دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم ریاضی و آمار

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض ، گرایش هندسه

عنوان

الگوهای انشعاب ناخودگردان برای معادلات دیفرانسیل یک بعدی

استاد راهنما

دکتر امید ربیعی مطلق

استاد مشاور

دکتر حاجی محمد محمدی نژاد

نگارنده

طاهره محمدی

شهریور ۱۳۹۱

چکیده

در این پایان‌نامه، ما یک نگرش جدید به انشعاب‌های ناخودگردان معادلات دیفرانسیل یک بعدی را مطرح می‌کنیم. ابزار اصلی ما در این‌جا براساس مفهوم خاصی از جاذبه و دافعه برای سیستم‌های ناخودگردان است. تحت کاربرد این مسئله انشعاب‌های مدل جمعیت زیستی را بررسی می‌کنیم.

واژگان کلیدی: معادله دیفرانسیل ناخودگردان، معادله دیفرانسیل خطی، جواب جاذب، جاذب، جواب دافع، دافع، تئوری انشعاب ناخودگردان

تعداد صفحات پایان نامه: ۵۹

تقدیم به پدر عزیزم

که تکیه گاه و پناهگاهم از تمام دردهای زمانه است، کسی که سپید موی گشت تا من سپید روی گردم.

تقدیم به مادر عزیزم

که گوهر بی همتا در دریای بی دریغ فداکاریست، کسی که دامان پر مهرش پناهگاه دوران کودکیم و قلب پاکش منبع دعای خیر در زندگیم است.

تقدیم به همسرم

که مشوق و پشتیبان من در زندگی است...

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس و ستایش خدای را آن نخستین بی آغاز و آن واپسین بی انجام.

با تقدیر و سپاس از استاد فرهیخته جناب آقای دکتر امید ربیعی مطلق که در تمام مراحل این پایان نامه از دانش و تجربه ایشان بهره برده ام. از خداوند متعال برای ایشان طول عمر و توفیق روز افزون مسألت دارم. همچنین از استاد محترم جناب آقای دکتر حاجی محمد محمدی نژاد که مسئولیت مشاوره این پایان نامه را بر عهده داشتند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

طاهره محمدی
شهریور ۱۳۹۱

فهرست مطالب

پیشگفتار

هنگامی که یک انشعاب رخ می‌دهد پایداری ساختاری به‌هم می‌ریزد چرا که تعداد نقاط تکین در دو سیستم به طور توپولوژیک هم ارز، برابر هستند. سیستم $\dot{x} = f(x, \mu)$ در نقاط تکین هذلولوی ساختار پایدار دارد. بنابراین انشعاب تنها در نقاط تکین غیر هذلولوی رخ می‌دهد. در موارد زیادی، مفهوم دستگاه دینامیکی به اندازه‌ی کافی برای مدل‌سازی پدیده‌های واقعی جهان جامع نیست، از این رو دلایل خوبی برای این ادعا که قوانین اساسی جهان ما به زمان وابسته‌اند وجود دارد. برای مثال در بررسی یک فرایند زیستی در نظر گرفتن روند تکامل طبیعی به عنوان یک اختلال تصادفی یا به صورت یک فرایند کنترل شده اجتناب ناپذیر است. از این رو ابزارهای مناسب برای بررسی این قبیل مسایل دستگاه‌های دینامیکی وابسته به زمان (ناخودگردان) می‌باشند. دلیل دیگر برای در نظر گرفتن دستگاه‌های ناخودگردان این است که مطالعه‌ی وضعیت‌های پایدار که در طول زمان تغییر وضعیت می‌دهند منجر به مطالعه اختلالات وابسته به زمان یک دستگاه دینامیکی می‌گردد.

مسئله انشعاب‌های موضعی یک خانواده پارامتری از معادلات دیفرانسیل وابسته به زمان از مسائل مورد توجه ریاضی دانان در سال‌های اخیر بوده است. با این حال هر چند که نظریه انشعاب‌های موضعی معادلات خودگردان، با معرفی دقیق انشعاب‌هایی نظیر انشعاب بحرانی متقاطع و یا انشعاب چنگال از ساختار ریاضی محکمی برخوردار است ولی هنوز تعریف ریاضی مشخصی برای انشعاب‌های موضعی معادلات ناخودگردان ارائه نشده است. اخیراً لانگا و همکاران و هم‌چنین راسمن تلاش‌هایی برای قالب بندی و معرفی الگوهای مرتبط با انشعاب‌های موضعی معادلات ناخودگردان انجام داده‌اند. در این پایان‌نامه دو نگرش مختلف از انشعاب‌های ناخودگردان برای معادلات دیفرانسیل عادی که پایه‌ی مفاهیم مهمی هم‌چون جاذبه و دافعه ناخودگردان هستند بررسی می‌شود. این بررسی‌ها به نوبه خود منجر به ارائه تعریف‌های کلی‌تری از انشعابات مهمی هم‌چون انشعاب چنگال و متقاطع بحرانی می‌شوند. در فصل اول این پایان نامه به معرفی و توضیح یک سری مقدمات و مفاهیم اولیه که در طول پایان نامه برای ما کاربرد خواهند داشت پرداخته و در فصل دوم به معرفی انشعاب‌های ناخودگردان و اثبات قضایای مربوط به آن‌ها و در نهایت در فصل سوم به ارائه و بررسی مثالی از یک مدل شبه لجستیک برای یک جمعیت زیستی که دارای انشعاب موضعی ناخودگردان از نوع چنگال و بحرانی متقاطع است پرداخته‌ایم.

در انتها لازم به ذکر است که منبع اصلی این پایان نامه مرجع شماره [۱۰] می‌باشد.

فصل ۱
تعاریف و مقدمات

۱.۱ مقدمه

دستگاه‌های دینامیکی ابزارهای ریاضی هستند که برای مدل‌سازی پدیده‌هایی که در طول زمان تغییر حالت می‌دهند استفاده می‌شوند. از زمانی که این مدل‌ها در کاربردهایی چون فیزیک، زیست شناسی و اقتصاد ظاهر شدند، تئوری دستگاه‌های دینامیکی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار گشت. دستگاه‌های دینامیکی اغلب به پارامترهای معینی بستگی دارند. تئوری انشعاب یک موضوع اصلی برای توصیف تغییرات کیفی دستگاه‌های دینامیکی به وسیله این پارامترها است.

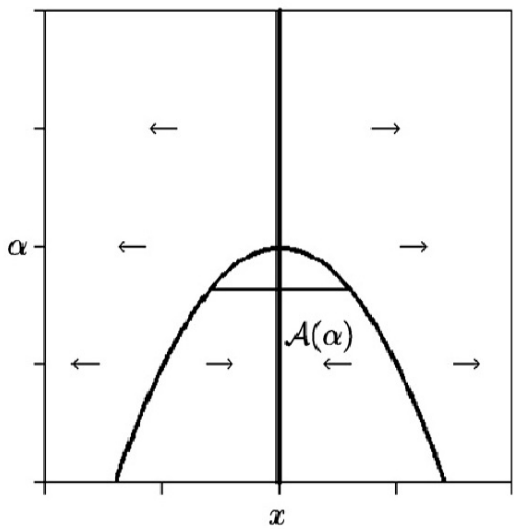
در موارد زیادی، مفهوم دستگاه دینامیکی به اندازه‌ی کافی برای مدل‌سازی پدیده‌های واقعی جهان جامع نیست، از این رو دلایل خوبی برای این ادعا که قوانین اساسی جهان ما به زمان وابسته‌اند وجود دارد. برای مثال در بررسی یک فرایند زیستی در نظر گرفتن روند تکامل طبیعی به عنوان یک اختلال تصادفی یا به صورت یک فرایند کنترل شده اجتناب ناپذیر است. از این رو ابزارهای مناسب برای بررسی این قبیل مسایل دستگاه‌های دینامیکی وابسته به زمان (ناخودگردان) می‌باشند. دلیل دیگر برای در نظر گرفتن دستگاه‌های ناخودگردان این است که مطالعه‌ی وضعیت‌های پایدار که در طول زمان تغییر وضعیت می‌دهند منجر به مطالعه اختلالات وابسته به زمان یک دستگاه دینامیکی می‌گردد.

اگر چه تئوری انشعاب معادلات دیفرانسیل عادی T - تناوبی ناخودگردان موضوع مهمی در تحقیقات دهه‌های اخیر بوده است، با این حال هنوز مفهوم یک انشعاب ناخودگردان به صورت

دقیق ریاضی بیان نشده است. در بیست سال اخیر تحقیقات مهمی در زمینه شبه تناوبی‌ها و شدت وابستگی به زمان تناوب صورت گرفته است.

در این پایان‌نامه دو نگرش مختلف از انشعاب‌های ناخودگردان برای معادلات دیفرانسیل عادی که پایه‌ی مفاهیم مهمی هم‌چون جاذبه و دافعه ناخودگردان هستند بررسی می‌شود. این بررسی‌ها به نوبه خود منجر به ارائه تعریف‌های کلی‌تری از انشعابات مهمی هم‌چون انشعاب چنگال و متقاطع بحرانی می‌شوند. توجه کنید که در این پایان نامه مفروضات خاصی در نظر گرفته نمی‌شود.

با توجه به اینکه اصل انشعاب ناخودگردان که از تئوری انشعاب خودگردان حاصل می‌شود پایه ای برای مشاهدات پدیدارشناسی قرار گرفته است، نگاهی به سناریوی انشعاب خودگردان قابل توجه خواهد بود. شکل زیر که نشان دهنده‌ی انشعاب چنگال می باشد را در نظر بگیرید.



شکل ۱.۱: انشعاب چنگال خودگردان

فرض کنید α یک پارامتر حقیقی باشد. معادله دیفرانسیل زیر که نمونه اولیه انشعاب چنگال (مربوط به شکل بالا) می‌باشد را در نظر بگیرید.

$$\dot{x} = x(\alpha + x^{۲})$$

با برابر صفر قرار دادن این معادله دیفرانسیل نقاط تکین (تعادل) آن به‌دست می‌آید یعنی $\dot{x} = x(\alpha + x^{۲}) = ۰$ نتیجه می‌دهد که $x = ۰$ یا $\alpha + x^{۲} = ۰$.

حال با توجه به مقادیر پارامتر α نتایج زیر حاصل می‌شود.

الف) برای $\alpha > \circ$ فقط یک نقطه تعادل وجود دارد که $x = \circ$ بوده و دافع است.

ب) برای $\alpha = \circ$ مبدأ یک نقطه تکین غیرهذلولوی است.

ج) برای $\alpha < \circ$ سه تعادل $x = \circ$ و $x = \pm\sqrt{-\alpha}$ وجود دارند که تعادل $x = \circ$ جاذب بوده و دو تعادل دیگر که $x = \pm\sqrt{-\alpha}$ می‌باشند انشعاب را می‌سازند.

حال به منظور ایجاد تئوری انشعاب ناخودگردان، سناریوی زیر را در نظر بگیرید.

برای $\alpha < \circ$ جواب بدیهی جاذب است و دامنه جاذبه $A(\alpha)$ به وسیله فاصله باز بین دو تعادل دیگر داده می‌شود. اکنون نکته‌ی اصلی این است که دامنه جاذبه مذکور هنگامی که $\alpha \nearrow \circ$ میل می‌کند، یک تغییر کیفی از یک موضوع غیر بدیهی به یک موضوع بدیهی می‌باشد. در حقیقت برای $\alpha < \circ$ دامنه جذب جواب بدیهی ($x = \circ$) یک مجموعه باز ناتهی است که خود جواب بدیهی را به عنوان زیر مجموعه سره دارد. همچنین برای $\alpha = \circ$ دامنه جذب $x = \circ$ فقط خود $x = \circ$ است و این به این معنی است که دامنه جذب $x = \circ$ یعنی وقتی $\alpha \nearrow \circ$؛ $A(\alpha)$ به طور پیوسته از یک مجموعه باز ناتهی که شامل $x = \circ$ به خود $x = \circ$ تقلیل پیدا می‌کند. در این حالت $\overline{A(\alpha)}$ خود یک مجموعه دافع است (شکل ۱.۱) و لذا وضعیت بالا را می‌توان به این صورت نیز بازنویسی کرد که در تغییر مقادیر α از مثبت به منفی؛ دافع $\overline{A(\alpha)}$ به طور پیوسته از یک تک نقطه به یک بازه بسته غیر بدیهی تغییر حالت می‌دهد. در این حالت اصطلاحاً می‌گوییم یک انشعاب رخ داده است!

در نهایت توجه کنید که اگرچه مفاهیم این پایان‌نامه یک بعدی هستند، اما مفاهیم انشعاب و انتقال در ابعاد بزرگتر نیز اعمال می‌شوند زیرا تعاریف جاذبه و دافعه در حالت کلی قابل ارائه است! ابزار اصلی برای آنالیز این قبیل سیستم‌ها روشی است که با قضیه منیفلد مرکزی داده می‌شود. هدف اصلی کشف یک انشعاب از سیستم محدود به منیفلد مرکز است. برای نمونه دستگاه معادلات زیر را در حالتی که $\alpha < \circ$ است در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\alpha + x^{۲}) \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases} \tag{۱.۱}$$

هنگامی که $\lambda > \circ$، مبدأ یک نقطه‌ی زینی هذلولوی است و لذا ناحیه جذب و دفع به طور هم زمان وجود دارند! این موضوع مطالعه تغییرات ناحیه جذب و دفع را برای وقتی که $\alpha \nearrow \circ$ مشکل می‌سازد. با این حال اگر خود را به زیر فضای پایای $\mathbb{R} \times \{\circ\}$ یعنی معادله $\dot{x} = x(\alpha + x^{۲})$ محدود کنیم، بررسی تغییرات ناحیه جذب و دفع همانند تصویر (۱.۱) قابل انجام است. این همان چیزی است که از آن به روش منیفلد مرکزی یاد می‌کنیم. در حقیقت توجه کنید که برای $\lambda < \circ$ مبدأ یک جاذب است و لذا گذر از $\lambda = \circ$ این جاذب را تبدیل به یک نقطه زینی می‌نماید. بنابراین با توجه

به اینکه در $\lambda = 0$ مبدأ یک نقطه غیر هذلولوی است، لذا بررسی تغییرات دستگاه (۱.۱) به طور موضعی محدود به بررسی تغییرات $\dot{x} = x(\alpha + x^2)$ خواهد بود.

با توجه به آن‌چه که بیان شد در این پایان‌نامه توجه خود را به معادلات یک بعدی محدود می‌کنیم و برای این دستگاه‌های یک بعدی انشعاب و انتقال را می‌یابیم.

در ادامه این فصل به معرفی و توضیح یک سری مقدمات و مفاهیم اولیه که در طول این پایان‌نامه برای ما کاربرد خواهند داشت می‌پردازیم.

۲.۱ مفاهیم پایه

تعریف ۱.۲.۱. *فرض کنید $f : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ یک تابع باشد که در آن E یک زیر مجموعه باز $\mathbb{R}^n$ است. یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی n ناخودگردان به صورت $\dot{x} = f(x,t)$ است که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ و $\dot{x}$ نشان دهنده‌ی مشتق x نسبت به یک متغیر آزاد مثل $t \in \mathbb{R}$ است. معادله‌ی دیفرانسیل بالا را خودگردان می‌نامیم اگر تابع f مستقل از t باشد. در این حالت می‌توانیم f را به صورت $f : E \to \mathbb{R}^n$ در نظر بگیریم و معادله‌ی دیفرانسیل را به صورت $\dot{x} = f(x)$ نشان دهیم.*

تعریف ۲.۲.۱. *فرض کنید $(t_0, x_0) \in E$ که E زیر مجموعه‌ی بازی از $\mathbb{R}^n$ است. منظور از مسئله مقدار اولیه‌ی وابسته به معادله دیفرانسیل $\dot{x} = f(t,x)$ عبارت است از*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{۲.۱}$$

گوییم تابع به طور پیوسته دیفرانسیل پذیر α تعریف شده بر بازه‌ی $J = (a,b)$ جوابی از مسئله مقدار اولیه‌ی (۱ .۲) است هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

۱. *به ازای هر* $t \in J$، $(t, \alpha(t)) \in E$
۲. *به ازای هر* $t \in J$، $\dot{\alpha} = f(t, \alpha(t))$
۳. $\alpha(t_0) = x_0$

قضیه ۳.۲.۱. *فرض کنید $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ تابعی C^1 باشد و $x_0 \in E$ و $t_0 \in \mathbb{R}$ در این صورت $\delta > 0$ و همسایگی u از x_0 چنان وجود دارند که برای هر y_0 مسئله مقدار اولیه‌ی*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = y_0 \end{cases}$$

جواب یکتایی مثل α دارد که بر بازه ی $(t_\circ - \delta, t_\circ + \delta)$ تعریف شده است. این قضیه مشهور به قضیه وجود و یکتایی می‌باشد.

اثبات: به مرجع [۹]، فصل دوم، صفحه ۷۹ مراجعه شود.

تعریف ۴.۲.۱. *(i): فرض کنید X یک فضای متریک و مجموعه‌های $A, B \subset X$ باشند. منظور از یک همیومرفیسم از مجموعه A به روی مجموعه B نگاشتی یک به یک و پیوسته از A به روی B مانند $h : A \to B$ است که $h^{-1} : B \to A$ نیز پیوسته باشد.*

(ii): مجموعه‌های A, B به طور توپولوژیک هم ارز نامیده می‌شوند اگر همیومرفیسمی از A به روی B وجود داشته باشد.

۱.۲.۱ سیستم خطی

تعریف ۵.۲.۱. *یک معادله خطی (سیستم خطی) به صورت $\dot{x} = Ax$ که در آن A ماتریسی $n \times n$، $x \in \mathbb{R}^n$ و $\dot{x}$ مشتق x نسبت به متغیر مشخصی مانند t است نشان داده می‌شود. فضای حالت سیستم فوق یا همان فضایی که جواب‌ها در آن تعریف شده‌اند $\mathbb{R}^n$ است. اگر تصویر تمام منحنی‌های جواب در $\mathbb{R}^n$ را رسم کنیم فضای تصویر سیستم به دست می‌آید.*

قضیه ۶.۲.۱. *فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ و $t_\circ \in \mathbb{R}$ باشد. برای هر $x_\circ \in \mathbb{R}^n$ مسئله مقدار اولیه‌ی*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(\circ) = x_\circ \end{cases} \tag{۳.۱}$$

دارای جواب یکتای $x(t) = e^{At}x_\circ$ می‌باشد. این قضیه را قضیه اساسی برای سیستم‌های خطی نامیم.

اثبات: به مرجع [۹]، فصل اول، صفحه ۱۷ مراجعه شود.

تعریف ۷.۲.۱. *فرض کنید A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ باشد به طوری که $\lambda_j = a_j, (j = ۱, ..., k)$ مقادیر ویژه‌ی حقیقی آن و $u_j, (j = ۱, ..., k)$ بردارهای ویژه‌ی متناظر با این مقادیر ویژه باشند. هم‌چنین $\lambda_j = a_j + ib_j, (j = k + ۱, ..., m)$ مقادیر ویژه‌ی موهومی ماتریس A که $W_j = u_j + iv_j$ بردارهای ویژه‌ی تعمیم یافته متناظر با این مقادیر ویژه*

باشند. E^c, E^u, E^s زیر فضاهای پایدار، ناپایدار و مرکز سیستم خطی $\dot{x} = Ax$ نامیده شده و به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$E^s = Span\{u_j, v_j | a_j < \circ\}$$

$$E^u = Span\{u_j, v_j | a_j > \circ\}$$

$$E^c = Span\{u_j, v_j | a_j = \circ\}$$

۲.۲.۱ سیستم غیر خطی

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید E زیر مجموعه‌ی بازی از $\mathbb{R}^n$، $f \in c^{\text{۱}}(E)$ و غیر خطی باشد. در این صورت یک سیستم غیرخطی به شکل

$$\dot{x} = f(x) \tag{۴.۱}$$

نشان داده می‌شود که مسئله مقدار اولیه‌ای به صورت زیر دارد.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_\circ) = x_\circ \end{cases} \tag{۵.۱}$$

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید $A = \{\alpha_\lambda : I_\lambda \to M\}$ خانواده‌ی همه‌ی جواب‌های مسئله مقدار اولیه‌ی $\dot{x} = f(x), x(t_\circ) = p$ باشد آن‌گاه $I_p = \cup I_\lambda$ که $I_p = (\alpha(p), \beta(p))$ بازه‌ی ماکسیمال وجود جواب و $\alpha_p : I_p \to M$، $t \in I_\lambda \to \alpha_\lambda(t)$ جواب ماکسیمال مسئله مقدار اولیه فوق است.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنید E زیر مجموعه‌ی بازی از $\mathbb{R}^n$، $f \in C^{\text{۱}}(E)$ و برای $x_\circ \in E$، $\lambda_t(x_\circ)$ جوابی از مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی (۵.۱) بر بازه‌ی ماکسیمال $I(x_\circ)$ باشد. برای هر $t \in I(x_\circ)$ نگاشت زیر شار معادله دیفرانسیل (۴.۱) نامیده می‌شود.

$$\lambda_t : E \to E$$

$$x_\circ \to \lambda_t(x_\circ) = \lambda(t, x_\circ)$$

شار یک معادله دیفرانسیل دارای خواص زیر است:

۱. $\lambda_\circ = id$

۲. برای $t, \tau \in I(x_\circ)$، $\lambda_t o \lambda_\tau = \lambda_{t+\tau}$

قضیه یکتایی و وجود تضمین می‌کند که هر معادله دیفرانسیل به طور پیوسته مشتق پذیر حتماً یک شار تعریف می‌کند. نگاشت $O(x_\circ) = \lambda(., x_\circ) : I \to E$ منحنی جواب یا مسیر سیستم (۱.۴) گذرنده از نقطه‌ی $x_\circ$ نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۲.۱. *فرض کنید E زیر مجموعه‌ی بازی از $\mathbb{R}^n$ و $f \in C^1(E)$، $\lambda_t : E \to E$ شار سیستم غیر خطی (۱.۴) باشد که برای هر $t \in \mathbb{R}$ تعریف شده باشد. گوییم $S \subset E$ نسبت به شار پایاست اگر برای هر $t \in \mathbb{R}$، $\lambda_t(S) \subset S$. هم‌چنین S نسبت به شار به طور مثبت (منفی) پایاست اگر برای $t \geq \circ$ $(t < \circ)$ داشته باشیم: $\lambda_t(S) \subset S$.*

تعریف ۱۲.۲.۱. *سیستم $\dot{x} = Ax$ که $A = Df(x_\circ)$ است را خطی سازی شده سیستم (۱.۴) در نقطه‌ی $x_\circ$ گوییم.*

تعریف ۱۳.۲.۱. *نقطه‌ی $x_\circ$ نقطه‌ی تکین یا بحرانی سیستم (۱.۴) نامیده می‌شود اگر $f(x_\circ) = \circ$. نقطه‌ی بحرانی $x_\circ$ هذلولوی نامیده می‌شود اگر هیچ یک از مقادیر ویژه‌ی ماتریس $Df(x_\circ)$ قسمت حقیقی صفر نداشته باشند.*

تعریف ۱۴.۲.۱. *فرض کنید $x_\circ$ نقطه‌ی بحرانی سیستم (۱.۴) و $\lambda_t : E \to \mathbb{R}^n$ شار آن باشد در این صورت برای هر $t \in \mathbb{R}$، $\lambda_t(x_\circ) = x_\circ$. یعنی $x_\circ$ نقطه‌ی ثابت شار λ_t خواهد بود.*

تعریف ۱۵.۲.۱. *نقطه‌ی بحرانی $x_\circ$ از سیستم غیرخطی (۱.۴) را جاذب نامیم اگر همه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس $Df(x_\circ)$ قسمت حقیقی منفی داشته باشند. در این صورت تمام جواب‌ها جذب نقطه‌ی $x_\circ$ می‌شوند و بعد منیفلد پایدار n است، $x_\circ$ تکین پایدار نیز نامیده می‌شود.*

تعریف ۱۶.۲.۱. *نقطه‌ی بحرانی $x_\circ$ از سیستم غیرخطی (۱.۴) را دافع نامیم اگر همه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس $Df(x_\circ)$ قسمت حقیقی مثبت داشته باشند. در این صورت تمام جواب‌ها از نقطه‌ی بحرانی $x_\circ$ دفع می‌شوند و بعد منیفلد ناپایدار n است، $x_\circ$ تکین ناپایدار نیز نامیده می‌شود.*

تعریف ۱۷.۲.۱. *یک دور یا مسیر تناوبی از سیستم غیرخطی (۱.۴) منحنی جوابی از آن است که نقطه‌ی بحرانی نبوده اما بسته است. به بیان دیگر می‌توان گفت γ مسیر تناوبی است اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $T > \circ$ که برای هر $t \in R$ داشته باشیم:*

$$\lambda(t + T, x_\circ) = \lambda(t, x_\circ).$$

کوچکترین T که تساوی را برقرار کند دوره‌ی مسیر تناوبی γ نامیده می‌شود. مسیر تناوبی γ پایدار نامیده می‌شود اگر برای هر $\epsilon > 0$ همسایگی u از γ وجود داشته باشد که برای هر $x \in u$، $d(\gamma_x^+, \gamma) < \epsilon$. به این معنی که برای هر $x \in u$ و $t \geqslant 0$، $d(\lambda(t,x),\gamma) < \epsilon$.

مسیر تناوبی γ ناپایدار نامیده می‌شود اگر پایدار نباشد.

مسیر تناوبی γ مجانباً پایدار است اگر پایدار باشد و برای هر $x \in u$ داشته باشیم:

$$\lim_{t\to\infty} d(\lambda(t,x),\gamma) = 0$$

قضیه ۱۸.۲.۱. *فرض کنید E زیر مجموعه‌ی بازی از $\mathbb{R}^n$ باشد و $f,g \in C^1(E)$ دو میدان برداری باشند، f,g به طور توپولوژیک روی E هم‌ارزند یعنی هم‌یومرفیسم $H: E \to E$ وجود دارد که مسیرهای سیستم*

$$\dot{x} = f(x) \tag{۶.۱}$$

را به مسیرهای سیستم

$$\dot{x} = g(x) \tag{۷.۱}$$

می‌برد. در این صورت:

۱. *p نقطه‌ی تکین سیستم (۶.۱) است اگر و تنها اگر $H(p)$ نقطه‌ی تکین سیستم (۷.۱) باشد.*

۲. *γ مسیر تناوبی سیستم (۶.۱) است اگر و تنها اگر $H(\gamma)$ مسیر تناوبی سیستم (۷.۱) باشد.*

اثبات: به مرجع [۹]، بخش ۳.۱ مراجعه شود.

تعریف ۱۹.۲.۱. *هرگونه تغییر سیستم از حالت اولیه اختلال نامیده می‌شود. گاهی در سیستم‌های با ساختار پایدار می‌توان سیستم اولیه را به عنوان اختلالی از سیستم ساده‌تر در نظر گرفت. البته باید این اختلال به اندازه‌ای کوچک باشد که موجب تغییر حالت سیستم نشود و همچنین دو سیستم به طور توپولوژیک هم ارز باشند.*

۳.۲.۱ انشعاب

در بعضی از معادلات از جمله معادلات مربوط به بسیاری از پدیده‌های طبیعی، معادله به یک پارامتر وابسته می‌شود مثلاً معادله‌ی

$$\dot{x} = f(x, \mu), x \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}^p$$

به پارامتر μ وابسته است. بنابراین نقاط تکین برحسب پارامتر μ به‌دست می‌آیند اگر برای مقداری مثلاً تعداد نقاط تکین $\mu = \mu_\circ$ با تعداد نقاط تکین برای $\mu > \circ$ یا $\mu < \circ$ برابر نباشد $\mu_\circ$ را مقدار انشعاب نامیده و می‌گوییم در $\mu = \mu_\circ$ انشعاب رخ داده است. بنابراین هنگامی که یک انشعاب رخ می‌دهد پایداری ساختاری به‌هم می‌ریزد چرا که تعداد نقاط تکین در دو سیستم به طور توپولوژیک هم ارز، برابر هستند. سیستم $\dot{x} = f(x, \mu)$ در نقاط تکین هذلولوی ساختار پایدار دارد. بنابراین انشعاب تنها در نقاط تکین غیر هذلولوی رخ می‌دهد. تاکنون انواع متعددی از انشعاب‌ها مانند انشعاب چنگال، گره-زینی، ترانس کرتیکال (متقاطع بحرانی)، هاف و... شناخته شده‌اند.

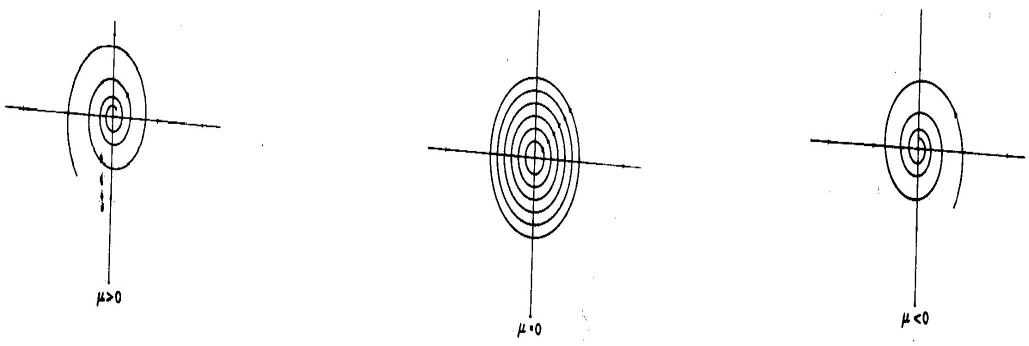
مثال ۲۰.۲.۱. سیستم

$$g(X) = \begin{pmatrix} y + \mu x \\ -x + \mu y \end{pmatrix}$$

و

$$f(X) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

را که $f, g \in C^1(k)$ و k زیر مجموعه فشرده‌ای در $\mathbb{R}^2$ است در نظر می‌گیریم. شکل‌های زیر نشان می‌دهند که برای $\mu = \circ$ مسیر تناوبی داریم در حالی که برای $\mu > \circ$ و $\mu < \circ$ مسیر تناوبی نداریم بنابراین در $\mu = \circ$ یک انشعاب رخ داده است.



شکل ۲.۱: انشعاب

تعریف ۲۱.۲.۱. *میدان برداری زیر را در نظر بگیرید.*

$$\dot{x} = f(x,\mu) \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

گوییم این میدان برداری در نقطه‌ی $(\circ, \circ)$ دارای انشعاب متقاطع بحرانی است هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

$$f(\circ,\circ) = \circ, \frac{\partial f}{\partial x}(\circ,\circ) = \circ, \frac{\partial f}{\partial \mu}(\circ,\circ) = \circ,$$

$$\frac{\partial^{۲} f}{\partial x \partial \mu}(\circ,\circ) \neq \circ, \frac{\partial^{۲} f}{\partial x^{۲}}(\circ,\circ) \neq \circ$$

تبصره ۱: شکل نرمال انشعاب متقاطع بحرانی به صورت

$$\dot{x} = f(x,\mu) = \mu x \pm x^{۲}, \quad x \in \mathbb{R}^{۱}, \quad \mu \in \mathbb{R}^{۱}$$

می‌باشد.

مثال ۲۲.۲.۱. میدان برداری زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x} = f(x,\mu) = \mu x - x^{۲}, \quad x \in \mathbb{R}^{۱}, \quad \mu \in \mathbb{R}^{۱}$$

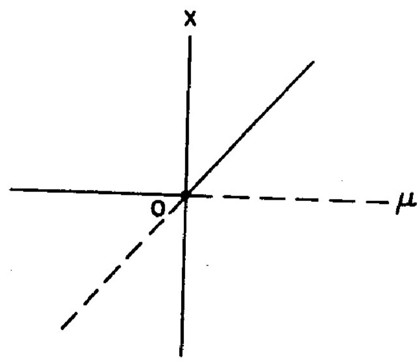
به آسانی مشخص می‌شود که

$$f(\circ,\circ) = \circ, \frac{\partial f}{\partial x}(\circ,\circ) = \circ, \frac{\partial f}{\partial \mu}(\circ,\circ) = \circ, \frac{\partial^{۲} f}{\partial x \partial \mu}(\circ,\circ) \neq \circ, \frac{\partial^{۲} f}{\partial x^{۲}}(\circ,\circ) \neq \circ$$

و نقاط تکین این معادله به این صورت است :

$$x = \circ, \;\; x = \mu$$

بنابراین برای $\mu = \circ$ تنها نقطه تکین $x = \circ$ است و این نقطه یک تکین غیر هذلولوی است و برای $\mu < \circ$ دو نقطه‌ی تکین وجود دارد که $x = \circ$ پایدار و $x = \mu$ ناپایدار است، برای $\mu > \circ$ تکین $x = \circ$ ناپایدار و $x = \mu$ پایدار است لذا این معادله دارای انشعاب متقاطع بحرانی است.



شکل ۳.۱: انشعاب متقاطع بحرانی

تعریف ۲۳.۲.۱. *میدان برداری زیر را در نظر بگیرید.*

$$\dot{x} = f(x, \mu) \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

گوییم این میدان برداری در نقطه‌ی $(۰, ۰)$ دارای انشعاب چنگال است هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

$$f(۰, ۰) = ۰, \frac{\partial f}{\partial x}(۰, ۰) = ۰, \frac{\partial f}{\partial \mu}(۰, ۰) = ۰,$$

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(۰, ۰) = ۰, \frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial \mu}(۰, ۰) \neq ۰, \frac{\partial^۳ f}{\partial x^۳}(۰, ۰) \neq ۰$$

تبصره ۲: شکل نرمال انشعاب چنگال به صورت زیر است.

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x \pm x^۳, \quad x \in \mathbb{R}^۱, \quad \mu \in \mathbb{R}^۱$$

مثال ۲۴.۲.۱. میدان برداری زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^۳, \quad x \in \mathbb{R}^۱, \quad \mu \in \mathbb{R}^۱$$

به آسانی مشخص می‌شود که

$$f(\circ,\circ)=\circ,\ \frac{\partial f}{\partial x}(\circ,\circ)=\circ,\ \frac{\partial f}{\partial \mu}(\circ,\circ)=\circ$$

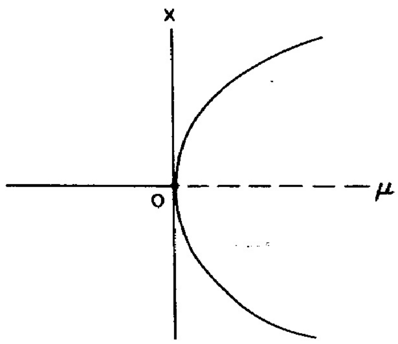
و

$$\frac{\partial^{2} f}{\partial x^{2}}(\circ,\circ)=\circ,\ \frac{\partial^{2} f}{\partial x\partial \mu}(\circ,\circ)\neq\circ,\ \frac{\partial^{3} f}{\partial x^{3}}(\circ,\circ)\neq\circ$$

و نقاط تکین این معادله به این صورت است :

$$x=\circ,\ \ x^{2}=\mu$$

بنابراین برای $\mu=\circ$ تنها نقطه‌ی تکین $x=\circ$ است و این نقطه یک تکین غیر هذلولوی است و برای $\mu>\circ$ دو نقطه‌ی تکین وجود دارد که $x=\circ$ ناپایدار و $x=\pm\sqrt{\mu}$ پایدار است، برای $\mu<\circ$ تکین $x=\circ$ پایدار است لذا این معادله دارای انشعاب چنگال است.



شکل ۴.۱: انشعاب چنگال

قضیه ۲۵.۲.۱. *فرض کنید E زیر مجموعه‌ی بازی از $\mathbb{R}^n$ شامل مبدأ، $f\in C^{1}(E)$ و λ_t شار سیستم غیر خطی (۴.۱) باشد. هم‌چنین فرض کنید که $f(\circ)=\circ$ و $Df(\circ)$، k تا مقدار ویژه با قسمت حقیقی منفی و $n-k$ تا مقدار ویژه با قسمت حقیقی مثبت داشته باشد. بنابراین منیفلد k بعدی S مماس بر زیر فضای پایدار E^s از سیستم $\dot{x}=Ax$ که $A=Df(\circ)$ در نقطه‌ی صفر وجود دارد به طوری که برای هر $t\geqslant\circ$، $\lambda_t(S)\subset S$ و برای هر $x_\circ\in S$، $\lim_{t\to\infty}\lambda_t(x_\circ)=\circ$.*