بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی «نوشیروانی» بابل

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

موضوع:

وجود جوابهای مثبت مسئله مقادیر مرزی برای معادله دیفرانسیل کسری غیرخطی

استاد راهنما:

دکتر عزیز ا... باباخانی

استاد مشاور:

دکتر سمیه خادملو

نگارش:

سمانه مؤمنی

تابستان ۱۳۹۰

قدردانی و تشکر:

خداوند را شاکرم که خواسته بنده خود را پاسخ گفت و او را با نعمت کسب علم بیاراست.

از حمایت های بی دریغ و کوشش های صبورانه استاد راهنمای گرامی جناب آقای دکتر عزیزا... باباخانی که به منظور رفع نقایص این کار تحقیقاتی زمان باارزش خویش را صرف و در طول دوره کارشناسی ارشد پاسخ گوی مسائل و مشکلات اینجانب بوده، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

تقدیم به:

- تقدیم به پدر و مادر مهربانم که در تمام لحظات عمر پشتیبانم بوده اند و در رسیدن به اهدافم یاریم نموده اند و همواره چراغ امید را در دلم زنده نگه داشته اند.
- و همسر فداکار و دو برادر عزیزم که آفتاب صمیمت و مهربانی از آیینه ی رخسارشان تابان است.

چکیده

در این پایان نامه پس از معرفی مفاهیم مورد نیاز در فصل یک، در فصل دوم به معرفی مشتق و انتگرال کسری می پردازیم. در این فصل پس از معرفی مشتق و انتگرال کسری ریمان- لیوویل و گرونوالد- لتینکوف به بیان خواص و ارتباط جبری بین آنها و همچنین ترکیب آنها با مشتق معمولی توجه می کنیم و در ادامه فصل چند کسری را ارائه می دهیم. مثال از مشتقات و در دیفرانسیل کسری غیرخطی می پردازیم فصل سوم به تجزیه و تحلیل وجود جوابهای مثبت مسئله مقادیر مرزی برای معادله و در پایان این فصل چند مثال برای روشن تر شدن نتایج حاصله ارائه می گردد.

فهرست مطالب

عنوان..صفحه

عنوان...صفحه

مقدمه

حساب دیفرانسیل کسری از قرن ۱۷ آغاز شد و بحث های اولیّه این شاخه به کارهای لایب نیتز، اویلر لاگرانژ، لاپلاس، آبل، ریمان- لیوویل و... برمی گردد اولین گزارش مربوط به تعمیم مشتقات معمولی به مشتقات کسری منسوب به لایب نیتز وهوپیتال است که در آن هوپیتال از لایب نیتز می پرسد که در نماد $\frac{d^n}{dt^n}$، به جای nعدد $\frac{۱}{۲}$ قرار دهیم چه اتفاقی می افتد. لاپلاس (۱۸۱۲) مشتقات کسری را به صورت یک انتگرال تعریف کرد و در سال (۱۸۱۹) لاکرویکس مشتقات کسری با مرتبه دلخواه با تعمیم فرمول مشتق معمولی زیر:

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} \ , \ m \geq n \ , \ m,n \in N, \qquad (۱)$$

مورد توجه قرار داد و برای هر mو υ فرمولی بصورت زیر ارائه نمود.

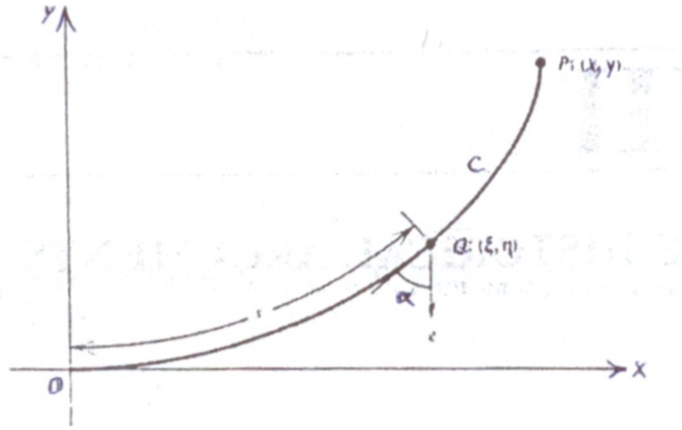
$$\frac{d^\upsilon x^m}{dx^\upsilon} = \frac{\Gamma(m+۱)}{\Gamma((m-\upsilon+۱)^x} x^{m-\upsilon}. \qquad (۲)$$

آبل اوّلین کسی است که عملگرهای کسری را مستقیماً برای حل یک معادله انتگرال مورد استفاده قرار داد. معادله انتگرالی که آبل برای آن از عملگر کسری برخورد کرد، هنگام حل یک مسأله همزمان بود که امروزه به مسأله همزمان آبل[1] معروف است. این مسئله در خصوص یافتن یک منحنی به طوری که زمان پایین آمدن یک جرم از نقطه ای بدون اصطکاک و تحت تأثیر یک میدان گرانشی روی این منحنی است بطوری که مستقل از نقطه آغازین باشد. بنابراین معادله انتگرال آبل به صورت زیر خواهد بود:

[1] . Abel's Integral Equation and the Tautochorne Problem.

که k ثابت انتگرال گیری است.

$$k = \int_0^x (x-t)^{\alpha} f(t)dt \qquad (۳)$$



شکل۱: زمان رسیدن جسم از نقطه p به o برابر زمان پایین آمدن جسم از نقطه q است

که البته امروزه معادله فوق وقتی $\alpha = \frac{-1}{2}$ به معادله انتگرال آبل معروف است. این معادله انتگرال معادله فوق صرف نظر از ضریب $\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}$، یک حالت خاص از انتگرال کسری ریمان- لیوویل است.

آبل با اثر دادن عملگر کسری $\frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}$ بر دو طرف معادله، آن را حل کرد.

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}k}{dx^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\pi} f(x) \qquad (٤)$$

زیرا عملگرهای کسری خواص زیر را دارند:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} = \left[\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{-\frac{1}{2}}} f\right] = \frac{d^{0} f}{dx^{0}} = f$$

فرمول انتگرال فوریه و جواب آبل مورد توجه لیوویل قرار گرفت. لیوویل نظریه حساب کسری را توسعه داد و آنها را در مسائل تئوری پتانسیل به کار برد.

امروزه اصطلاح حساب کسری عبارت است از حساب مربوط به انتگرال و مشتق گیری از مرتبه دلخواه به طوری که مرتبه مشتق بتواند، گویا، گنگ و حتی مختلط باشد. در مورد مرتبه گویا کارهای مختلفی صورت گرفته است ولی تحلیل مختلط مشتقات وانتگرالهای کسری توسط سریواستاوا و اُوا بحث شده است.

مشتقات وانتگرال های کسری بحث های صرفاً ریاضی نیستند بلکه کاربردهای فراوانی در مدارهای الکتریکی، شیمی، تجزیه چند قطبی های کسری، فرموله کردن مسائل فیزیک، شیمی و علوم بیولوژیکی دارد.

اخیراً کاربردهای معادلات دیفرانسیل کسری شامل عملگر دیفرانسیلی ریمان- لیوویل در زمینه های مختلفی نظیر دینامیک محاسباتی سیالات، پردازش سیگنال، بیوفیزیک، پلیمر ومکانیک آماری دیده شده است.

حساب کسری به فرم فرکتالی از توابع نظیر توابع وایرشتراس و همچنین توابع پله ای مطرح شده است. تمام بحث ها و مطالعات انجام شده در این شاخه بر پایه تعاریف موجود از مشتق و انتگرال کسری بنا شده است. تعاریف مختلفی ازمشتق وانتگرال کسری وجود دارند که منشأ متفاوتی دارند و لزوماً معادل یکدیگر نیستند. مطالب این پایان نامه بصورت ذیل سازماندهی شده است.

ما پس از معرفی مفاهیم اولیه مورد نیاز در فصل یک، معروف ترین تعاریف موجود مشتق های کسری یعنی تعریف ریمان- لیوویل و گرونوالد- لیتنکوف را در فصل دو مطرح می کنیم و خواص آنها را از قبیل منشأ و پیدایش تعریف، ترکیب آنها با مشتقات معمولی، مشتقات کسری و انتگرال کسری مورد بحث قرار دادیم. و چند مثال برای این دسته از معادلات را نیز ارائه می دهیم.

فصل سوم را با معرفی وجود جوابهای مثبت مسئله مقادیر مرزی برای معادله ی دیفرانسیل کسری غیرخطی آغاز می کنیم سپس وجود یکتایی جواب این معادلات را در قالب قضیه هایی بیان و ثابت می کنیم. و چند مثال برای این دسته از معادلات ارائه می دهیم.

فصل اول:

مفاهیم اولیه و معرفی توابع خاص

۱. ۱ مقدمه

تابع نمایی یکی از ابزارهای مهم و پایه ای در حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری می باشند که خواننده علاقمند به این شاخه از ریاضیات لازم است تا با این تابع و برخی از خواص آنها آشنا باشد. لذا در این فصل پس از معرفی تعدادی از توابع خاص نظیر تابع گاما، تابع بتا به معرفی چند قضیه مهم می پردازیم. که در حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل کسری مورد استفاده قرار می گیرند، توابع نمایی دارای خواص بسیاری هستند، بدیهی است که اثبات و بیان تمام این خواص و قضایای مربوطه از حوصله این پایان نامه خارج است وبحث های تکمیلی این قسمت را به منابع مربوطه ارجاع می دهیم.

۱. ۲ تابع لگاریتم طبیعی و تابع نمایی

می توان گفت که در تمام بحث های معادلات دیفرانسیل توابعی که بیش از همه مورد توجه است تابع لگاریتم طبیعی و معکوس آن تابع نمایی است.

۱. ۲. ۱ **تعریف.** تابع لگاریتم طبیعی بصورت زیر تعریف می شود:

$$Lnx = \int_{1}^{x} \frac{1}{t}dt, \qquad x > 0 \qquad (1-1)$$

Lnx، تابعی با دامنه تمام اعداد مثبت است که در سراسر دامنه اش پیوسته و مشتق پذیر می باشد. چون تابع لگاریتم طبیعی در دامنه اش پیوسته و صعودی است لذا دارای معکوس می باشد[۱]، معکوس تابع لگاریتم طبیعی تابع نمایی نامیده می شود. و می دانیم معکوس تابع Lnx تابع e^x می باشد.

مهمترین خاصیت تابع نمایی این است که مشتق آن برابر خودش می باشد. این خاصیت پایه و اساس روش حل معادلات و دیفرانسیل خطی معمولی با ضرایب ثابت را هدایت می نماید.

۱. ۳ تابع گاما

یکی از توابع اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری تابع گامای اویلر است که تعمیمی از تابع n! می باشد و این امکان را فراهم می کند که در n! ، n می تواند غیرصحیح و حتی مختلط باشد.

۱. ۳. ۱**تعریف.** فرض کنید z یک متغیر مختلط در نیم صفحه راست صفحه مختلط $\not\subset$ باشد یعنی $\operatorname{Re} z > ۰$ باشد، تابع گامایz را با $\Gamma(z)$ نمایش داده:

$$\Gamma(z) = \int_۰^\infty t^{z-۱} e^{-t}\,dt. \qquad (۲-۱)$$

این تابع در نیم صفحه در نظر گرفته شده همگراست. تابع گاما یک نمایش حدی دارد که بصورت زیر تعریف می شود:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+۱)(z+۲)...(z+n)} \quad , \quad \operatorname{Re} z > ۰ \qquad (۳-۱)$$

مهمترین خاصیت تابع گاما رابطه بازگشتی زیر باشد:

$$\Gamma(z+۱) = z\Gamma(z) \qquad (٤-۱)$$

[۱]. لوئیس لیتهلد، حساب دیفرانسیل و انتگرال، جلد اول، فصل ۸.

که با استفاده از انتگرال گیری به روش جز به جزء به سادگی قابل اثبات است، یعنی

$$\Gamma(z+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^z dt=\left[-e^{-t}t^z\right]_{t=0}^{t=\infty}+z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt=z\Gamma(z) \qquad (1-5)$$

به وضوح $\Gamma(1)=1$ و برای $z=2,3,...$ با استفاده از رابطه بازگشتی خواهیم داشت:

$$\Gamma(2)=1.\Gamma(1)=1$$

$$\Gamma(3)=2.\Gamma(2)=2.1!=2!$$

$$\Gamma(4)=3\Gamma(3)=3.2!=3!$$

....

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n.(n-1)!=n!$$

خاصیت مهم دیگر تابع گاما به عبارتست از:

$$\Gamma(z+n)\Gamma(-z-n+1)=(-1)^n\Gamma(z)\Gamma(1-z) \qquad (1-6)$$

بدین ترتیب $\alpha!$ را حتی اگر α عدد صحیح مثبت نباشد، به صورت $\alpha!=\Gamma(\alpha+1)$ تعریف می کنیم.

به عنوان مثال، ضرایب بسط دوجمله ای نیوتن را می توان بر حسب تابع گاما بیان کرد یعنی:

$$\binom{-z}{\xi}=\frac{\Gamma(1-z)}{\Gamma(\xi+1)\Gamma(1-z-\xi)}. \qquad (1-7)$$

در حالت خاص اگر ξ یک عدد صحیح نامنفی باشد آنگاه از (1-7)داریم:

$$\binom{-z}{n}=\frac{\Gamma(1-z)}{n!\Gamma(1-z-n)}=(-1)^n\frac{\Gamma(z+n)}{n!\Gamma(z)}=(-1)^n\binom{z+n-1}{n} \qquad (1-8)$$

۱. ٤ تابع بتا

در بسیاری از حالات بهتر است به جای ترکیبی از مقادیر معین تابع گاما از تابعی موسوم به تابع بتا استفاده کنیم. تابع بتا غالباً به صورت زیر تعریف می شود:

$$B(z,w)=\int_{0}^{1}t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt\ ,\qquad \mathrm{Re}(z)>0,\mathrm{Re}(w)>0 \qquad (۹-۱)$$

برای بدست آوردن رابطه بین تابع بتا و تابع گاما از تبدیل لاپلاس استفاده میکنیم که به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$h_{z,w}(t)=\int_{0}^{t}\tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau. \qquad (۱۰-۱)$$

واضح است که $h_{z,w}(t)$ یک کانولوشن از توابع t^{z-1} و t^{w-1} می باشد و $h_{z,w}(1)=B(z,w)$.

با توجه به اینکه کانولوشن دو تابع برابر حاصلضرب تبدیل لاپلاس آن دو تابع است، داریم:

$$h_{z,w}(s)=\frac{\Gamma(z)}{s^{z}}.\frac{\Gamma(z)}{s^{w}}=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}} \qquad (۱۱-۱)$$

که $h_{z,w}(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $h_{z,w}(t)$ است.

به عبارت دیگر چون $\Gamma(z)\Gamma(w)$ ثابت است می توان $h_{z,w}(t)$ را با گرفتن معکوس تبدیل لاپلاس معکوس از طرفین رابطه (۱-۱۱) بصورت (۱-۹) بدست آورد. بنابراین خواهیم داشت:

$$h_{z,w}(t)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}t^{z+w+1} \qquad (۱۲-۱)$$

اگر در (۱-۹) قرار دهیم $t=1$ نتیجه مورد نظر حاصل می شود، یعنی:

$$B_{z,w}=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \qquad (۱۳-۱)$$

به کمک تابع بتا می توان خواص دیگری از تابع گاما را بدست آورد یکی از این خواص عبارتست از:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin \pi z} \qquad (1-14)$$

در حالت خاص اگر در(۱-۱٤) $z=\frac{1}{2}$ قرار دهیم فرمول معروف $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ حاصل می شود این فرمول در تعیین مقادیر تابع گاما در بسیاری از نقاط مورد استفاده قرار می گیرد. خاصیت دیگری از تابع گاما که به سادگی از تابع بتا نتیجه می شود فرمول لژاندر است:

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}2^{2z-1}\Gamma(2z),2z\neq 0,-1,-2,... \qquad (1-15)$$

۱. ۵ تابع گامای ناقص

از بین توابع نمایی که در حساب کسری مورد استفاده قرار می گیرند تابع گامای ناقص و توابع مربوط به آن از اهمیت ویژه ای برخوردار هستند. در این قسمت ما به معرفی صوری تابع گامای ناقص می پردازیم و خواص و توابع مربوط به آنرا پس از تعریف مشتق و انتگرال کسری مورد بحث قرار می دهیم.

تابع گامای ناقص به صورت زیر تعریف می شود:

$$\gamma^*(\nu,z)=e^{-z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\nu+k+1)} \qquad (1-16)$$

که یک تابع کامل هم نسبت به z و هم نسبت به ν است یعنی در تمام صفحه تحلیلی می باشد. اگر $\operatorname{Re} z>0$ آنگاه $\gamma^*(\nu,z)$ دارای نمایش انتگرالی زیر است:

$$\gamma^*(\nu,z)=\frac{1}{\Gamma(\nu)z^{\nu}}\int_0^z t^{\nu-1}e^{-t}dt \qquad (1-17)$$

۱. ٦ مروری بر، بعضی از مفاهیم آنالیز تابعی

در این پایان نامه، قضیه نگاشت نقطه ثابت باناخ و قضیه ی آرزلا- آسکولی نقش اساسی دارند. بدین ترتیب در این قسمت به بیان این دو قضیه و چند تعریف می پردازیم.

۱. ٦. ۳ تعریف. نگاشت T از فضای متریک (X,d) به داخل خودش یک نقطهٔ ثابت u دارد اگر یک $u \in X$ وجود داشته باشد که $Tu = u$.

۱. ٦. ٤ قضیه [قضیه نقطه ثابت باناخ]. هرگاه T یک نگاشت انقباض بر فضای متری تام (کامل) X باشد آنگاه نقطه منحصر بفردی مانند $x \in X$ است که $Tx = x$.

۱. ٦. ٥ تعریف. فرض کنید $C[a,b]$ نشان دهندهٔ مجموعهٔ همهٔ توابع پیوسته حقیقی مقدار روی $[a,b]$ باشد در این صورت $C[a,b]$ یک فضای متری با مترهای زیر می باشد:

$$d_۱(f,g) = \sup | f(x) - g(x) |; \qquad f,g \in C[a,b] \qquad (۱۸-۱)$$

$$d_۲(f,g) = \int_a^b | f(x) - g(x) |; \qquad f,g \in C[a,b] \qquad (۱۹-۱)$$

۱. ٦. ٦ تعریف. فضای برداری مختلط X را یک فضای خطی نرمدار نامیم اگر به هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\| x \|$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشد که:

(آ) به ازای هر x, y در X، $\quad \| x + y \| \le \| x \| + \| y \|$؛

(ب) اگر $x \in X$ و α یک عدد اسکالر باشد، $\quad \| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$؛

(پ) $\| x \| = ۰$ تساوی $x = ۰$ را ایجاب نماید.

بنا بر (آ)، نامساوی مثلثی برقرار است:

$$\| x - y \| \le \| x - z \| + \| z - y \| \qquad (x, y, z \in X) \qquad (۲۰-۱)$$

این در تلفیق با (ب) (فرض $\alpha=0$ و $\alpha=-1$) و (پ) نشان می دهد که هر فضای خطی نرمدار را می توان یک فضای متری گرفت؛ فاصله ی بین y,x مساوی $\|x-y\|$ است.

هر **فضای باناخ** یک فضای خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به وسیلهٔ نرمش **تام** می باشد.

۱. ٦. ۷ تعریف. فرض کنیم X یک فضای نرمدار باشد برای هر $u_0 \in X$ و $\varepsilon>0$ مجموعهٔ $N_\varepsilon(u_0)=\{u\in X : \|u-u_0\|<\varepsilon\}$ یک $\varepsilon-$ همسایگی نقطهٔ u_0 نامیده می شود. زیر مجموعهM از $\bar{X}$ باز نامیده می شود اگر و فقط اگر برای هر نقطه $u_0 \in M$ در $\varepsilon-$ همسایگی $N_\varepsilon(u)$ داشته باشیم $N_\varepsilon(u_0)\subseteq M$ یعنی به ازای هر $u_0 \in M$ وجود داشته باشد. یک $\varepsilon>0$بطوری که $N_\varepsilon(u_0)\subseteq M$.

زیر مجموعهٔ M از X بسته نامیده می شود اگر و فقط اگر $X-M$ باز باشد.

۱. ٦. ۸ تعریف. نگاشت T در فضای متریک (X,d) که $T:X\to X$ را نگاشت پیوسته لیپ شیتز گویند اگر یک عدد حقیقی مثبت $0\le\alpha\le 1$ وجود داشته باشد:

$$d(Tx,Ty)\le \alpha d(x,y);\quad \forall x,y\in X \tag{۱-۲۱}$$

آنگاه T را نگاشت انقباضی گویند و α را عامل انقباض T می نامند.

اکنون اگر در تعریف بالا توان α از مرتبه ی یک باشد شرط لیپ شیتز را بصورت زیر داریم:

$$d(T(x_1),T(x_2))\le \alpha d(x_1,x_2) \tag{۱-۲۲}$$

۱. ٦. ۹قضیه [قضیه آرزلا- اسکولی]. فرض کنیم u یک فضای متریک فشرده و s یک زیر مجموعه C(u) باشد. سپس شرایط زیر با یکدیگر معادلند:

آ) S یک زیر مجموعهٔ فشرده فضای متریک C(u) مجهز به فضای متریک یکنواخت است

ب) S بسته، کراندار و هم پیوسته است.

فصل دوم:

مشتقات و انتگرال های کسری