 2\phi(0)) + 2\phi(x)\\ &= (-\phi(y+x) + 2\phi(y)) - 2\phi(0) + 2\phi(x).\end{aligned}$$

بنابراین

$$\phi(x+y) - \phi(0) = (\phi(x) - \phi(0)) + (\phi(y) - \phi(0)).$$

در نتیجه $\phi(x) - \phi(0)$ متعامد جمعی است. □

گزاره ۲.۲.۱. اگر $\phi : X \to Y$ برای هر $x, y \in X$ با شرط $x \perp y$ در رابطه زیر

$$\phi(x+y) - \phi(x-y) = 2\phi(y) \tag{۲.۱}$$

صدق کند و $\perp$ متقارن باشد آن گاه ϕ متعامد جمعی است.

اثبات. با قرار دادن $x=0$ در ۲.۱)) به دست می آوریم

$$\phi(y) - \phi(-y) = 2\phi(y)$$

بنابراین برای هر $y \in X$ ، $\phi(-y) = -\phi(y)$.

اگر $x \perp y$ آن گاه بنا بر فرض داریم

$$\phi(x+y) - \phi(x-y) = 2\phi(y) \tag{۳.۱}$$

چون $\perp$ متقارن است $y \perp x$ و از طرفی داریم $\phi(-y) = -\phi(y)$ بنابراین

$$2\phi(x) = \phi(x+y) - \phi(y-x) = \phi(x+y) + \phi(x-y) \tag{۴.۱}$$

از روابط (۳.۱) و (۴.۱) نتیجه می شود که برای هر $x, y \in X$ با شرط $x \perp y$

$$\phi(x) + \phi(y) = \phi(x+y).$$

□

قضیه ۳.۲.۱. فرض کنید E_1 و E_2 دو فضای باناخ باشند. نگاشت $f : E_1 \to E_2$ را چنان فرض کنید که برای هر $x \in E_1$ تابع $f(tx)$ در t پیوسته و $\theta \geq 0$ باشد. حال اگر $0 < p < 1$ موجود باشد به طوری که

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p) \quad (x, y \in E_1) \tag{۵.۱}$$

آن گاه نگاشت خطی منحصر به فرد $T : E_1 \to E_2$ وجود دارد به طوری که

$$\|f(x) - T(x)\| \leq \frac{2\theta}{2-2^p}\|x\|^p \quad (x \in E_1). \tag{۶.۱}$$

اثبات. ابتدا ثابت می کنیم برای هر عدد صحیح n و $\theta \geq 0$ نامساوی زیر برقرار است

$$\|\frac{f(2^n x)}{2^n} - f(x)\| \leq \theta\|x\|^p \Sigma_{m=0}^{n-1} 2^{m(p-1)} \tag{۷.۱}$$

با استقرا روی n رابطه (۷.۱) را برای $n \in \mathbb{N}$ ثابت می کنیم. اگر در رابطه (۵.۱) قرار دهیم $x = y$

داریم

$$\|\frac{f(2x)}{2} - f(x)\| \leq \theta \|x\|^p. \qquad (۸.۱)$$

با فرض اینکه رابطه (۷.۱) برای حالت n برقرار است رابطه را برای حالت $n+1$ ثابت می کنیم.

با جایگذاری $2x$ به جای x در رابطه (۷.۱) نامساوی زیر به دست می آید

$$\|\frac{f(2^n 2x)}{2^n} - f(2x)\| \leq \theta \|2x\|^p \Sigma_{m=0}^{n-1} 2^{m(p-1)}.$$

با تقسیم رابطه فوق بر 2 داریم

$$\|\frac{f(2^{n+1}x)}{2^n} - \frac{1}{2} f(2x)\| \leq \theta \|x\|^p \Sigma_{m=1}^{n} 2^{m(p-1)}.$$

اکنون با استفاده از نامساوی مثلث نامساوی های زیر حاصل می شوند

$$\begin{aligned}
\|\frac{1}{2^{n+1}} f(2^{n+1}x) - f(x)\| &\leq \|\frac{1}{2^{n+1}} f(2^{n+1}x) - f(x) \\
&+ \frac{1}{2} f(2x) - f(x)\| \\
&\leq \theta \|x\|^p \Sigma_{m=1}^{n} 2^{m(p-1)} + \theta \|x\|^p \\
&= \theta \|x\|^p \Sigma_{m=0}^{n} 2^{m(p-1)}
\end{aligned}$$

رابطه (۷.۱) برای هر عدد صحیح n برقرار است. از طرفی چون $\Sigma_{m=0}^{\infty} 2^{m(p-1)}$ به ازای $p \in [0,1)$ به $\frac{2}{2-2^p}$ همگرا است ، بنابراین داریم

$$\|\frac{f(2^n 2x)}{2^n} - f(x)\| \leq \|x\|^p \frac{2\theta}{2-2^p} \qquad (x, y \in E_1) \qquad (۹.۱)$$

اکنون فرض کنیم $m > n > 0$ باشد در این صورت داریم

$$\begin{aligned}\|\frac{1}{2^m}f(2^m x) - \frac{1}{2^n}f(2^n x)\| &= \frac{1}{2^n}\|\frac{1}{2^{m-n}}f(2^m x) - f(2^n x)\| \\ &= \frac{1}{2^n}\|\frac{1}{2^{m-n}}f(2^{m-n}2^n x) - [f(2^n x)]\| \\ &< 2^{-n}\frac{2\theta}{2-2^p}\|2^n x\|^p \\ &= 2^{n(p-1)}\frac{2\theta}{2-2^p}\|x\|^p\end{aligned}$$

در نتیجه

$$lim_{n\to\infty}\|\frac{1}{2^m}f(2^m x) - \frac{1}{2^n}f(2^n x)\| = 0.$$

از طرفی چون E_2 فضای باناخ است بنابراین دنباله $\{\frac{f(2^n x)}{2^n}\}$ برای هر $x \in E_1$ همگراست. اکنون تابع T را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$T(x) := lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}f(2^n x)$$

با جایگذاری $2^n x$ و $2^n y$ به جای x و y در (۵.۱) داریم

$$\|f(2^n(x+y)) - f(2^n x) - f(2^n y)\| \leq \theta(\|2^n x\|^p + \|2^n y\|^p) = 2^{np}\theta(\|x\|^p + \|y\|^p) \tag{۱۰.۱}$$

از تقسیم (۱۰.۱) بر 2^n به دست می آوریم

$$\frac{1}{2^n}\|f(2^n(x+y)) - f(2^n x) - f(2^n y)\| \leq 2^{n(p-1)}\theta(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

با حدگیری از طرفین رابطه فوق، وقتی n به سمت بی نهایت میل می کند، داریم

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\|f(2^n(x+y)) - f(2^n x) - f(2^n y)\| \leq lim_{n\to\infty}2^{n(p-1)}\theta(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

بنابراین

$$\|lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}f(2^n(x+y)) - lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}f(2^n x) - lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}f(2^n y)\| = 0$$

در نتیجه

$$T(x+y) = T(x) + T(y).$$

بنابراین تابع T به ازای هر $x, y \in E_1$ یک تابع جمعی است. حال ثابت می کنیم برای هر عدد گویای $r = \frac{m}{n} \in Q$

$$T(rx) = rT(x)$$

می دانیم

$$T(x) = T(\frac{n}{n}x) = nT(\frac{x}{n})$$

بنابراین

$$T(\frac{x}{n}) = \frac{1}{n}T(x)$$

چون T یک تابع جمعی است بنابراین داریم

$$T(\frac{mx}{n}) = mT(\frac{x}{n}) = \frac{m}{n}T(x)$$

اکنون $\rho \in E_2^*, x_0 \in E_1$ را ثابت در نظر می گیریم و تابع $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را با ضابطه زیر تعریف می کنیم

$$\phi(t) = \rho\big[T(tx_o)\big] = lim_{n\to\infty}\frac{\rho[f(2^n tx)]}{2^n}$$

که $t \to f(tx)$ تابعی پیوسته و ρ عملگر کرانداری است، بنابراین $\frac{\rho[f(2^n tx)]}{2^n}$ پیوسته است، لذا $(\frac{\rho[f(2^n tx)]}{2^n})$ دنباله ای از توابع پیوسته است که $\phi(t)$ حد نقطه ای از دنباله این توابع است در

نتیجه اندازه پذیر است. حال نشان می دهیم که نگاشت ϕ خاصیت جمعی دارد

$$\begin{aligned}\phi(t+s) &= \rho(T(t+s)x_0)\\ &= \rho(T(tx_0)+T(sx_0))\\ &= \rho(T(tx_0)+\rho(T(sx_0))\\ &= \phi(t)+\phi(s)\end{aligned}$$

بنابراین ϕ جمعی است در نتیجه تابع جمعی ϕ پیوسته است. حال اگر $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع اندازه پذیر باشد و خاصیت جمعی داشته باشد آن گاه ϕ پیوسته است و این موضوع زمانی که $\mathbb{R}^n$ را با هر گروه آبلی فشرده و جدایی پذیر عوض کنیم برقرار است. در ادامه فرض کنید $a\in\mathbb{R}$ و $a=lim_{n\to\infty}r_n$ و $\{r_n\}$ دنباله ای از اعداد گویا باشد در این صورت داریم

$$\begin{aligned}\phi(at) &= \phi(lim_{n\to\infty}r_nt)\\ &= \phi(tlim_{n\to\infty}r_n)\\ &= lim_{n\to\infty}\phi(tr_n)\\ &= (lim_{n\to\infty}r_n)\phi(t)\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\phi(at)=a\phi(t)$$

بنابراین :

$$T(ax)=aT(x)\qquad(a\in\mathbb{R})$$