دانشگاه گیلان

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

بررسی و طراحی کنترل مقاوم

از:

هاجر حسابی راد

استاد راهنما:

دکتر محمد کیانپور

شهریور ۹۰

در ظل توجهات امام عصر (عج) و با آرزوی تعجیل در فرج ایشان

تقدیم به

پدرم زیباترین واژه زندگی و مادر فداکارم، فرشته مهربانی.

آنان که چون شمع سوختند تا زندگی ام روشن بماند.

قامت شان چون کوه، استوار و سایه شان بر سرم مستدام باد(ان شاالله).

تقدیم به

همراه خوب زندگی ام

او که به راستی واژه همدلی و همراهی را معنای تازه بخشید.

و

یگانه میوه زندگی ام

محمد مهدی.

هوالعلیم

اللهم صل علی محمد و آل محمد و عجل فرجهم

من لم یشکر المخلوق، لم یشکر الخالق

پس از حمد و ثنای حق که فضل و رحمت نا منتهایش همواره شامل حال حقیر بوده و هست و سلام و صلوات بر آخرین فرستاده اش که رحمت للعالمین است، برخود واجب می دانم از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر محمد کیانپور که به حق، بدون مساعدت ها و راهنمایی های استادانه شان انجام این امر میسر نبود، تقدیر و تشکر نمایم. راهنمایی های ارزنده ایشان بود که چراغ مطالعه و تحقیق در وجودم برافروخته شد. برای ایشان آرزوی سلامتی و توفیق هر چه بیشتر دارم. هم چنین از داوران گرامی که با بردباری شان، پایان نامه حقیر را مورد مطالعه قرار دادند، تقدیر و تشکر می کنم. در پایان از خانم طاهره اکبریان دوست بسیار عزیزم که دلگرم کننده حقیر در انجام این امر بودند نیز قدردانی می نمایم. برای این عزیزان توفیق، عزت و سربلندی را از درگاه حق خواهانم.

هاجر حسابی راد

شهریور 90

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فهرست جداول

فهرست اشکال

چکیده

بررسی و طراحی کنترل مقاوم

هاجر حسابی راد

در این پایان نامه کنترل مقاوم سیستم های خطی و غیر خطی را مورد مطالعه قرار می دهیم. در ابتدا از روش کنترل بهینه برای طراحیکنترل مقاوم استفاده می کنیم. در این روش، مسئله کنترل مقاوم را به کنترل بهینه تبدیل می کنیم. بسیاری از روش های حل مسئله کنترل مقاوم برای سیستم های خطی سودمندند. در حالی که این روش، برای سیستم های غیر خطی نیز کاراست.سپس از روش عددی آشفتگی هموتوپی برای حل مسئله کنترل مقاوم استفاده خواهیم کرد. سپس با استفاده از پایداری لیاپانوف، به بررسی سیستم های تحت اغتشاش می پردازیم. تابع لیاپانوف کنترل مقاوم را بیان کرده و نشان می دهیم وجود این تابع با پایدارپذیری مقاوم معادل است. در پایان با استفاده از این تابع، به طراحی کنترلی می پردازیم که کنترل مینیمم نرم نقطه به نقطه نامیده می شود.

کلید واژه: کنترل مقاوم، کنترل بهینه، تابع لیاپانوف کنترل مقاوم، پایدارپذیری مقاوم، کنترل مینیمم نرم نقطه به نقطه.

مقدمه

در کنترل کلاسیک، طراحی کنترل کننده بر اساس مدلی از سیستم واقعی صورت می گیرد. مدل سیستم تنها یک تقریب از دینامیک سیستم می باشد. بنابراین اهداف مورد نظر از مدل ممکن است به وسیله چنین طراحی هایی تحقق نیابد. نظریه کنترل مقاوم تلاشی برای از پیش رو برداشتن این مشکل است. در واقع کنترل مقاوم، کنترل در حضور عدم اطمینان[۱] هاست به طوری که رفتار و عملکرد سیستم در تمام حالات قابل قبول باشد. یکی از مسائل مهم در حضور عدم اطمینان و اغتشاش، پایداری سیستم کنترلی است. حفظ پایداری در حضور عدم اطمینان یکی از اهداف کنترل مقاوم است. نمایش فضای حالت و ماتریس تابع انتقال دو شکل متداول برای مدل سازی پدیده های فیزیکی اند[۱]. همه روش های طراحی کننده بر اساس مدلی از سیستم فیزیکی به طراحی می پردازند. در یک روند طراحی ممکن است هدف طراح، غلبه بر مشکل خاصی از سیستم باشد. بنابراین منطقی است که در مدل فقط پدیده هایی که در ارتباط با مسئله دارای اهمیت اند، منعکس شوند.
به طور خلاصه مهم ترین منابع ایجاد عدم اطمینان در مدل عبارتند از:

۱. دینامیک های سریع مدل نشده(فرکانس بالا)

۲. کاهش مرتبه مدل در جهت ساده سازی

۳. صرف نظر کردن از غیرخطی بودن معادلات

۴. تغییر مقادیر پارامتر های مدل

از عوامل ایجاد تغییر مقادیر پارامتر های مدل می توان به خطاهای اندازه گیری، خطاهای شناسایی و تغییر شرایط فیزیکی(دما، فشار و . . .) در برخی از سیستم ها اشاره کرد. علاوه بر این هرگاه یک سیستم غیرخطی حول یک نقطه کار خطی سازی شود، مقادیر پارامترهای سیستم خطی با جابه جایی نقطه کار تغییر می کند. برخی منابع، عدم اطمینان در مدل را اختلاف بین مدل و سیستم تعریف کرده اند. کنترل مقاوم تلاشی در جهت ایجاد مصالحه بین این دو وضعیت است.
اولین قدم در جهت حل مسئله کنترل مقاوم توسط اچ. اس. بلک [۲] صورت گرفته است. پس از آن نایکوئیست[۳] درک تحلیلی از مسئله ناپایداری دینامیکی را ارائه نمود. معیار پایداری نایکوئیست توسط بوده[۴]مطرح گردید. روش های بوده برای طراحی سیستم های مقاوم نیز توسط هرویتز [۵] تعمیم داده شد.

[۱] Uncertainty

[۲] H. S. Black

[۳] Nyquist

[۴] Bode

[۵] Hurwitz

فاصله زمانی ۱۹۲۷ تا ۱۹۶۰ دوره طراحی با حساسیت کلاسیک نامیده می شود. از مسائل مورد علاقه در این دوره می توان به پایداری، کاهش حساسیت و تضعیف اثر در سیستم های تک ورودی- تک خروجی($SISO$) اشاره کرد. فاصله زمانی ۱۹۶۰ تا ۱۹۷۵ در نظریه سیستم های کنترل یکی از مهم ترین دوره هاست و به دوره فضای حالت مشهور است. در ابتدای این دوره کالمن[۶] برخی مفاهیم اساسی مانند مفهوم متغیر حالت، کنترل پذیری، مشاهده پذیری پسخورد حالت بهینه و تخمین بهینه حالت را معرفی کرد. اواخر دهه هفتاد و اوایل دهه هشتاد میلادی اتفاقاتی در نظریه کنترل چند متغیره رخ داد که در شکل گیری دوره سوم کنترل مقاوم(۱۹۷۵ تا کنون) تاثیر فراوان داشته است. این فاصله زمانی را دوره پیشرفت کنترل مقاوم نامیده اند. دوره پیشرفت کنترل مقاوم مدیون کالمن و زمز [۷] است. سه مبحث مهم و تقریبا مستقل از یکدیگر در این دوره تولد یافته اند که عبارتند از:

۱. مقادیر تکین [۸]

۲. کنترل H_∞

۳. خاری تونوف [۹]

در ادامه روند پیشرفت نظریه کنترل مقاوم، مفهوم پایداری خصوصا پایداری لیاپانوف در کنترل مقاوم مطرح گردید. چگونگی پایدارسازی سیستم ها با وجود اغتشاشات و نیز دست یابی به کنترل مربوطه از جمله اهداف این مبحث است. پس از آن، روش کنترل بهینه برای حل مسائل کنترل مقاوم مطرح گردید که برای سیستم های خطی و غیرخطی مورد استفاده قرار می گیرد. در این پایان نامه سعی بر این بوده است که از دو روش اخیر برای بررسی و طراحی کنترل مقاوم استفاده شود. در این راستا، ابتدا در فصل اول، مفاهیم پایه ای سیستم های کنترل مطرح شده است. در ادامه به بیان پایداری لیاپانوف پرداخته ایم که جز اصلی ترین روش ها برای طراحی کنترل مقاوم سیستم ها می باشد. در پایان فصل اول نیز مفهوم پایدارپذیری ارائه شده است. در فصل دوم، مباحث مربوط به کنترل مقاوم سیستم های خطی را در چند حالت، از جمله برقراری و عدم برقراری شرط تطبیق و نیز عدم اطمینان در ماتریس ورودی را، بیان کرده و از روش کنترل بهینه برای دست یابی به کنترل مقاوم استفاده می کنیم. این روند را در فصل سوم، برای سیستم های غیرخطی مورد بحث قرار داده و در ادامه روش عددی را برای حل مسائل کنترل مقاوم ارائه می کنیم. در فصل چهارم با دید وسیع تری به مسئله کنترل مقاوم می پردازیم. در این فصل از نگاشت مجموعه مقدار برای بیان مسئله کنترل مقاوم بهره می گیریم و با استفاده از تابع لیاپانوفِ کنترلِ مقاوم، پایداری مقاوم را بررسی کرده و کنترل مورد نظر را استخراج می کنیم.

---

[۶] Kalman

[۷] Zames

[۸] Singular values

[۹] Kharitonov

فصل ۱

مفاهیم پایه

۱.۱ سیستم های کنترل

برای ورود به بحث سیستم های کنترل، تعاریف مقدماتی را مطرح می کنیم.

تعریف ۱.۱

۱. سیستم: ترکیبی از اجزاست که برای انجام عملی خاص باهم کار می کنند.

۲. متغیر کنترل شونده: کمیت یا وضعیتی است که اندازه گیری و کنترل می شود و به طور معمول، خروجی سیستم است.

۳. دستگاه: می تواند بخشی از یک تجهیزات یا مجموعه ای از اجزای ماشین باشد که با یکدیگر کار می کنند.

۴. اغتشاش گر[۱]: سیگنالی است که سعی در تاثیر بر مقدار خروجی سیستم دارد.

۵. متغیر کنترل: کمیت یا وضعیتی است که با تغییر آن، سعی در ایجاد وضعیت مطلوب در سیستم خواهیم کرد.

تعریف ۲.۱

۱. کنترل پسخوردی[۲]: منظور از کنترل پسخوردی یا فیدبک عملی است باوجود سیگنال اغتشاش گر باعث کاهش اختلاف بین خروجی سیستم و ورودی شود.

۲. سیستم های کنترل پسخوردی: سیستمی که برای ایجاد ارتباط مطلوب بین خروجی و ورودی از مقایسه آنها استفاده می کند، سیستم کنترل پسخوردی نامیده می شود. به چنین سیستم هایی، سیستم حلقه بسته [۳] نیز گویند.
سیستم کنترل دمای اتاق و بدن انسان نمونه هایی از این گونه اند. در بدن انسان هر دو کمیت دما و فشار خون بر مبنای پسخورد زیستی، ثابت نگه داشته می شود.

۳. سیستم کنترل حلقه باز[۴]: سیستم هایی که در آنها خروجی تاثیری بر عمل کنترل ندارد، سیستم کنترل حلقه باز می نامند. در یک سیستم کنترل حلقه باز، خروجی اندازه گیری نشده و برای مقایسه با ورودی پسخورد نمی شود. بنابراین به هنگام وجود سیگنال اغتشاش گر، معمولا یک سیستم کنترل

[۱] Disturbancer

[۲] Feedback control

[۳] Close loop

[۴] Open loop

حلقه باز به طور مطلوب عمل نمی کند.
ماشین لباسشویی نمونه ای یک سیستم کنترل حلقه باز است.

سیستم دینامیکی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}\dot{x_1} &= f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_p)\\ &\vdots\\ \dot{x_n} &= f_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_p)\end{aligned}$$

که $\dot{x_i}$ مشتق x_i نسبت به زمان است. $u_1, u_2, \cdots, u_p$ نیز متغیرهای ورودی سیستم هستند. متغیرهای $x_1, x_2, \cdots, x_n$ را متغیرهای حالت[۵] می نامیم. معادلات فوق را به صورت زیر بازنویسی می کنیم.

$$\dot{x} = f(t, x, u) \qquad (۱.۱)$$

معادله (۱.۱) را معادله حالت[۶]، x را متغیر حالت[۷] و u را متغیر ورودی[۸] می نامیم. گاهی همراه معادله (۱.۱)، معادله دیگری به شکل زیر بکار می رود.

$$y = h(t, x, u) \qquad (۲.۱)$$

این معادله بیانگر بردار q بعدی خروجی[۹] است که شامل متغیرهایی است که در تحلیل سیستم های دینامیکی، علاقه مندیم این متغیر ها را مورد بررسی قرار دهیم. معادله (۲.۱) را معادله خروجی[۱۰] و مجموعه معادلات (۱.۱) و (۲.۱) را مدل فضای حالت [۱۱] و یا به طور خلاصه مدل حالت[۱۲] می نامیم. اگر در معادله (۱.۱) متغیر u وجود نداشته باشد، خواهیم داشت

$$\dot{x} = f(t, x). \qquad (۳.۱)$$

[۵] State variables

[۶] State equation

[۷] State

[۸] Input

[۹] Output

[۱۰] Output equation

[۱۱] State-space model

[۱۲] State model

این معادله، موسوم به معادله حالت بدون ورودی است. یکی از حالات خاص رابطه (۳.۱) زمانی رخ می دهد که f تابع صریحی از t نباشد، یعنی

$$\dot{x} \;=\; f(x). \tag{۴.۱}$$

در چنین حالتی، سیستم را خودگردان[۱۳]یا نامتغیر با زمان[۱۴]گویند. رفتار چنین سیستمی نسبت به انتقال زمان تغییر نمی کند. زیرا تغییر متغیر زمان از t به $\tau \;=\; t-\alpha$ ، تغییری در سمت راست معادله حالت بوجود نمی آورد.

در سیستم های خطی، مدل فضای حالت (۱.۱) و (۲.۱) به شکل خاص زیر بیان می شود.

$$\dot{x} \;=\; A(t)x + B(t)u$$

$$y \;=\; C(t)x + D(t)u$$

در ادامه، مفهوم کنترل پذیری را تعریف می کنیم.

تعریف ۳.۱

کنترل پذیری حالت: سیستم را در زمان t_0 کنترل پذیر گوییم اگر بردار کنترلی موجود باشد که سیستم را از هر حالت اولیه $x(t_0)$ به هر حالت دلخواه $x(t_T)$ ببرد.

در کنترل پذیری اگر هر حالتی قابل کنترل باشد، گوییم حالت، کنترل پذیر کامل است.

این مفهوم توسط کالمن ابداع شد. این خاصیت، نقش مهمی در طراحی سیستم های کنترل در فضای حالت دارند.

قضیه۱.۱

سیستم زیر را درنظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{۵.۱}$$

فرض کنید که $A_{n\times n}$ ، $x_{n\times 1}$ و $B_{n\times 1}$ باشد. بردارهای B ، AB ، . . . و $A^{n-1}B$ مستقل خطی اند اگر و تنها اگر سیستم کنترل پذیر کامل حالت باشد.

برهان: به[۱] رجوع شود.

[۱۳] Autonomous

[۱۴] Time invariant

۲.۱ پایداری لیاپانوف

نظریه پایداری، نقش اساسی در نظریه کنترل دارد. مسائل مختلفی در خصوص پایداری مطرح می شود و برای پایداری سیستم های دینامیکی تعاریف متنوعی ارائه شده است. از انواع پایداری ها می توان به پایداری دورهای متناوب، پایداری ورودی - خروجی و . . . اشاره کرد. معمولا پایداری نقاط تعادل را از دید لیاپانوف[۱۵]، ریاضی دان و مهندس روسی که این نظریه را بنا نهاد بررسی می کنند. در این بخش به پایداری لیاپانوف می پردازیم.

تعریف ۴.۱

در معادله حالت، نقطه $x = x^*$ را نقطه تعادل [۱۶] معادله (۳.۱) گوییم اگر با آغاز حالت سیستم از آن نقطه، برای تمامی لحظات آینده در آن نقطه باقی بمانیم.
نقطه تعادل سیستم های خودگردان معادله (۴.۱) ریشه های حقیقی معادله زیر است

$$f(x) = 0.$$

تعریف ۵.۱

مبدا را به عنوان نقطه تعادل سیستم (۴.۱) در نظر بگیرید.

۱. این نقطه را نقطه تعادل پایدار سیستم گوییم اگر همه جواب های سیستم که از نقاط نزدیک به آن آغاز می شود در همان نزدیکی باقی بماند، یعنی

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \quad \| x(0) \| < \delta \longrightarrow \| x(t) \| < \epsilon.$$

درغیر این صورت آن نقطه تعادل، ناپایدار است.

۲. این نقطه را پایدار مجانبی [۱۷]سیستم گوییم اگر پایدار باشد و با افزایش زمان، به سوی نقطه تعادل سوق یابد. یعنی

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \quad \| x(0) \| < \delta \longrightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

[۱۵] Lyapunov

[۱۶] Equilibrium point

[۱۷] Asymptotically stable

در سال ۱۸۹۲میلادی، لیاپانوف نشان داد می توان با استفاده از توابعی خاص، بدون آن که جواب تحلیلی سیستم را در اختیار داشته باشیم، پایداری نقطه تعادل را تعیین کرد. فرض کنید $V : D \to R$ تابعی پیوسته-مشتق پذیر در قلمرو $D \subseteq R^n$ (شامل مبدا) باشد. در این صورت می توان، مشتق تابع V را در امتداد مسیرهای معادله (۴.۱) به صورت زیر بیان کرد:

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) = \frac{\partial V}{\partial x} . f(x).$$

مشتق V در امتداد مسیرهای حالت سیستم، به معادله سیستم بستگی دارد، لذا مقدار تابع $\dot{V}(x)$ در سیستم های مختلف، متفاوت خواهد بود. اگر $\Phi(t,x)$ جواب معادله (۴.۱) باشد که از حالت اولیه x_0 در زمان $t = 0$ شروع شده است، خواهیم داشت:

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(\Phi(t,x))|_{t=0}.$$

پس اگر $\dot{V}(x)$ منفی باشد، آنگاه تابع V در امتداد جواب معادله (۴.۱) کاهش خواهد یافت.

تعریف ۶.۱

۱. تابع معین مثبت: هر تابع پیوسته - مشتق پذیر $V(x)$ که در شروط زیر صدق کند، تابع معین مثبت[۱۸] نامیده می شود

$$V(0) = 0, \quad \forall x \neq 0 \quad V(x) > 0.$$

اگر این تابع شرط ضعیف تر $V(x) \geq 0$ را برای هر $x \neq 0$ برآورده کند، نیمه معین مثبت خواهد بود.

۲. تابع $V(x)$ را معین منفی[۱۹]یا نیمه معین منفی خوانیم اگر $-V(x)$ به ترتیب معین مثبت یا نیمه معین مثبت باشد.

۳. تابع $V(x)$ را بیکران شعاعی گوییم هرگاه

$$\|x\| \longrightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad V(x) \longrightarrow \infty.$$

[۱۸] Positive definite

[۱۹] Negative definite

اکنون آماده ایم قضیه پایداری لیاپانوف را بیان کنیم.

قضیه۲.۱

مبدا به عنوان نقطه تعادل سیستم (۴.۱)، پایدار است اگر تابع معین مثبت و پیوسته - مشتق پذیر $V(x)$ چنان موجود بوده که $\dot{V}(x)$ نیمه معین منفی باشد. این نقطه، پایدار مجانبی است اگر تابع $\dot{V}(x)$ معین منفی باشد.
برهان: به[۱] رجوع شود.

به تابع $V(x)$ که در قضیه ۲.۱ صدق می کند، تابع لیاپانوف گوییم.

تعریف ۷.۱

مبدا را نقطه تعادل پایدار مجانبی جامع [۲۰] سیستم (۴.۱) گوییم اگر پایدار مجانبی بوده و مسیرهای حالت سیستم، از هر حالت اولیه x، با افزایش t به بینهایت به سمت مبدا سوق یابند. در این پایداری، $D_V = R^n$ است.

قضیه۳.۱(بارباشین - کراسوسکی)

اگر $x = 0$ یکی از نقاط تعادل معادله (۴.۱) و تابع معین مثبت، بیکران شعاعی و پیوسته - مشتق پذیر $V(x)$ چنان موجود باشد که مشتقش برای $x \neq 0$ معین منفی شود، آنگاه $x = 0$ نقطه پایدار مجانبی جامع است.
برهان: به[۳] رجوع شود .

نکته ۱[۳]

اگر $x = 0$ نقطه تعادل پایدار مجانبی جامع سیستمی باشد، آنگاه نقطه تعادل یکتای آن نیز هست. زیرا اگر نقطه تعادل دیگری مانند $\overline{x}$ وجود داشته باشد، باید هریک از مسیرهایی که از $\overline{x}$ آغاز می شود، برای تمامی مقادیر $t \geq 0$ ، در آنجا بماند. در نتیجه، بسوی مبدا میل نخواهد کرد و این خلاف ادعای پایداری مجانبی جامع مبدا است. بنابراین واضح است که سیستم های با نقطه تعادل چندگانه، فاقد پایداری مجانبی جامع هستند.

قضیه۴.۱

فرض کنید $x = 0$ ، نقطه تعادل معادله (۴.۱) و $V : D \longrightarrow R$ تابعی پیوسته - مشتق پذیر باشد که برای

[۲۰] Globally asymptotically stable

آن داشته باشیم: $V(x_0) \ > 0 \ , \ V(0) = 0$ (برای مقادیر اختیاری x_0 با $\| x_0 \|$ کوچک). با تعریف مجموعه

$$U \ = \ \{x \in B_r \mid V(x) \ > 0\}$$

و با این فرض که برای تابع V در مجموعه U داشته باشیم: $\dot{V}(x) \ = a \ > 0$ ، آنگاه می توان گفت $x = 0$ ناپایدار است.
برهان: به[۳] رجوع شود.

۱.۲.۱ سیستم های خطی و خطی سازی

سیستم خطی و نامتغیر با زمان زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} \ = \ Ax \tag{۶.۱}$$

که دارای نقطه تعادلی در مبدا است. این نقطه تعادل، تنهاست اگر و تنها اگر داشته باشیم: $det(A) \neq 0$. اگر $det(A) = 0$ ، ماتریس A دارای فضای پوچ نابدیهی است. به بیان دیگر اگر $det(A) = 0$ ، سیستم دارای یک زیرفضای تعادل[۲۱] است. می توان ویژگی های پایداری مبدا را به کمک محل مقادیر ویژه ماتریس A بیان کرد[۲، ۳].

قضیه۵.۱

نقطه تعادل $x = 0$ مربوط به معادله (۶.۱) پایدار است اگر و تنها اگر تمامی مقادیر ویژه ماتریس A در شرط $Re\lambda_i \leq 0$ صدق کند و برای هر مقدار ویژه که برای آن داشته باشیم $Re\lambda_i = 0$ بلوک جردن متناظری از مرتبه یک موجود باشد. نقطه تعادل $x = 0$ پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر تمامی مقادیر ویژه ماتریس A در شرط $Re\lambda_i \ < 0$ صدق کند.
برهان: به[۳] رجوع شود.

تعریف ۸.۱

ماتریس پایداری[۲۲] یا هرویتز[۲۳]: ماتریس A را در نظر می گیریم. اگر همه مقادیر ویژه A در شرط $Re\lambda_i \ < 0$ صدق کند، آنگاه ماتریس A را ماتریس پایداری یا هرویتز گوییم.
بنابراین، سیستم (۶.۱) پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر A ماتریس پایداری باشد.

[۲۱] Equilibrium subspace

[۲۲] Stability matrix

[۲۳] Hurwitz matrix

۲.۲.۱ بررسی پایداری مجانبی سیستم های خطی

برای بررسی پایداری مجانبی سیستم (۶.۱) تابع لیاپانوف را به صورت درجه دوم در نظر می گیریم:

$$V(x) = x^T P x$$

که در آن P ماتریسی معین مثبت، متقارن و حقیقی است. مشتق تابع V در امتداد مسیرهای حالت سیستم (۶.۱) از رابطه زیر بدست می آید.

$$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T (PA + A^T P) x = -x^T Q x$$

که Q ماتریسی متقارن است که با رابطه زیر تعریف می شود:

$$PA + A^T P = -Q. \qquad (۷.۱)$$

اگر Q معین مثبت باشد، طبق قضیه پایداری لیاپانوف، مبدا پایدار مجانبی است. در روش لیاپانوف، ابتدا $V(x)$ را چنان انتخاب می کنیم که معین مثبت باشد و سپس معین منفی بودن $\dot{V}(x)$ را بررسی می کنیم. در سیستم های خطی می توان ترتیب دو گام را عوض کرد[۳]. یعنی ماتریس Q را که ماتریسی معین مثبت و متقارن است، انتخاب می کنیم و سپس معادله (۷.۱) را برای بدست آوردن P حل می نماییم، در این صورت اگر جواب معادله (۷.۱) معین مثبت باشد، می توان نتیجه گرفت مبدا، پایدار مجانبی است. به معادله (۷.۱)، معادله لیاپانوف [۲۴]می گوییم.

قضیه زیر پایداری مجانبی مبدا را بر اساس ویژگی های جواب معادله لیاپانوف بیان می کند.

قضیه۶.۱

ماتریس A پایداری است اگر و تنها اگر برای هر ماتریس متقارن و معین مثبت Q، ماتریس متقارن و معین مثبتی مانند P چنان وجود داشته باشد که در معادله (۷.۱) صدق کند. علاوه بر این اگر ماتریس A ماتریس پایداری باشد، معادله (۷.۱) دارای جواب یکتا خواهد بود.
برهان: به[۳] رجوع شود.

در ادامه روش لیاپانوف را برای سیستم های غیرخطی (۴.۱) در نظر می گیریم که در آن $f : D \longrightarrow R^n$ تابعی پیوسته - مشتق پذیر است. فرض کنید که $x = 0$ واقع در درون D، نقطه تعادل سیستم باشد، یعنی

[۲۴] Lyapunov equation

$f(0) = 0$. قضیه زیر شرایطی را بیان می کند که می توان با بررسی سیستم خطی شده حول مبدا، پایداری سیستم غیرخطی (۴.۱) را تعیین کرد. این روش تحت عنوان روش غیر مستقیم لیاپانوف [۲۵]شناخته می شود.

قضیه۷.۱

فرض کنید که $x = 0$ یکی از نقاط تعادل سیستم (۴.۱) ، $f : D \longrightarrow R^n$ تابعی پیوسته - مشتق پذیر و D نیز همسایگی حول مبدا می باشد، با تعریف

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x)|_{x=0}$$

مبدا، پایدار مجانبی است اگر به ازای جمیع مقادیر ویژه ماتریس A داشته باشیم: $Re\lambda_i < 0$.
و اگر به ازای یک یا چند مقدار ویژه A داشته باشیم $Re\lambda_i > 0$ ، در این صورت مبدا ناپایدار است.
برهان: به[۳] رجوع شود.

۳.۱ پایدارپذیری

در بخش های قبل، با مفاهیم پایداری و کنترل پذیری آشنا شدیم. مفهوم پایدارپذیری نیز به پایداری و کنترل پذیری مربوط است. اگر سیستمی کنترل پذیر باشد، می توان مقادیر ویژه را به هر موقعیت مکانی در صفحه منتقل کرد. سیستم خطی نامتغیر با زمان

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (۸.۱)$$

$$y = Cx + Du \qquad (۹.۱)$$

پایدارپذیر است اگر همه مقادیر ویژه ناپایدار، کنترل پذیر باشند.
دو شرط کافی از این تعریف نتیجه می شود.

۱. اگر سیستمی پایدار باشد، پایدارپذیر است.

۲. اگر سیستمی کنترل پذیر باشد، پایدارپذیر است.

شرط لازم و کافی برای پایدارپذیری پیچیده است. پس از یافتن مقادیر ویژه سیستم، کنترل پذیری شان را بررسی می کنیم.

[۲۵] Lyapunov’s indirect method

قضیه۸.۱

مقدار ویژه $\lambda_i \in \lambda(A) = \lambda(A^T)$ سیستم خطی (۸.۱) کنترل پذیر است اگر و تنها اگر بردار ویژه متناظر آن v_i از A^T در شرط $v_i^T B \neq 0$ صدق کند.

برهان: به[۲] رجوع شود.

بررسی پایدارپذیری پیچیده تر از بررسی کنترل پذیری است. از آنجا که کنترل پذیری، پایدارپذیری را نتیجه می دهد، در ابتدا کنترل پذیری را بررسی می کنیم. اگر سیستم کنترل پذیر بود، پایدارپذیر است.
تا کنون مفهوم پایدارپذیری را برای سیستم های خطی بیان شده است. حال این مفهوم را برای سیستم های با ورودی کنترل مطرح می کنیم.

سیستم $\dot{x} = f(x,u)$ را در نظر بگیرید که x متغیر حالت و u ورودی کنترل می باشد. برای سادگی فرض کنید که مبدا نقطه تعادل سیستم باشد. این سیستم را پایدارپذیر گوییم هرگاه کنترل پسخوردی $u = K(x)$ موجود بوده به طوری که سیستم حلقه بسته $\dot{x} = f(x, K(x))$ پایدار باشد. مفاهیم پایدارپذیری مجانبی و پایدارپذیری عملی نیز به همین ترتیب بیان می شوند.