تقديم

پێشکەشی دەکەم بە وڵاتەکەم . . .

تقدیر و تشکر

نخست سپاس خداوندی را که عاشقانه آفرید، سخاوتمندانه بخشید و صادقانه هدایت کرد.
سپاس پدری را که در سایه ی حمایت بی دریغش خواستن را آزمودم، تلاش را آموختم و هدف را یافتم.
سپاس مادری را که با تکیه بر مهر پاکش خواسته ها را خواستم، زندگی را زیستم و امیدها را یافتم.
سپاس همسری را که در جوار اندیشه ی والایش هیچگاه احساس تنهایی و خستگی نکردم.
بر خود می بالم که در مسیر نگارش پایان نامه ام فرصتی دست داد تا افتخار علم آموزی نزد استاد فرهیخته جناب آقای پرفسور امیر خسروی را در کارنامه ی علمی خود بنگارم.
افتخاری ارزشمند را ارج می نهم که استاد گرانقدرم جناب آقای پرفسور علیرضا مدقالچی پایان نامه ام را به داوری نشست و آموخته ام را با محک دانشش سنجید.
همچنین از استاد عزیز جناب آقای دکتر حمید فرهادی از دانشگاه صنعتی شریف که زحمت داوری این پایان نامه را قبول کردند، کمال تشکر را دارم.

فرصتی است تا ابراز تشکری داشته باشم از استاد ارجمند جناب آقای پرفسور محمد تقی دیبایی که اندیشیدن را به من آموخت نه اندیشه‌ها را... ، همچنین اساتید گرامی آقایان پرفسور قاسمی، هنری، دکتر طاهری زاده، دکتر زباندان و دکتر رضوی که در طول تحصیل همواره از محضرشان نهایت استفاده را بردم.

در پایان از دوستان عزیزم آقایان بارزان زائری، حیدر زادپور، عبید لطفی، ادریس رنجبر، مراد روحی، بهزاد کرمی، کیومرث نعمتی، شهرام سلمانپور، وهاب طاهری، محمد رحمانی، مجید زرگر، ریوار محمودپور، هاشم حسینی، فرید آسیابانی، مجید دهقان، حسام بخشی، مسعود علیزاده، بهرام فرهادی، حسن صادقی، صمد اکبرپور، فرشاد محمدی، ابراهیم بوچانی، امید ابراهیمی، محمد ایزدخواه و..... ، همچنین خانم ها مهرانه عزیزی، سیران زندی، حسن نسب، تخته، مرادیانی، مهدوی، صادقی، جعفری، دانشمند، جامه شورانی و... که همواره همراه و مشوقم بوده‌اند کمال قدردانی را دارم.

چکیده

فزونی یک ویژگی کیفی است که در به‌کارگیری قاب‌های فضاهای هیلبرت نقشی مؤثر دارد. در این پایان‌نامه ابتدا برای دسته‌ی بزرگی از قاب‌های نامتناهی، یعنی قاب‌های ℓ^1 -موضعی، نشان می‌دهیم هر قاب با چگالی بزرگ‌تر از ۱ شامل یک زیرقاب با چگالی نزدیک به ۱ است، سپس نتایج خود را به قاب‌های چندتایی گابور با مولدهایی در $M^1(\mathbb{R}^d)$ و مولکول‌های گابور با پوشش‌هایی در $W(C,\ell^1)$ تعمیم می‌دهیم.
علاوه بر این با استفاده از پالایه‌ها تعاریف دیگری از چگالی این قاب‌ها را بیان می‌کنیم، و درنهایت با تعریف یک مفهوم کمّی معنی‌دار از فزونی و یافتن ارتباط میان چگالی و فزونی قاب برای قاب‌های نامتناهی مذکور نشان می‌دهیم که یک قاب با فزونی بیشتر از ۱ شامل یک زیر قاب با فزونی نزدیک به ۱ است.

واژه‌های کلیدی: قاب ، قاب‌های موضعی ، قاب‌های خودموضعی ، قاب‌های گابور ، چگالی قاب ، فزونی قاب .

رده‌بندی موضوعی ریاضی۲۰۱۰: 42C15، 46C99

مقدمه

قاب‌ها را ابتدا دافین [1] و اسکافر [2] [۱۶] در زمینه‌ی سری‌های فوریه‌ی ناهمساز معرفی کردند، که امروزه نقشی مهم در بسیاری از کاربردها در ریاضیات، علوم و مهندسی ایفا می‌کنند. خواص اساسی قاب‌ها در [۹] و [۱۲] به‌طور مفصل بحث شده است.

وقتی فزونی برای قاب‌های نامتناهی مطرح می‌شود یک خاصیت مطلوب اساسی به‌صورت زیر است:

P_1 : هر قاب با فزونی بیشتر از ۱ باید شامل زیرقابی با فزونی نزدیک به ۱ باشد.

در این پایان‌نامه نشان می‌دهیم که برای دو رده‌ی بزرگ از قاب‌ها، سیستم‌های گابور و قاب‌های ℓ^1 -موضعی، چگالی مجموعه‌های خاصی مربوط به قاب، که چگالی قاب نامیده می‌شوند، خاصیت P_1 را دارند. در صورتی‌که با کارهای دیگری که در این زمینه انجام شده مقایسه کنیم به این نتیجه می‌رسیم چگالی قاب مطرح شده برای این دو رده از قاب‌ها به‌عنوان یک تعریف کمّی از فزونی مناسب است.

در طول ۴۰ سال گذشته (یعنی از زمانی که لانداو [3] [۲۹] چگالی را برای قاب‌های گابور ارائه کرد که مولدها، توابع معین کل بودند)، پیشرفت‌های جزئی در جهت تعریف یک مفهوم کمّی از فزونی برای قاب‌های گابور رخ داده است. تحقیقات بسیاری [۲۰] (و مراجع آن) ارتباط ویژگی‌های اساسی قاب‌ها با مقادیر کمّی مربوط به چگالی Λ، یعنی مجموعه‌های فرکانس-زمان، را بررسی کردند اما آن‌ها نتوانستند انتخابی آشکار برای فزونی (به‌عنوان مثال چگالی Λ) ارائه دهند که در خاصیت P_1 صدق کند. به هر حال نتایج بیشتر در مورد فزونی قاب‌های دلخواه همچنین خاصیت P_1 برای قاب‌های گابور تاکنون نامشخص مانده‌اند. در این پایان‌نامه به مفاهیم کمّی فزونی برای قاب‌های نامتناهی پرداخته ایم که پیشرفت‌های قابل توجهی را در این زمینه موجب شده است.

رویکرد کمّی در مورد دسته‌ی بزرگی از قاب‌ها با اضافی [4] نامتناهی (شامل قاب‌های گابور) در [۴] و [۵] مطرح شد که یک مفهوم عام از قاب‌های موضعی را معرفی کرد.(همچنین [۱۹] و سپس [۱۷] به‌طور مستقل هرکدام مفهوم‌های مشابهی ارائه داده‌اند که بحث اصلی آن‌ها قاب‌های موضعی است). در این میان [۴] و [۵] نشان می‌دهند که در حالت موضعی، چگالی قاب می‌تواند برای تهیه‌ی یک اندازه‌ی کمّی جالب برای قاب‌ها به‌کار رود. همچنین یک نتیجه‌ی جزئی ضعیف مربوط به ویژگی P_1 در [۴] و [۵] آمده است که نشان می‌دهد برای هر قاب موضعی $\mathcal{F}$ با چگالی قاب d، $\epsilon > 0$ و زیرقابی از $\mathcal{F}$ با چگالی $d - \epsilon$ وجود دارد.

در فصل ۳ ابتدا به معرفی قاب‌های ℓ^1 -موضعی پرداخته و موضوع را برای بعد متناهی ثابت می‌کنیم، سپس با استفاده

[1] Duffin

[2] Schaeffer

[3] H.J.Landau

[4] excess

از بحث برش در نهایت برای بعد نامتناهی نشان می‌دهیم که قاب‌های ℓ^1-موضعی با چگالی قاب $d > 1$، به‌ازای هر $\epsilon > 0$ یک زیرقاب با چگالی قاب کوچکتر از $1 + \epsilon$ دارند. در فصل ۴ به معرفی قاب‌های گابور، چندتایی گابور و مولکول گابور می‌پردازیم و نتیجه‌ی فصل ۳ را بر روی این دسته از قاب‌ها بررسی می‌کنیم. در فصل ۵ چگالی قاب به کمک ابرفیلترها را برای قاب‌های ℓ^1-موضعی و قاب‌های گابور مطرح کرده، و ثابت می‌کنیم چگالی قاب تعریف شده در خاصیت‌های مطلوب مطرح شده صدق می‌کند. در نهایت در فصل ۶ به معرفی تابع فزونی پرداخته و روابط بین چگالی و فزونی را بررسی می‌کنیم.

لازم به ذکر است که در تدوین این مجموعه از مقالات

R. Balan, P. G. Casazza, and Z. Landau. *Redundancy for localized frames*, J. Funct. Anal., 252:630–676, 2011.

R. Balan, P.G. Casazza, C. Heil, and Z. Landau. *Density, overcompleteness, and localization of frames I*: Theory. J. Fourier Anal. Appl., 12(2):105–143, 2006.

به عنوان مقاله‌های اصلی و مقالات

J. Cahill, P. G. Casazza, and A. Heinecke. *A quantitative notion of redundancy for infinite frames*, preprint, http://arXiv:1006.2678v1 [math.FA] 14 Jun 2010.

R. Balan, P.G. Casazza, C. Heil, and Z. Landau. *Density, overcompleteness, and localization of frames II*: Gabor frames. J. Fourier Anal. Appl., 12(3):307–344, 2006.

به عنوان مقاله‌های فرعی استفاده شده است.

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش‌نیازها و نمادها

در این فصل نمادها، تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصول بعد را بیان می‌کنیم. مجموعه‌ی اعداد طبیعی، اعداد صحیح، اعداد حقیقی و اعداد مختلط را به‌ترتیب با $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{R}$، و $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهیم.

از آن جهت که فصل‌های بعد بر پایه‌ی **فضاهای هیلبرت**[۱] هستند، بنابراین ما بیشتر بر روی فضاهای هیلبرت و ویژگی‌های این گونه فضاها تمرکز می‌کنیم.

۱.۱ خواص و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. مجموعه‌ی X که عضوهایش را نقاط خواهیم نامید، در صورتی یک **فضای متری** است که به هر دو نقطه‌ی p و q از X عدد حقیقی $d(p,q)$ به نام فاصله از p تا q به گونه‌ای مربوط شده باشد که

(الف) $d(p,q) > 0$ هرگاه $p \neq q$ و $d(p,p) = 0$؛

(ب) $d(p,q) = d(q,p)$؛

(ج) به ازای هر $r \in X$، $d(p,q) \leqslant d(p,r) + d(r,q)$.

هر تابع دارای این سه خاصیت یک تابع **فاصله** یا یک **متر** نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری و E یک زیرمجموعه‌ی آن باشد. زیرفضای **پیمایش خطی**[۲] E که با $Span(E)$ نشان داده می‌شود اشتراک همه‌ی زیرفضاهای X است که شامل E هستند؛ یعنی $Span(E)$ نمایش‌دهنده‌ی

---

[۱] Hilbert

[۲] linear span

گردایه‌ی ترکیبات خطی متناهی از عناصر E به‌صورت زیر است

$$span(E) := \begin{cases} \{0\} & ; \quad E = \phi \\ \text{مجموعه‌ی تمام ترکیبات خطی متناهی اعضای } E & ; \quad E \neq \phi \end{cases}$$

همچنین در فضای برداری متریک، **پیمایش خطی بسته** E، بستار پیمایش خطی E است که با نماد $\vee E$ نشان داده می‌شود؛ به عبارت دیگر

$$\vee E = \overline{\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k : \quad n \geqslant 1,\ \alpha_k \in \mathbb{F},\ f_k \in E\}}.$$

تعریف ۳.۱.۱. گوییم فضای برداری X یک **فضای نرم‌دار** است اگر به هر $x \in X$ عدد حقیقی و نامنفی $\| x \|$ به نام **نرم** x چنان مربوط شده باشد که

(الف) به ازای هر x و y در X، $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$؛

(ب) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد، آن‌گاه $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$؛

(ج) اگر $x \neq 0$، آن‌گاه $\| x \| > 0$.

در واقع نرم به معنای تابعی است که x را به $\| x \|$ می‌نگارد.

هر فضای نرم‌دار را می‌توان یک فضای متری در نظر گرفت که در آن فاصله‌ی $d(x, y)$ بین دو نقطه x و y مساوی $\| x - y \|$ است؛ به عبارت دیگر $d(x, y)$ متر القا شده به وسیله نرم $\| x - y \|$ است.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم X فضایی برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. یک **ضرب داخلی** روی X تابعی به‌صورت $\langle . , . \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{F}$ است به طوری که برای هر α، β در $\mathbb{F}$ و x، y و z در X شرایط زیر برقرار باشند:

(الف) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$؛

(ب) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle$؛

(ج) $0 \leq \langle x, x \rangle$؛

(د) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$؛

(و) اگر $\langle x, x \rangle = 0$ آن‌گاه $x = 0$ است.

توجه داریم که اگر $\alpha = 0$ باشد بنا بر خاصیت (الف) برای هر $y \in X$ داریم

$$\langle 0, y \rangle = \langle \alpha \cdot 0, y \rangle = \alpha \langle 0, y \rangle = 0$$

پس برای هر ضرب داخلی $\langle . , . \rangle$ و برای هر $x, y \in X$

$$\langle x, \circ \rangle = \langle \circ, y \rangle = \circ.$$

قضیه ۵.۱.۱. نامساوی کوشی[۳] - شوارتز[۴] *[15, 4.1.1] اگر $\langle . , . \rangle$ یک ضرب داخلی روی فضای برداری X باشد آن‌گاه برای هر $x, y \in X$*

$$| \langle x, y \rangle |^{۲} \leqslant \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

علاوه بر این، تساوی برقرار است اگر و تنها اگر اسکالرهای α و β ، که حداقل یکی از آن‌ها ناصفر است، به گونه‌ای وجود داشته باشند که $\alpha x + \beta y = \circ$.

قضیه ۶.۱.۱. *[15, 5.1.1] اگر $\langle . , . \rangle$ یک ضرب داخلی روی X باشد و برای هر $x \in X$ ، $\| x \| := \langle x, x \rangle^{\frac{۱}{۲}}$ را تعریف کنیم، آن‌گاه*

(الف) برای هر x و y در X ، $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$.

(ب) برای هر $\alpha \in \mathbb{F}$ و هر $x \in X$ ، $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$.

(ج) اگر $\| x \| = \circ$ ، آن‌گاه $x = \circ$.

نرم x ، $\| x \|$ ، نرم القا شده توسط ضرب داخلی $\langle . , . \rangle$ بر X نامیده می‌شود.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم X فضای نرم‌دار با نرم $\| . \|$ و $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ دنباله‌ای از عناصر X باشد.

(الف) هرگاه عضو $x \in X$ به گونه‌ای وجود داشته باشد که $\lim_{n \longrightarrow \infty} \| x_n - x \| = \circ$ گوییم دنباله $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ به $x \in X$ **همگرا** است ، و می‌نویسیم $x_n \longrightarrow x$ وقتی $n \longrightarrow \infty$.

(ب) هرگاه برای هر $\epsilon > \circ$ ثابت $N \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که برای هر $N \leq n, m$ داشته باشیم $\| x_n - x_m \| < \epsilon$ آن‌گاه دنباله $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ را **کوشی** می‌نامیم.

(ج) هرگاه عضو $x \in X$ وجود داشته باشد که دنباله $S_N = \sum_{-N}^{N} x_n$ به x همگرا باشد، گوییم سری $\sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n$ به x همگراست و می‌نویسیم $\sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n = x$.

(د) هرگاه $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \| x_n \|$ همگرا باشد، سری $\sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n$ را **مطلقاً همگرا** می‌نامیم.

عبارت "کامل" در ریاضیات به طور مفرط استفاده شده است. اکنون دو کاربرد آن را معرفی می‌کنیم که باید دقت کرد این دو مفهوم متمایز هستند و باید به طور کامل مشخص شوند.

---

[۳] Cauchy

[۴] Schwarz

تعریف ۸.۱.۱. فضای خطی نرم‌دار X مفروض است.

(الف) زیرمجموعه‌ی E از X **کامل** است اگر $\overline{Span(E)} = X$؛ یعنی $Span(E)$ در X چگال باشد.

(ب) فضای X **کامل** است هرگاه هر دنباله کوشی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از عناصر X همگرا باشد.

(ج) فضای X **جدایی پذیر** است اگر شامل یک زیرمجموعه‌ی چگال شمارا باشد.

تعریف ۹.۱.۱. فضای خطی نرم‌دار X را یک **فضای باناخ**[۵] می‌گوییم هرگاه یک فضای کامل باشد.

مثال ۱۰.۱.۱ . *فرض کنیم $1 \leqslant p < \infty$ و I مجموعه‌ای شمارش‌پذیر باشد. دراین‌صورت فضای*

$$\ell^p(I) := \{(x_\alpha)_{\alpha\in I} \mid x_\alpha \in \mathbb{C}\ ,\ \sum_{\alpha\in I} \mid x_\alpha \mid^p < \infty\};$$

با نرم $\parallel x \parallel_p = (\sum_{\alpha\in I} \mid x_\alpha \mid^p)^{\frac{1}{p}}$ یک فضای باناخ است.

مثال ۱۱.۱.۱ . *فضای $\ell^\infty(I) := \{(x_\alpha)_{\alpha\in I} \mid x_\alpha \in \mathbb{C}\ ,\ \sup_{\alpha\in I} \mid x_\alpha \mid < \infty\}$ با نرم زیر یک فضای باناخ است؛*

$$\parallel x \parallel_\infty = \sup_{\alpha\in I} \mid x_\alpha \mid .$$

تذکر ۱۲.۱.۱ . *در فضاهای باناخ هر سری مطلقاً همگرا، همگرا است امّا عکس این مطلب در فضاهای با بعد نامتناهی برقرار نیست. در فضاهای با بعد متناهی این دو نوع همگرایی معادل هستند.*

تعریف ۱۳.۱.۱ . فضای برداری مختلط A با یک عمل دوتایی روی آن را که به‌ازای‌هر اسکالر $\alpha \in \mathbb{C}$ و هر $x, y, z \in A$ در شرایط زیر صدق می‌کند یک **جبر** می‌نامیم.

(الف) $x(yz) = (xy)z$؛

(ب) $x(y+z) = xy + xz$ و $(x+y)z = xz + yz$؛

(ج) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

عمل فوق را **ضرب روی** A می‌نامیم.

تعریف ۱۴.۱.۱ . فضای برداری نرم‌دار A را یک **جبر نرم‌دار** گوییم، هرگاه A یک جبر نیز باشد. اگر نرم روی A دارای این خاصیّت باشد که به‌ازای‌هر $x, y \in A$، $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$، آن‌گاه نرم A را **نرم جبری** می‌گوییم.
اگر $(A, \|.\|)$ یک فضای باناخ و همچنین یک جبر نرم‌دار باشد آن‌گاه A را یک **جبر باناخ** می‌نامیم.

[۵] Banach

تعریف ۱.۱.۱۵. عضو x از جبر A را **عضو همانی (یکّه، واحد)** می‌نامیم هرگاه به‌ازای‌هر $y \in A$ داشته باشیم $xy = yx = y$. عضو همانی A را با e نمایش می‌دهیم و اگر جبر A عضو همانی داشته باشد آن را **جبر یک‌دار** یا **جبر واحددار** می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۶. فرض کنیم A یک جبر یک‌دار باشد و $x \in A$. اگر عضوی مانند $y \in A$ موجود باشد به‌طوری‌که $xy = yx = e$ آن‌گاه عضو x را **وارون‌پذیر** گوییم.

تعریف ۱.۱.۱۷. فرض کنیم A یک جبر مختلط باشد. نگاشت $* : A \longrightarrow A$ را یک **برگشت** روی A می‌نامیم هرگاه به‌ازای‌هر اسکالر $\alpha \in \mathbb{C}$ و هر $x, y, z \in A$ دارای خواص زیر باشد:

(الف) $(x+y)^* = x^* + y^*$؛

(ب) $(\alpha x)^* = \overline{\alpha} x^*$؛

(ج) $(xy)^* = y^* x^*$؛

(د) $(x^*)^* = x$.

اگر A یک جبر باشد که یک برگشت $*$ روی آن تعریف شده باشد آن‌گاه A را یک **$*$-جبر** می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۸. رابطه‌ی $\leqslant$ روی مجموعه‌ی A، **رابطه‌ی ترتیبی جزئی** گفته می‌شود اگر و تنها اگر به‌ازای هر $a, b, c \in A$ داشته باشیم

(الف) $a \leqslant a$؛

(ب) اگر $a \leqslant b$, $b \leqslant a$، آن‌گاه $a = b$؛

(ج) اگر $a \leqslant b$, $b \leqslant c$، آن‌گاه $a \leqslant c$.

یک مجموعه‌ی **مرتب جزئی** جفت $(A, \leqslant)$ است که در آن A یک مجموعه و $\leqslant$ یک رابطه‌ی ترتیبی جزئی روی آن است.

تعریف ۱.۱.۱۹. یک مجموعه‌ی مرتب جزئی $(A, \leqslant)$ **مشبکه** گفته می‌شود اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه‌ی دو عضوی مانند $\{x, y\}$، کوچک‌ترین کران بالا، که با $x \vee y$ نمایش می‌دهیم، و نیز بزرگ‌ترین کران پایین، که با $x \wedge y$ نمایش می‌دهیم، داشته باشد.

تعریف ۱.۱.۲۰. فرض کنیم Λ یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. رابطه‌ی $\leqslant$ را روی Λ یک **جهت** نامیم هرگاه به‌ازای هر $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda$ داشته باشیم

(الف) $\lambda_1 \leqslant \lambda_1$؛

(ب) اگر $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$, $\lambda_2 \leqslant \lambda_3$ ، آنگاه $\lambda_1 \leqslant \lambda_3$؛

(ج) به‌ازای‌هر λ_1 و λ_2 دلخواه یک λ_3 چنان موجود باشد که $\lambda_1 \leqslant \lambda_3, \lambda_2 \leqslant \lambda_3$.

در این‌صورت $(\Lambda, \leqslant)$ را یک مجموعه‌ی **جهت‌دار** گوییم.

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنیم $(\Lambda, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی جهت‌دار باشد و X یک مجموعه‌ی دلخواه باشد، دراین‌صورت تابع $x : \Lambda \longrightarrow X$ را یک **تور** در X گوییم.

معمولاً برای هر $\lambda \in \Lambda$، $x(\lambda)$ را با x_λ و خود تور را با $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۲.۱.۱. چندجمله‌ای زیر با ضرایب مختلط را در نظر می‌گیریم

$$\phi(r) = c_k r^k + ... + c_1 r + c_0 \ ; \ c_k \neq 0 \ , \ c_0 \neq 0$$

چندجمله‌ای ϕ یک **چندجمله‌ای شور**[۶] نامیده می‌شود هرگاه هرکدام از پایه‌های r^s به‌ازای $s = 0, 1, 2, ..., k$ در رابطه‌ی $|r^s| < 1$ صدق کند.

حال با توجه به چندجمله‌ای

$$\widehat{\phi}(r) = \bar{c}_0 r^k + \bar{c}_1 r^{k-1} + ... + \bar{c}_{k-1} r + \bar{c}_k$$

که در آن $\bar{c}_j$، به‌ازای $j = 0, 1, 2, ..., k$ ، نمایش‌گر مزدوج مختلط c_j است، تعریف می‌کنیم

$$\phi_1(r) = \frac{1}{r}[\widehat{\phi}(0)\phi(r) - \phi(0)\widehat{\phi}(r)]$$

در این‌صورت **ضابطه‌ی شور**[۷] به‌صورت زیر بیان می‌شود:

چندجمله‌ای ϕ یک چندجمله‌ای شور است اگر و تنها اگر $|\phi(0)| < |\widehat{\phi}(0)|$ و ϕ_1 یک چندجمله‌ای شور باشد.

۲.۱ فضای هیلبرت

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم $(X, \langle .,. \rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد. به‌ازای‌هر $x \in X$ تابع نرم با ضابطه‌ی $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ را نرم القا شده از این ضرب داخلی تعریف می‌کنیم. درصورتی‌که X با این نرم یک فضای باناخ تشکیل دهد، X را یک **فضای هیلبرت** می‌نامیم و معمولاً با $\mathcal{H}$ نمایش می‌دهیم.

[۶] Schur's polynomial

[۷] Schur's criterion

در سرتاسر این پایان نامه، منظور از $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ است.

مثال ۲.۲.۱. *فرض کنیم I مجموعه‌ای دلخواه باشد. $L^{2}(I)$ را مجموعه‌ی همه‌ی توابع $X : I \longrightarrow \mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم که $\sum_{i\in I} \mid X(i) \mid^{2} < \infty$ در این صورت برای هر X و Y در $L^{2}(I)$ تعریف می‌کنیم*

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i\in I} X(i)\overline{Y(i)}$$

تابع $\langle . , .\rangle$ یک ضرب داخلی برای فضای $L^{2}(I)$ است که همراه با آن تشکیل یک فضای هیلبرت می‌دهد.

تذکر ۳.۲.۱. *توجه داریم اگر $\sum_{i\in I} \mid X(i) \mid^{2} < \infty$ باشد، در این صورت مجموعه‌ای به‌صورت $\{i \in I :\ X(i) \neq 0\}$ شمارا است، زیرا اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار دهیم $\delta_n = \{i \in I :\ |X(i)| \geqslant \frac{1}{n}\}$ ، آن‌گاه چون $\sum_{i\in I} \mid X(i) \mid^{2} < \infty$ پس δ_n متناهی است و لذا مجموعه‌ی $\bigcup_{n=1}^{\infty} \delta_n = \{i \in I :\ X(i) \neq 0\}$ متناهی یا شمارا است.*

مثال ۴.۲.۱. *فرض کنیم $d \in \mathbb{N}$ و $\mathbb{C}^d := \{z = (z_1, \dots, z_d) \mid z_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, d\}$ دراین‌صورت $\mathbb{C}^d$ با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است*

$$x.y = \sum_{i=1}^{d} x_i\overline{y_i} \qquad ; \qquad x = (x_1, \dots, x_d)\ ,\ y = (y_1, \dots, y_d).$$

تعریف ۵.۲.۱. دلتای کرونکر را به‌ازای‌هر α, β با $\delta_{\alpha\beta}$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\delta_{\alpha\beta} := \begin{cases} 1 & ; \qquad \alpha = \beta \\ 0 & ; \qquad \alpha \neq \beta \end{cases}$$

۳.۱ مجموعه‌های متعامد و پایه‌ها در فضای هیلبرت

تعریف ۱.۳.۱. اگر $A, B, \mathcal{E}, \{\nu_\alpha\}_{\alpha\in I}$ و $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ زیرمجموعه‌هایی از $\mathcal{H}$ و x و y اعضایی از $\mathcal{H}$ باشند آن‌گاه

(الف) دو عضو x, y را **متعامد** یا **عمودبرهم** گوییم هرگاه $\langle x, y\rangle = 0$ که دراین‌صورت می‌نویسیم $x \perp y$ اگر $x \perp y$ باشد آن‌گاه $y \perp x$ است و $x \perp x$ اگر و تنها اگر $x = 0$ باشد.

(ب) دو مجموعه‌ی A وB را **متعامد** یا **عمودبرهم** نامیم هرگاه به‌ازای‌هر $x \in A$ و $y \in B$، $\langle x, y\rangle = 0$ که دراین‌صورت می‌نویسیم $A \perp B$.

(ج) زیرمجموعه‌ی $\mathcal{E}$ از $\mathcal{H}$ یک **زیرمجموعه‌ی متعامد** است هرگاه برای هر $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$ که $e_1 \neq e_2$ داشته باشیم $e_1 \perp e_2$.

(د) **مکمل متعامد** A را با $A^{\perp}$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A^{\perp} = \{y \in \mathcal{H} : \langle x, y\rangle = 0, \ \ x \in A \text{ به‌ازای‌هر } \}.$$

(ه) مجموعه‌ی A را **متعامد یکّه** گوییم هرگاه هر دو عضو متمایز A بر هم عمود بوده و به‌ازای‌هر $x \in A$ داشته باشیم $\|x\| = 1$.

(و) دو مجموعه‌ی $\{\nu_{\alpha}\}_{\alpha\in I}$ و $\{u_{\alpha}\}_{\alpha\in I}$ را **دومتعامد** نامیم، هرگاه به‌ازای‌هر $\alpha, \beta \in I$ داشته باشیم

$$\langle \nu_{\alpha}, u_{\beta}\rangle = \delta_{\alpha\beta}.$$

(ز) مجموعه‌ی $\{\nu_{\alpha}\}_{\alpha\in I}$ را یک **پایه** برای $\mathcal{H}$ گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

(i) به‌ازای‌هر $x \in \mathcal{H}$ خانواده‌ای از اسکالرها مانند $\{c_{\alpha}\}_{\alpha\in I}$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$x = \sum_{\alpha\in I} c_{\alpha}\nu_{\alpha}.$$

(ii) مجموعه‌ی $\{\nu_{\alpha}\}_{\alpha\in I}$ مستقل خطی باشد یعنی اگر ضرایب $\{c_{\alpha}\}_{\alpha\in I}$ موجود باشند به‌طوری‌که $\sum_{\alpha\in I} c_{\alpha}\nu_{\alpha} = 0$، آن‌گاه به‌ازای‌هر $\alpha \in I$ بتوان نتیجه گرفت $c_{\alpha} = 0$.

(ح) دنباله‌ی $\{\nu_{\alpha}\}_{\alpha\in I}$ را در $\mathcal{H}$ **کامل** گوییم اگر تنها عضو عمود بر این خانواده صفر باشد یعنی اگر $x \in \mathcal{H}$ چنان باشد که به‌ازای‌هر $\alpha \in I$ $\langle x, \nu_{\alpha}\rangle = 0$ آن‌گاه، $x = 0$؛ و یا به عبارت دیگر $\overline{span}\{\nu_{\alpha}\} = \mathcal{H}$. اگر فضایی کامل نباشد آن را **غیرکامل** می‌نامیم.

(ط) هر مجموعه‌ی متعامد یکّه که در فضای $\mathcal{H}$ کامل باشد یک **پایه‌ی متعامد یکّه** نامیده می‌شود.

تذکر ۱.۳.۲ . *[15, 14.4.1] اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد آن‌گاه هر دو پایه از $\mathcal{H}$ عدد اصلی یکسان دارند. این گزاره به ما اجازه می‌دهد که **بعد** یک فضای هیلبرت با بعد متناهی را عدد اصلی هر یک از پایه‌های آن تعریف کنیم که با $\dim X$ نشان می‌دهیم.*

*گوییم فضای $\mathcal{H}$ دارای **بعد متناهی** است هرگاه عدد اصلی پایه متناهی باشد.*

مثال ۱.۳.۳ . *فرض کنیم برای $n \in \mathbb{N}$، e_n عضوی از $\ell^2(\mathbb{N})$ باشد که مؤلفه‌ی n -ام آن ۱ و بقیه مولفه‌های آن صفر باشد. در این صورت $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ برای $\ell^2(\mathbb{N})$ پایه‌ی متعامد یکّه است که پایه‌ی **متعامد استاندارد** نامیده می‌شود.*

قضیه ۴.۳.۱. نامساوی بسل[۸] *[15, 8.4.1]* فرض کنیم دنباله‌ی $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک مجموعه‌ی متعامد و $x \in \mathcal{H}$ باشد، در این صورت

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid \langle x, e_n \rangle \mid^2 \leqslant \parallel x \parallel^2 .$$

نتیجه ۵.۳.۱. *[15, 9.4.1]* اگر $\mathcal{E}$ مجموعه‌ای متعامد در $\mathcal{H}$ باشد و $x \in \mathcal{H}$ ، آن‌گاه برای حداکثر تعدادی شمارا از بردارهای $e \in \mathcal{E}$، $\langle x, e \rangle \neq 0$ است.

قضیه ۶.۳.۱. *[1, 34.4][34, 4.18]* هر فضای هیلبرت دارای پایه‌ای متعامد یکّه است و هر خانواده‌ی متعامد یکّه در یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر $\mathcal{H}$ شمارا است.

قضیه ۷.۳.۱. زیرمجموعه M در $\mathcal{H}$ کامل است اگر و تنها اگر از $x \perp M$ نتیجه شود که $x = 0$ است.

قضیه ۸.۳.۱. *[1, 34.2]* فرض کنیم $\{\nu_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک مجموعه‌ی متعامد یکّه در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. دراین‌صورت احکام زیر هم‌ارزند:

(الف) دنباله‌ی $\{\nu_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک پایه‌ی متعامد یکّه برای $\mathcal{H}$ است؛

(ب) به‌ازای‌هر $x \in \mathcal{H}$، $x = \sum_{\alpha \in I} \langle x, \nu_\alpha \rangle \nu_\alpha$؛

(ج) به‌ازای‌هر $x \in \mathcal{H}$، $\langle x, y \rangle = \sum_{\alpha \in I} \langle x, \nu_\alpha \rangle \langle \nu_\alpha, y \rangle$؛

(د) به‌ازای‌هر $x \in \mathcal{H}$، $\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in I} |\langle x, \nu_\alpha \rangle|^2$، این تساوی به **اتحاد پارسوال**[۹] معروف است؛

(ه) $\overline{span}\{\nu_\alpha\}_{\alpha \in I} = \mathcal{H}$؛

(و) اگر $x \in \mathcal{H}$ و اگر به‌ازای‌هر $\alpha \in I$ داشته باشیم $\langle x, \nu_\alpha \rangle = 0$، آن‌گاه $x = 0$.

قضیه ۹.۳.۱. *[15, 13.4]* برای زیرمجموعه‌ی متعامد یکّه‌ی $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ در $\mathcal{H}$ احکام زیر هم ارزند:

(الف) $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ کامل است؛

(ب) برای هر $x \in \mathcal{H}$ فرمول **پلانچرل** [۱۰] برقرار است

$$\parallel x \parallel^2 = \sum_{\alpha \in I} \mid \langle x, e_\alpha \rangle \mid^2;$$

---

[۸] Bessel

[۹] Parseval

[۱۰] Plancherel

(ج) به ازای هر $x \in \mathcal{H}$ داریم

$$x = \sum_{\alpha \in I} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha.$$

دراین حالت ضرایب منحصربه‌فرد $\{\langle x, e_\alpha \rangle\}_{\alpha \in I}$ را **ضرایب فوریه** [۱۱] x (نسبت به پایه‌ی متعامد یکّه‌ی $(\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۳.۱. دنباله‌ی کامل $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ را در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ **پایه‌ی ریتس** [۱۲] می‌نامیم هرگاه به‌ازای‌هر دنباله‌ی متناهی $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ از اسکالرها اعداد $B, A > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که داشته باشیم

$$A \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \leqslant \| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n x_n \|^2 \leqslant B \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2.$$

در صورتی‌که $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathcal{H}$ پایه‌ی ریتس برای $\overline{span}\{x_n\}$ باشد آن را یک **دنباله ریتس** می‌نامیم.

A و B را کران‌های بالایی و پایینی پایه‌ی ریتس می‌نامیم و **ثابت پایه‌ی ریتس** برابر است با ماکسیمم، کران بالای پایه‌ی ریتس و عکس کران پایین پایه‌ی ریتس؛ یعنی

$$\text{ثابت پایه‌ی ریتس} = \max\{B, \frac{1}{A}\}.$$

قضیه ۱۱.۳.۱. *[14, 2.3.4]* فرض کنیم $x \in \mathcal{H}$. دراین‌صورت

$$\|x\| = \sup\{|\langle x, y \rangle| \quad ; \quad y \in \mathcal{H} \ , \ \|y\| = 1\}.$$

۴.۱ عملگرها

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای برداری مختلط باشند. نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ را یک **عملگر خطی** می‌نامیم هرگاه به‌ازای‌هر $x, y \in X$ و هر اسکالر $\alpha \in \mathbb{C}$، $T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$.

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنید X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. دراین‌صورت **نرم عملگر خطی** T را با $\|T\|_{op}$ یا $\| T \|$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}\|T\|_{op} = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leqslant 1\} &= \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0\} \\ &= \inf\{M > 0 : \|Tx\| \leqslant M\|x\|, \forall x \in X\}.\end{aligned}$$

---

[۱۱] Fourier

[۱۲] Riesz

عملگر خطی T را ***کران‌دار*** نامیم درصورتی‌که $\|T\| < \infty$، و در غیراین‌صورت آن را عملگر خطی ***بی‌کران*** می‌نامیم. مجموعه‌ی تمام تبدیلات خطی کران‌دار از X به Y را با $B(X,Y)$ نمایش می‌دهیم. اگر $X = Y$، T را عملگری روی X می‌نامیم و $B(X,X)$ را با $B(X)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۴.۳. *[33, 4.1] مجموعه‌ی $B(X,Y)$ با نرم عملگر یک فضای نرم‌دار تشکیل می‌دهد. اگر Y فضای باناخ باشد، آن‌گاه $B(X,Y)$ نیز یک فضای باناخ است.*

تذکر ۱.۴.۴. *اگر $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ فضاهای هیلبرت و $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ مجموعه‌ی تمام تبدیلات خطی کران‌دار از $\mathcal{H}_1$ به $\mathcal{H}_2$ باشد، آن‌گاه این مجموعه با نرم $\| T \|_{op}= \sup_{\|x\|_{\mathcal{H}_1} \leqslant 1} \| Tx \|_{\mathcal{H}_2}$ یک فضای باناخ است. اگر $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$، آن‌گاه فضای $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ را با $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ نمایش می‌دهیم.*

اگر $Y = \mathbb{C}$، آن‌گاه T را ***تابعک خطی*** می‌گوییم. مجموعه‌ی تمام تابعک‌های خطی و کران‌دار روی X را با X^* نشان می‌دهیم و ***فضای دوگان*** X می‌نامیم. اثر یک عضو دلخواه $x^* \in X^*$ بر عضو دلخواه $x \in X$ را ممکن است به‌صورت $\langle x, x^* \rangle$ نشان دهیم.

زیرفضاهای $N_T = \{x \in X : T(x) = 0\}$ و $R_T = \{y \in Y : T(x) = y \quad \text{به‌ازای } x \in X \text{ ای}\}$ را به‌ترتیب ***فضای پوچ*** و ***فضای برد*** T می‌نامیم.

قضیه ۱.۴.۵. *[15, 2.1.2] فرض کنیم $\mathcal{H}_1$، $\mathcal{H}_2$ و $\mathcal{H}_3$ سه فضای هیلبرت باشند. دراین‌صورت احکام زیر برقرارند:*

(الف) اگر $S,T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$، آن‌گاه $S+T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ و $\| S+T \| \leqslant \| S \| + \| T \|$.

(ب) به‌ازای‌هر $\lambda \in \mathbb{F}$ و هر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ داریم $\lambda T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ و $\| \lambda T \| = | \lambda | \| T \|$.

(ج) اگر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ و $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_3)$، آن‌گاه $ST \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_3)$ و همچنین خواهیم داشت

$$\| ST \| \leqslant \| S \| \| T \| .$$

قضیه ۱.۴.۶. *[33, 4.10] فرض کنیم X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. اگر $T \in B(X,Y)$، آن‌گاه عملگر یکتای $T^* \in B(Y^*,X^*)$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $x \in X$ و هر $y^* \in Y^*$، $\langle Tx, y^* \rangle = \langle x, T^*y^* \rangle$.*
*همچنین $\|T^*\| = \|T\|$ و عملگر T^* را ***الحاقی*** عملگر T می‌نامیم.*

گزاره ۱.۴.۷. *[15, 2.1.3] اگر $T = T^*$، آن‌گاه $\| T \| = \sup\{| \langle Th, h \rangle | : \| h \| = 1\}$.*

تعریف ۱.۴.۸. فرض کنیم $\boldsymbol{I}$ عملگر همانی بر X باشد. دراین‌صورت عملگر $T \in B(X)$ را ***وارون‌پذیر*** نامیم هرگاه عملگر $S \in B(X)$ موجود باشد به‌طوری‌که $ST = \boldsymbol{I} = TS$؛ و می‌نویسیم $S = T^{-1}$.

تعریف ۹.۴.۱. مجموعه‌ی همه‌ی عملگرهای خطی کران‌دار از $\mathcal{H}_1$ به $\mathcal{H}_2$ را که دارای وارون کران‌دار هستند با $GL(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ نمایش می‌دهیم. اگر $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1=\mathcal{H}_2$، آن‌گاه مجموعه‌ی $GL(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ را با $GL(\mathcal{H})$ نمایش می‌دهیم.

نتیجه ۱۰.۴.۱. (الف) اگر $T\in GL(\mathcal{H})$، آن‌گاه $T^{-1}\in GL(\mathcal{H})$.

(ب) اگر $S,T\in GL(\mathcal{H})$، آن‌گاه $ST\in GL(\mathcal{H})$.

قضیه ۱۱.۴.۱. *[34, 5.10]* فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ و T یک تبدیل خطی کران‌دار از X به‌روی Y باشد که یک‌به‌یک نیز هست. دراین‌صورت عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به‌طوری‌که $\| Tx \| \geqslant \delta \| x \|$؛ به‌عبارت‌دیگر T^{-1} یک تبدیل خطی کران‌دار از Y به X است.

قضیه ۱۲.۴.۱. *[34, 12.9]* فرض کنیم X ، Y و Z فضاهای نرم‌دار باشند ، $\alpha\in\mathbb{C}$ ، $U,T\in B(X,Y)$ و $S\in B(Y,Z)$. دراین‌صورت احکام زیر برقرارند:

(الف) $(\alpha T+U)^*=\alpha T^*+U^*$.

(ب) $(ST)^*=T^*S^*$.

(ج) اگر T وارون‌پذیر با وارون T^{-1} باشد، آن‌گاه T^* نیز وارون‌پذیر است و $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$.

قضیه ۱۳.۴.۱. *[14, 2.2.3]* **(قضیه نویمان[13])** اگر X یک فضای برداری نرم‌دار و $T\in B(X)$ باشد و $\|\boldsymbol{I}-T\|<1$ که در آن $\boldsymbol{I}$ نگاشت همانی است، آن‌گاه T وارون‌پذیر است و داریم

$$T^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(\boldsymbol{I}-T)^k.$$

تعریف ۱۴.۴.۱. فرض کنیم $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$. دراین‌صورت

(الف) عملگر T را **خودالحاق** گوییم هرگاه $T=T^*$؛ به عبارت دیگر هرگاه به‌ازای‌هر $x,y\in\mathcal{H}$، داشته باشیم $\langle Tx,y\rangle=\langle x,Ty\rangle$.

(ب) عملگر T را **مثبت** گوییم هرگاه به‌ازای‌هر $x\in\mathcal{H}$، $\langle Tx,x\rangle\geq 0$ و می‌نویسیم $T\geq 0$.

(ج) عملگر T را **قطری** نسبت به پایه‌ی $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ با قطر $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ گوییم هرگاه به‌ازای‌هر $x\in\mathcal{H}$ شرط زیر برقرار باشد:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n \Longrightarrow T(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\alpha_n e_n$$

[13] Neumann