دانشگاه سیستان و بلوچستان

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (جبر)

عنوان:

سیستم‌های به‌طور ضعیف تصویری ریس

استاد راهنما:

دکتر اکبر گلچین

تحقیق و نگارش:

جعفر جهانتیغ

آبان ۱۳۹۱

تقدیم به:

پدرم که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم؛

به مادرم، دریای بی‌کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج و وجودش برایم همه مهر است؛

و به‌ویژه همسر عزیزم، که مهربانیش سایه‌سار زندگیم می‌باشد، او که اسوه صبر و تحمل است و مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود.

تقدیر و تشکر:

اعتراف می‌کنم که نه زبان شکر پروردگار و نه توان تشکر از بندگانش را دارم، اما بر حسب وظیفه از کلیه اساتید ارجمندم در طول سالهای بیاد ماندنی شاگردیشان تشکر می‌نمایم. از استاد ارجمند دکتر اکبر گلچین که در این دوران تحصیل همواره از محضرشان بهرمند گردیده‌ام، خاضعانه سپاسگزارم و از خداوند متعال عمری طولانی و پر برکت برای این بزرگوار خواستارم.

همچنین این مهم را وظیفه خود می‌دانم که از زحمات دکتر محمدزاده‌ثانی و دکتر لشکری‌پور و کلیه عزیزانی که در مراحل تکمیل پایان‌نامه مرا یاری کرده‌اند، تشکر کنم. سعادت و توفیق روز افزون این عزیزان را نیز از خداوند خواستارم.

جعفر جهانتیغ

چکیده

در این پایان‌نامه، تعمیمی از مفهوم به‌طور ضعیف تصویری، تحت عنوان $(S/I, S/J)$_تصویری را معرفی و سپس انتقال خاصیت $(S/I, S/J)$_تصویری از سیستم‌ها به حاصل‌ضرب، هم‌حاصل‌ضرب و درون‌بر سیستم‌ها و برعکس را بررسی خواهیم کرد. با استفاده از خواص فوق الذکر به توصیف تکواره‌هایی می‌پردازیم، که اجتماع مجزای یک گروه با یک نیم‌گروه صفر چپ یا اجتماع مجزای ایدآل‌های راست ساده می‌باشند. در انتها تکواره‌های QF ضعیف را تعریف می‌کنیم.

فهرست مندرجات

پیشگفتار

در طی چند دهه اخیر تحقیقات وسیعی در خصوص خواص سیستم‌ها روی تکواره‌ها و دسته‌بندی تکواره‌ها بر اساس این خواص از سیستم‌ها بعمل آمده است. مانند بسیاری از رسته‌ها، خواصی چون انژکتیوی و تصویری از اهمیت بسیاری برخوردارند. مقالات متعدد ارائه شده در این زمینه اهمیت آنها را مشخص می‌سازد. بررسی خواص تصویری سیستم‌ها روی تکواره‌ها و شناسایی این خاصیت توسط نویسندگانی چون کیلپ [۱]، کناور [۲]، اولتمانس [۳]، مورد بررسی قرار گرفته است. در این پایان‌نامه با پرداختن به خواص سیستم‌های $(S/I, S/J)$-تصویری به توصیف تکواره‌هایی که اجتماع مجزای یک گروه با یک نیم‌گروه صفر چپ، یا یک گروه با مجموعه‌ای از ایدآل‌های راست ساده می باشند، می‌پردازیم. در فصل اول به ارائه‌ی مفاهیم و تعاریفی که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌پردازیم. در فصل دوم به خواصی از سیستم‌هایی چون $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-تصویری، تصویری و به‌طور ضعیف تصویری که حالات خاصی از سیستم‌های $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-تصویری می باشند، می‌پردازیم. در فصل سوم ابتدا به بررسی خواصی از سیستم‌هایی چون $(S/I, S/J)$-تصویری پرداخته و سپس با استفاده از این خاصیت از سیستم‌ها به توصیف تکواره‌های QF ضعیف می‌پردازیم.

---

[۱] Kilp

[۲] Knauer

[۳] Oltmanns

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل ابتدا به تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند اشاره می‌کنیم.

۱ـ۱ گروه‌وار، نیم‌گروه و تکواره

تعریف ۱.۱.۱. یک مجموعه ناتهی چون A با یک عمل دوتایی

$$\begin{aligned} &A \times A \to A \\ &(a, a') \ \ \mapsto a \cdot a' \end{aligned}$$

را یک گروه‌وار می‌نامیم. عمل در گروه‌وار را به صورت ضرب نشان می‌دهیم و به‌جای $a \cdot a'$، می‌نویسیم aa'.
یک گروه‌وار با عمل شرکت‌پذیر را نیم‌گروه و یک نیم‌گروه یک‌دار را تکواره گوئیم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. عنصر $z \in S$

صفر چپ S نامیده می‌شود اگر برای هر $s \in S$، $zs = z$،

صفر راست S نامیده می‌شود اگر برای هر $s \in S$، $sz = z$ و

صفر S نامیده می‌شود اگر برای هر $s \in S$، $sz = z = zs$. اغلب آن را با $\circ$ نشان می‌دهیم.

نیم‌گروه S، نیم‌گروه صفر چپ نامیده می‌شود، اگر هر عنصر S، یک صفر چپ S باشد. به طور مشابه نیم‌گروه صفر راست نیز تعریف می‌شود. S را نیم‌گروه صفر گوئیم، هرگاه برای هر $s, t \in S$، $st = \circ$.

گزاره ۳.۱.۱. اگر نیم‌گروه S دارای صفر چپ و صفر راست باشد، آنگاه برهم منطبق‌اند. در نتیجه S حداکثر دارای یک صفر است.

برهان. اگر z, z' به ترتیب صفرهای چپ و راست S باشند، آنگاه

$$z' = z'z = z \Rightarrow z = z'. \ \square$$

تعریف ۴.۱.۱. عنصر s از نیم‌گروه S را وارون‌پذیر راست(چپ) نامیم، اگر عنصر s^{-1} در S موجود باشد بقسمی‌که $ss^{-1} = 1$ $(s^{-1}s = 1)$، در این صورت s^{-1} را وارون راست(چپ) s می‌نامیم. نیم‌گروه S، نیم‌گروه وارون نامیده می‌شود، اگر هر عضو آن دارای وارون منحصربه‌فرد باشد.

تعریف ۵.۱.۱. گروه عبارت است از تکواره‌ای مانند S به طوری که برای هر $s \in S$، عنصر منحصربه‌فرد s^{-1} در S موجود باشد بقسمی‌که $s^{-1}s = ss^{-1} = 1$، یعنی هر عضو S وارون داشته باشد.

اگر B, A دو زیر مجموعه از نیم‌گروه S باشند، آنگاه حاصل‌ضرب AB را به صورت $\{ab : a \in A, b \in b\}$ تعریف می‌کنیم و قرار می‌دهیم $B^2 = BB$.

مثال ۶.۱.۱.

(۱) $(\mathbb{Z}, -)$ که $(z_1, z_2) \mapsto z_1 - z_2$ یک گروه‌وار است.

(۲) $(\mathbb{N}, +)$ یک نیم‌گروه و $(\mathbb{N}, .)$ یک تکواره است.

(۳) اگر $(\mathbb{R}, +, .)$ یک حلقه شرکت‌پذیر باشد، آنگاه $(\mathbb{R}, +)$ یک گروه و $(\mathbb{R}, .)$ یک نیم‌گروه است.

تعریف ۷.۱.۱. عنصر c از تکواره S را حذف‌پذیر راست(چپ) نامیم، اگر $rc = tc$ $(cr = ct)$ برای $r, t \in S$، نتیجه دهد $r = t$.

تکواره S را حذف‌پذیر راست(چپ) نامیم، اگر همه عناصر آن حذف‌پذیر راست(چپ) باشند.

تعریف ۸.۱.۱. عنصر e از تکواره S را خودتوان نامیم، اگر $e = e^2$. مجموعه همه خود توان‌های S را با $E(S)$ نمایش می‌دهیم. اگر $E(S) = S$، آنگاه S را تکواره خودتوان یا باند می‌نامیم.

تعریف ۹.۱.۱. عنصر s از نیم‌گروه S را منظم نامیم، اگر $x \in S$ موجود باشد به‌طوری‌که $sxs = s$. اگر همه عناصر S منظم باشند، آنگاه S نیم‌گروه منظم است.

۱ — ۲ همریختی نیم‌گروه‌ها و زیرنیم‌گروه

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید S و T نیم‌گروه باشند. تابع $f : S \longrightarrow T$ یک همریختی است در صورتی‌که به ازای هر $a, b \in S$، $f(ab) = f(a)f(b)$.

— اگر f همریختی یک به یک باشد، f را تکریختی گویند.

— اگر f پوشا باشد، f برورریختی نامیده می‌شود. چنانچه f یک به یک و پوشا باشد، f یکریختی نام دارد و در این حالت گویند S و T یکریخت هستند.

— همریختی $f : S \longrightarrow S$ یک درون‌ریختی S و یکریختی $f : S \longrightarrow S$ یک خودریختی S نامیده می‌شود.

— اگر $f : S \longrightarrow T$ و $g : T \longrightarrow K$ همریختی‌هایی از نیم‌گروه‌ها باشند، به آسانی دیده می‌شود که $gf : S \longrightarrow K$ نیز یک همریختی است.

به همین نحو ترکیب تکریختی‌ها یک تکریختی است و برای برورریختی‌ها، یکریختی‌ها و خودریختی‌ها چنین است.

تعریف ۲.۲.۱. اگر S و T تکواره، به ترتیب با عناصر همانی ۱_S و ۱_T باشند. در این‌صورت $f : S \longrightarrow T$ را همریختی تکواره‌ها گوئیم، هرگاه به ازای هر $a, b \in S$، $f(ab) = f(a)f(b)$ و $f(۱_S) = ۱_T$.

تعریف ۳.۲.۱. زیرمجموعه ناتهی T از نیم‌گروه S را یک زیرنیم‌گروه S گوئیم، هرگاه $T^۲ \subseteq T$، به عبارت دیگر T زیرنیم‌گروه S است، هرگاه تحت عمل بسته باشد.

— اگر S تکواره‌ای با عنصر همانی ۱ و همچنین $۱ \in T$، آنگاه زیرنیم‌گروه T را یک زیرتکواره S نامیم.

— اگر S گروه باشد، آنگاه زیرتکواره T از S را زیرگروه S گوئیم، هرگاه به ازای هر $x \in T$، داشته باشیم $x^{-۱} \in T$.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید A یک زیرمجموعه غیرتهی از نیم‌گروه S باشد. کوچکترین زیرنیم‌گروه S شامل A عبارت است از $<A>=\bigcup_{n=1}^{\infty} A^n$.

— اگر $S=<A>$، آنگاه A مجموعه عناصر مولد S نامیده می‌شود.

— اگر $A=\{a\}$ و $S=<A>=<a>$، آنگاه S نیم‌گروه تک‌مولدی یا دوری نامیده می‌شود. در این صورت a عنصر مولد S است.

۱—۳ ایدآل، همنهشتی و گروه‌های خارج‌قسمتی

تعریف ۱.۳.۱. زیرمجموعه ناتهی $I\subseteq S$

— ایدآل چپ نامیده می‌شود، هرگاه $SI\subseteq I$؛

— ایدآل راست نامیده می‌شود، هرگاه $IS\subseteq I$ و

ایدآل یا ایدآل دوطرفه نامیده می‌شود، هرگاه $IS\subseteq I$ و $SI\subseteq I$.

مثال ۲.۳.۱.

(۱) هر نیم‌گروه S یک ایدآل خود می‌باشد.

(۲) در نیم‌گروه صفردار S، مجموعه تک عضوی $\{0\}$ یک ایدآل S می‌باشد.

(۳) فرض کنید X یک زیرمجموعه ناتهی از نیم‌گروه S باشد. آنگاه

$$S^1X=\left\{sx \mid s\in S^1,\ x\in X\right\}$$

کوچکترین ایدآل چپ از S شامل X است.

تعریف ۳.۳.۱. نیم‌گروه S را ساده(راست) گوئیم، اگر S ایدآل(راست) سره نداشته باشد.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. $aS^1 = aS \cup \{a\}$ کوچکترین ایدآل راست S شامل $a \in S$ است، که آن را ایدآل راست اصلی تولید شده توسط a گوئیم.

به طور مشابه $S^1a = Sa\cup\{a\}$ ایدآل چپ اصلی تولید شده توسط a است و $S^1aS^1 = Sa\cup aS\cup SaS\cup\{a\}$ ایدآل اصلی تولید شده توسط a است.

مثال ۵.۳.۱. فرض کنید $S = \{0, 1, s\}$ نیم‌گروهی با شرط $s^2 = 0$ باشد، آنگاه $K = \{0, s\}$ یک ایدآل راست(چپ) اصلی تولید شده توسط s است، یعنی $K = sS$ $(K = Ss)$.

تذکر ۶.۳.۱. هر ایدآل S یک زیرنیم‌گروه S است، اما عکس آن برقرار نیست. فرض کنید $S = \{0, 1, s\}$ همان نیم‌گروه مثال قبل باشد. آنگاه $T = \{0, 1\}$ زیرنیم‌گروه S می‌باشد، اما ایدآل S نیست، زیرا $TS \not\subseteq T$.

تعریف ۷.۳.۱. تکواره S را برگشت‌پذیر چپ(راست) نامیم، اگر هر دو ایدآل راست(چپ) اصلی از S اشتراک غیر تهی داشته باشند، یعنی به ازای هر $s, t \in S$، $sS \cap tS \neq \phi$ $(Ss \cap St \neq \phi)$.
این معادل با شرط زیر است:
برای هر $s, t \in S$ وجود دارد $u, v \in S$ بقسمی که $su = tv$ $(us = vt)$.

تعریف ۸.۳.۱. فرض کنید S نیم‌گروه باشد. هر زیرمجموعه ρ از حاصل‌ضرب دکارتی $S \times S$ را یک رابطه دوتایی روی S می‌نامیم. برای $x, y \in S$، $(x, y) \in \rho$ را به‌صورت $x\rho y$ نیز نمایش می‌دهند. مجموعه همه روابط دوتایی روی S را با $B(S)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنید S یک نیم‌گروه و ρ رابطه هم‌ارزی روی S باشد. برای $a \in S$، $\rho(a) = \{b \in S \mid (a,b) \in \rho\}$ که با $[a]_\rho$ یا فقط $[a]$ نیز نمایش می‌دهیم، را ρـرده a یا رده a گوئیم.

تعریف ۱۰.۳.۱. مجموعه $S/\rho = \{[a]_\rho : a \in S\}$ تحت عمل $[s]_\rho[t]_\rho = [st]_\rho$ یک نیم‌گروه است که آن را نیم‌گروه خارج‌قسمتی نامیم. اگر S تکواره باشد، آنگاه S/ρ تکواره‌ای با عنصر همانی $[1]_\rho$ خواهد بود.

تعریف ۱۱.۳.۱. فرض کنید S نیم‌گروه و ρ رابطه هم‌ارزی روی S باشد. نگاشت

$$\begin{aligned} \pi_\rho : S &\to S/\rho \\ a &\mapsto [a]_\rho \end{aligned}$$

را پوشای کانونی نسبت به ρ می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۳.۱. فرض کنید $\rho \subseteq S \times S$ یک رابطه هم‌ارزی روی S باشد. در این‌صورت رابطه ρ همنهشتی چپ روی S نامیده می‌شود، هرگاه

$$\forall s,t,u \in S: \qquad s\rho t \quad \Rightarrow \quad (us)\rho(ut).$$

— همنهشتی راست روی S نامیده می‌شود، هرگاه

$$\forall s,t,u \in S: \qquad s\rho t \quad \Rightarrow \quad (su)\rho(tu).$$

— همنهشتی دوطرفه روی S نامیده می‌شود، هرگاه

$$\forall s,t,u \in S: \qquad s\rho t \quad \Rightarrow \quad (us)\rho(ut) \ \& \ (su)\rho(tu).$$

تعریف ۱۳.۳.۱. فرض کنید S نیم‌گروه و $I \subseteq S$ ایدآل سره S باشد. بنابراین رابطه

$$\rho_I = (I \times I) \cup \Delta_S = \{(a,b) \mid a,b \in I \vee a = b\}$$

را رابطه هم‌ارزی ریس از I نامیم.

— رده‌های هم‌ارزی ρ_I عبارتند از رده I و مجموعه‌های تک عضوی $\{s\}$ برای هر $s \in S \setminus I$،
از این رو تعداد رده‌های هم‌ارزی ρ_I برابر $|S \setminus I| + 1$ است.

تعریف ۱۴.۳.۱. اگر S نیم‌گروه و I ایدآل دوطرفه از S باشد، آنگاه

$$S/\rho_I = \{I\} \cup \{\{x\} : x \in S \setminus I\}$$

را نیم‌گروه خارج‌قسمتی ریس S توسط I نامیم و با S/I نشان می‌دهیم.

۱—۴ رسته‌ها، حاصل‌ضرب، هم‌حاصل‌ضرب و شی آزاد

رسته‌ها برای بدست آوردن یک زبان رایج برای بیان رفتار رده‌هایی از مجموعه‌ها، تکواره‌ها و ... معرفی شده‌اند.

تعریف ۱.۴.۱. رسته $\mathbf{C}$ به صورت زیر ارائه می‌شود:

(۱) رده $ob\,\mathbf{C}$ که اعضایش اشیاء $\mathbf{C}$ نامیده می‌شوند؛

(۲) برای زوج مرتب (A, B) از اشیاء $\mathbf{C}$، $Mor_{\mathbf{C}}(A, B)$ مجموعه ریخت‌های از A به B است.

(۳) برای هر سه‌تایی (A, B, C) از اشیاء $\mathbf{C}$، ترکیب ریخت‌ها نگاشت

$$\begin{aligned} Mor_C(A,B) \times Mor_C(B,C) \quad &\longrightarrow \quad Mor_C(A,C) \\ (f,g) \quad &\longmapsto \quad g \circ f \end{aligned}$$

است، بقسمی‌که

(الف) این ترکیب شرکت‌پذیر است، یعنی برای اشیاء A،B،C وD در $\mathbf{C}$ و $f \in Mor_{\mathbf{C}}(A, B)$، $g \in Mor_{\mathbf{C}}(B, C)$ و $h \in Mor_{\mathbf{C}}(C, D)$ داریم

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

(ب) همانی‌ها وجود دارد، یعنی برای هر شی $A \in ob\,\mathbf{C}$، ریخت همانی $id_A \in Mor_{\mathbf{C}}(A,A)$ از A موجود است به‌طوری‌که برای هر $f \in Mor_{\mathbf{C}}(A,B)$ و $B \in ob\,\mathbf{C}$ داریم

$$f \circ id_A = id_B \circ f = f.$$

اغلب به‌جای $g \circ f$ می‌نویسیم gf و ترکیب ریخت‌ها را نیز حاصل‌ضرب ریخت‌ها می‌نامیم.

مثال ۲.۴.۱. رسته مجموعه‌ها که با $\mathbf{Set}$ نیز نمایش داده می‌شود، یکی از رسته‌هایی است که اشیاء آن مجموعه‌ها، ریخت‌ها در آن توابع بین مجموعه‌ها و ترکیب ریخت‌ها، ترکیب معمولی توابع و ریخت همانی همان توابع همانی روی مجموعه‌ها است.

تعریف ۳.۴.۱. برای $A,B,C,D \in ob\,\mathbf{C}$، ریخت‌های $f \in Mor(A,B)$، $g \in Mor(B,D)$، $h \in Mor(A,C)$ و $k \in Mor(C,D)$ می‌تواند در نمودار زیر در نظر گرفته شود:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "k"'] & D \end{tikzcd}$$

این نمودار مربعی، تعویض‌پذیر است، هرگاه $gf = kf$.

تعریف ۴.۴.۱. رسته $\mathbf{D}$ را زیررسته $\mathbf{C}$ نامیم، اگر

(۱) $ob\,\mathbf{D} \subseteq \mathbf{ob}\,\mathbf{C}$،

(۲) برای هر $A,B \in ob\,\mathbf{D}$، $Mor_{\mathbf{D}}(A,B) \subseteq Mor_{\mathbf{C}}(A,B)$،

(۳) ترکیب ریخت‌ها در $\mathbf{D}$، تحدید ترکیب ریخت‌ها در $\mathbf{C}$ باشد.

اگر برای هر A,B متعلق به زیررسته $\mathbf{D}$ از رسته $\mathbf{C}$، $Mor_{\mathbf{D}}(A,B) = Mor_{\mathbf{C}}(A,B)$، آنگاه $\mathbf{D}$ را زیررسته کامل $\mathbf{C}$ نامیم.

تعریف ۵.۴.۱. رسته $\mathbf{C}$، ملموس گفته می‌شود، اگر همه اشیاء در آن، مجموعه‌ها با یک ساختار اضافی و ریخت‌ها از A به B، تابع‌های حافظ ساختار از A به B، ترکیب ریخت‌ها ترکیب توابع و ریخت همانی تابع همانی باشد.

تعریف ۶.۴.۱. رسته $\mathbf{C}$ را رسته کوچک نامیم، اگر همه اشیاء آن تشکیل یک مجموعه دهند.

هر تکواره یک رسته کوچک است. در این رسته شی را خود تکواره، ریخت‌ها را عناصر تکواره و ترکیب ریخت‌ها را همان عمل تکواره در نظر می‌گیریم.

تذکر ۷.۴.۱. ریخت $f : A \longrightarrow B$ را در رسته $\mathbf{C}$ در نظر بگیرید. آنگاه

(۱) f را تکریختی نامیم، اگر حذف‌پذیر چپ باشد، یعنی برای هر $k, h \in Mor(C, A)$

$$fk = fh \quad \Rightarrow \quad k = h.$$

دراین‌صورت A را زیرشی B نامیم.

(۲) f را برور‌یختی نامیم، اگر حذف‌پذیر راست باشد، یعنی برای هر $k, h \in Mor(B, D)$

$$kf = hf \quad \Rightarrow \quad k = h.$$

(۳) f را هم‌درون‌بری نامیم، اگر f وارون‌پذیر چپ باشد، یعنی $g \in Mor(B, A)$ به‌طوری‌که $gf = id_A$، و دراین‌صورت A را هم‌درون‌بر B نامیم.

(۴) f را درون‌بری نامیم، اگر f وارون‌پذیر راست باشد، یعنی $g \in Mor(B, A)$ به‌طوری‌که $fg = id_B$، و دراین‌صورت B را درون‌بر A نامیم.

(۵) f را دوریختی نامیم، اگر تکریختی و برور‌یختی باشد.

(۶) f را یکریختی نامیم، اگر درون‌بری و هم‌درون‌بری باشد. در این حالت می‌گوئیم B, A یکریخت می‌باشند.

گزاره ۸.۴.۱([۴]). اگر $\mathbf{C}$ یک رسته ملموس باشد، در این صورت نتایج زیر برای $f : A \longrightarrow B$ برقرار است.

(۱) هم‌درون‌بری $\Leftarrow$ یک به یک بودن $\Leftarrow$ تکریختی بودن،

(۲) درون‌بری $\Leftarrow$ پوشا بودن $\Leftarrow$ برروریختی بودن.

گزاره ۹.۴.۱([۴]). فرض کنید $e \in S$ یک عنصر خودتوان باشد. در این‌صورت ایدآل راست اصلی eS یک درون‌بر از S_S است.

تعریف ۱۰.۴.۱. فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ یک ریخت در رسته $\mathbf{C}$ باشد. بنابراین f را یک ریخت

— صفر چپ نامیم، اگر برای هر $C \in \mathbf{C}$ و $g, h \in Mor(C, A)$، $fg = fh$ باشد،

— صفر راست نامیم، اگر برای هر $D \in \mathbf{C}$ و $g, h \in Mor(B, D)$، $gf = hf$ باشد،

— صفر نامیم، اگر ریخت صفر چپ و ریخت صفر راست باشد.

تعریف ۱۱.۴.۱. فرض کنید $\mathbf{C}$ یک رسته و I یک مجموعه اندیس‌گذار و $(X_i)_{i\in I}$ خانواده‌ای از اشیاء رسته $\mathbf{C}$ باشد. جفت $(P, (p_i)_{i\in I})$ را یک حاصل‌ضرب از خانواده $(X_i)_{i\in I}$ در $\mathbf{C}$ نامیم، اگر

(۱) $P \in \mathbf{C}$ و برای هر $i \in I$، $p_i \in Mor_{\mathbf{C}}(P, X_i)$،

(۲) $(P, (p_i)_{i\in I})$ در خاصیت جهانی زیر صادق باشد:

برای هر $Q \in \mathbf{C}$ و برای هر خانواده $(q_i \in Mor_{\mathbf{C}}(Q, X_i))_{i\in I}$، فقط یک $q \in Mor_{\mathbf{C}}(Q, P)$ وجود داشته باشد، بقسمی‌که برای هر $i \in I$، $p_i q = q_i$، یعنی نمودار زیر برای هر $i \in I$ در $\mathbf{C}$ تعویض‌پذیر باشد:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_i"] & X_i \\ Q \arrow[u, "q"] \arrow[ur, "q_i"'] & \end{tikzcd}$$

حاصل‌ضرب خانواده $(X_i)_{i\in I}$ را با $\prod_{i\in I} X_i$ نشان می‌دهیم. p_i را تصویری i_ام و ریخت q را حاصل‌ضرب القایی توسط $(q_i)_{i\in I}$ نسبت به $\prod X_i$ می‌نامیم و با $\langle (q_i)_{i\in I}\rangle$ نمایش می‌دهیم.

رسته $\mathbf{C}$ را ضرب‌کامل نامیم، اگر برای هر خانواده $(X_i)_{i\in I}$ از اشیاء در $\mathbf{C}$، در رسته $\mathbf{C}$ حاصل‌ضرب وجود داشته باشد.

گزاره ۱۲.۴.۱ ([۴]). فرض کنید $\mathbf{C}$ رسته باشد. حاصل‌ضرب‌های یک خانواده از اشیا ء $\mathbf{C}$، در صورت وجود یکریخت هستند.

تعریف ۱۳.۴.۱. فرض کنید $(P_i : Y \longrightarrow X_i)_{i\in I}$ خانواده‌ای از ریخت‌ها در $\mathbf{C}$ باشد. $(Y, (p_i)_{i\in I})$ را خانواده تکریختی نامیم، اگر برای هر $A \in \mathbf{C}$ و $f, g \in Mor_{\mathbf{C}}(A, Y)$، بقسمی‌که برای هر $i \in I$ ، $p_i f = p_i g$ نتیجه دهد $f = g$.

گزاره ۱۴.۴.۱ ([۴]). فرض کنید $(P, (p_i)_{i\in I})$ یک حاصل‌ضرب در رسته $\mathbf{C}$ باشد. بنابراین $(p_i)_{i\in I}$ یک خانواده تکریختی است.

تعریف ۱.۴.۱۵. فرض کنید $\mathbf{C}$ یک رسته، I مجموعه اندیس‌گذار و $(X_i)_{i\in I}$ خانواده‌ای از اشیاء $\mathbf{C}$ باشد. جفت $((u_i)_{i\in I}, \mathbf{C})$ را هم‌حاصل‌ضرب خانواده $(X_i)_{i\in I}$ نامیم، اگر

(۱) $C \in \mathbf{C}$ و برای هر $i \in I$، $u_i \in (X_i, \mathbf{C})$ باشد،

(۲) $((u_i)_{i\in I}, \mathbf{C})$ در خاصیت جهانی زیر صادق باشد:

برای هر $k \in \mathbf{C}$ و برای هر خانواده $k_i \in Mor_{\mathbf{C}}(X_i, k)$ فقط یک $k \in Mor_{\mathbf{C}}(C, k)$ وجود داشته باشد، بقسمی‌که برای هر $i \in I$، $ku_i = k_i$، یعنی نمودار زیر برای هر $i \in I$ در $\mathbf{C}$ تعویض‌پذیر باشد:

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "k_i"] \arrow[d, "u_i"'] & K \\ C \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

هم‌حاصل‌ضرب خانواده $(X_i)_{i\in I}$ را با $\coprod X_i$ نشان می‌دهیم. u_i را انژکسیون i_ام و ریخت k را هم‌حاصل‌ضرب القایی توسط $(k_i)_{i\in I}$ نسبت به $\coprod X_i$ می‌نامیم و با $[(k_i)_{i\in I}]$ نمایش می‌دهیم. رسته $\mathbf{C}$ را هم‌ضرب کامل نامیم، اگر برای هر خانواده $(X_i)_{i\in I}$ از اشیاء $\mathbf{C}$، هم‌حاصل‌ضرب در رسته $\mathbf{C}$ وجود داشته باشد.

گزاره ۱.۴.۱۶ ([۴]). فرض کنید $\mathbf{C}$ رسته باشد، هم‌حاصل‌ضرب‌های یک خانواده از اشیاء $\mathbf{C}$، در صورت وجود یکریخت هستند.

تعریف ۱.۴.۱۷. فرض کنید $(u_i : X_i \longrightarrow Y)_{i\in I}$ خانواده‌ای از ریخت‌ها در $\mathbf{C}$ باشد. $((u_i)_{i\in I}, Y)$ را خانواده بروریختی نامیم، اگر برای هر $B \in \mathbf{C}$ و $f, g \in Mor_{\mathbf{C}}(Y, B)$ بقسمی‌که برای هر $i \in I$، $fu_i = gu_i$ نتیجه دهد $f = g$.

گزاره ۱.۴.۱۸ ([۴]). فرض کنید $((u_i)_{i\in I}, \mathbf{C})$ یک هم‌حاصل‌ضرب در رسته $\mathbf{C}$ باشد. بنابراین $(u_i)_{i\in I}$ یک خانواده بروریختی است.