وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه سمنان

دانشگاه سمنان

دانشکده ریاضی،آمار و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

حل عددی معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم روی بازه های بی‌کران

دانشجو:

فرزانه عبدالهی

استاد راهنما:

دکتر باقر کرامتی

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا صافی

اسفند ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

حل عددی معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم روی بازه های بی‌کران

دانشجو:

فرزانه عبدالهی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

از دانشگاه سمنان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **درجه اعطاشده از سوی کمیته داوری**

دکتر باقر کرامتی استادیار دانشگاه سمنان (استاد راهنما)

دکترمحمدرضا صافی استادیار دانشگاه سمنان (استاد مشاور)

دکتر . . . استادیار دانشگاه . . . (داور اول)

دکتر . . . دانشیار دانشگاه . . . (داور دوم)

دکتر ... استادیار دانشگاه سمنان(نماینده تحصیلات تکمیلی)

اسفند ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر بزرگوار و مادر عزیزم

که دعای آنان قوت قلب و بدرقه راهم است

و

همسر مهربانم

که وجودش گرمی بخش لحظات زندگیم است

سپاسگزاری

پروردگارا! ای هستی بخش وجود، مرا بر نعمات بی‌کرانت توان شکر نیست، ذره ذره وجودم برای تو و نزدیک شدن به تو می‌تپد. الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم، نه نردبانی برای فزونی تکبر و غرور، نه حلقه‌ای برای اسارت و نه دست مایه‌ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران.

اکنون که به لطف پروردگار بزرگ موفق به اتمام این مقطع از تحصیل گشته‌ام لازم می‌دانم از کسانی که در این مسیر مرا راهنمایی نموده‌اند، تشکر نمایم.

بر خود واجب می‌دانم مراتب سپاس و قدردانی عمیق قلبی خود را به خدمت استاد فرزانه و گرانقدرم جناب آقای دکتر باقر کرامتی که در طول دوران تحصیل و ارائه پایان‌نامه از چشمه جوشان دانش و اخلاق والایشان به قدر ظرفیت محدود خویش بهره مند گشته‌ام ابراز نمایم.

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر محمدرضا صافی که مشاوره این پایان‌نامه را بر عهده داشتند کمال تشکر را دارم.

از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر دمیرچی و جناب آقای دکتر نوری که در مقام داور زحمت مطالعه پایان‌نامه را بر عهده داشتند قدرنمایی می‌نمایم.

از زحمات خانواده عزیزم که سربلندی امروزم را مدیون زحمات دیروز آن‌ها می‌دانم، سپاسگزارم.

چکیده

در این پایان نامه، برخی روش های عددی حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم (روی بازه های بی کران - کران دار) بیان می نماییم. روش های پیشنهادی شامل روش های تصویری و نسخه های گسسته می باشند. این روش ها پایدار و همگرا هستند. توجه ویژه ای به دستگاه خطی متناظر با معادله متناهی البعد شده است، که با حل این دستگاه خطی خوش وضع جواب تقریبی همگرا به جواب واقعی را بدست می آوریم. مثال‌های عددی را به منظور تایید صحت روش ها و خوش وضعی دستگاه خطی ارائه می نماییم.

واژه‌های کلیدی :

معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم، عدد شرطی، روش های تصویری ، درونیابی لاگرانژ

فهرست مطالب

فهرست جداول

فهرست اشکال

پیشگفتار

نظریه وکاربرد معادلات انتگرال مبحث مهمی در ریاضیات کاربردی است. معادلات انتگرالی در بسیاری از زمینه های فیزیک، مکانیک و ریاضی ظاهر می شوند. هم چنین این معادلات به عنوان جواب معادلات دیفرانسیل درنظر گرفته می شوند. در واقع، بسیاری از مسائل در زمینه معادلات دیفرانسیل معمولی می توانند به صورت معادلات انتگرالی بیان که هر جواب معادله انتگرالی نیز درآن شرایط مرزی اولیه صدق کرده و هم چنین بسیاری از نتایج وجودی و یکتایی جواب این مسائل از نتایج متناظر معادلات انتگرالی حاصل می گردند. علاوه براین معادلات انتگرالی یکی از مفیدترین ابزار در شاخه های آنالیز تابعی و فرآیندهای تصادفی می باشند. از آن جایی که دامنه کاربرد معادلات انتگرال بسیار وسیع بوده همواره دانشمندان و محققان به دنبال روش هایی برای حل آنها هستند. روش های عددی گوناگونی برای حل این نوع معادلات از قبیل روش های تربیع، روش های هم محلی و گالرکین، روش های تقریب متوالی و تبدیل متغیر و...وجود دارد. این پایان نامه مشتمل بر سه فصل می باشد.

در **فصل اول** به تعاریف ودسته بندی معادلات انتگرالی و مفاهیم مقدماتی پرداخته می شود.

در **فصل دوم** روش های عددی تقریب جواب معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم روی بازه های کران دار مورد بررسی قرار گرفته و پایداری وهمگرایی این روش ها اثبات شده است.

در **فصل سوم** به حل عددی معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم روی بازه ها ی بی کران و پایداری وهمگرایی این روش ها پرداخته شده است.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱-۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۱.

فرض کنید X یك مجموعه ناتهی باشد. تابع حقیقی $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ که در خواص زیر صدق کند، متر یا فاصله نامیده می‌شود.

۱) به ازای هر x و y از X،

$$d(x,y) \geq 0 \,, \quad d(x,y) = 0 \iff x = y$$

۲) به ازای هر x و y از X،

$$d(x,y) = d(y,x)$$

۳) به ازای هر x و y و z از X،

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) \qquad \text{(نامساوی مثلثی)}$$

مجموعه X را با متر d، یك **فضای متریک** گویند و با (X,d) نشان می‌دهند.

تعریف ۲.۱.۱.

دنباله $\{x_n\}$ در فضای متریک (X,d) را **همگرا**[1] نامند، هرگاه نقطه ای مانند $x \in X$ با خاصیت زیر وجود داشته باشد:
به ازای هر $\varepsilon > 0$، عدد طبیعی مانند N وجود داشته باشد، به طوریکه

$$\forall n \geqslant N \Longrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

[1] Converge

تعریف ۳.۱.۱.

دنباله $\{x_n\}$در فضای متریک (X,d) را یک **دنباله کشی**[۲] نامند هرگاه:
به ازای هر $\varepsilon > 0$، عدد صحیحی مانند M وجود داشته باشد به طوریکه اگر $n,m \geqslant M$، آنگاه

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

تعریف ۴.۱.۱.

فضای متریک(X,d) را **کامل** گویند، هرگاه هر دنباله کشی در X همگرا باشد.

تعریف ۵.۱.۱.

فرض کنید F میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد. مجموعه X را یک **فضای خطی** روی F می نامیم هر گاه عمل دوتایی $+$ و یا $.$ از $X \times X$ به X موجود باشد به قسمی که به ازای هر x ، y ، z از X و α ، β از F داشته باشیم:

۱) $x + y = y + x$

۲) $(x+y) + z = x + (y+z)$

۳) عضوی مانند 0 از X موجود باشد به قسمی که $X + 0 = X$، این عضو را صفر فضای خطی می نامیم.

۴) برای هر عضو $x \in X$، عضو منحصربه فرد $-x \in X$ وجود داشته باشد به طوریکه
$x + (-x) = (-x) + x = 0$.

۵) $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

۶) $(\alpha + \beta)x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

۷) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$

۸) $1 \cdot x = x, 0 \cdot x = 0$

عمل $+$ را جمع و عمل $.$ را ضرب می نامیم.

تعریف ۶.۱.۱.

اگر $F = \mathbb{R}$، X را فضای خطی **حقیقی** و اگر $F = \mathbb{C}$، X را فضای خطی **مختلط** می نامیم.

---
[۲] Cauchy Sequence

تعریف ۱.۱.۷.

فرض کنید X یک فضای خطی بر میدان Fباشد، تابع $p : X \to R$ را یک **شبه نرم** گویند هرگاه:

۱) به ازای هر x از X،

$$p(\circ) = \circ\,, \quad p(x) \geq \circ$$

۲) به ازای هر x از X و هر α از F،

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$$

۳) به ازای هر x و y از X،

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

تعریف ۱.۱.۸.

فرض کنید p یك شبه نرم روی فضای خطی X باشد به‌قسمی که $p(x) = \circ$، $x = \circ$ را نتیجه دهد، در این‌صورت p را یك نرم می‌خوانیم و آن‌را با $\|.\|$ نشان می‌دهیم. اگر $\|.\|$ یك نرم بر X باشد، آن‌گاه

۱) به ازای هر x از X،

$$\|x\| \geq \circ\,, \quad \|x\| = \circ \Longleftrightarrow x = \circ$$

۲) به ازای هر x از X و هر α از میدان F،

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\|$$

۳) به ازای هر x و y از X،

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \text{(نامساوی مثلثی)}$$

در این‌صورت X را یك **فضای خطی نرم‌دار** گویند.

تعریف ۱.۱.۹.

هرگاه X نسبت به متر $d(x,y) = ||x-y||$ کامل باشد، فضای نرم دار X را **کامل** می نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۰.

هر فضای نرم دار کامل را یک **فضای باناخ**[۳] گویند.

[۳]Banach Space

تعریف ۱.۱.۱۱.

فضای $\mathbf{C}[a,b]$، مجموعه تمام توابع پیوسته روی $[a,b]$ می باشد.

تعریف ۱.۱.۱۲.

مجموعه $\mathbf{C}^m(I)$ با $m \in \mathbb{N}$ ، به عنوان مجموعه ای از توابع پیوسته $U : I \to \mathbb{R}$ تعریف شده است که در I، m بار مشتق پذیر پیوسته در بازه می باشد.

تعریف ۱.۱.۱۳.

عملگر K از فضای خطی X در فضای خطی Y را یك **عملگر خطی**[۴] نامند هرگاه برای اعضای $x_۱$ و $x_۲$ از X و اسکالرهای α و β از $\mathbb{R}$ (یا $\mathbb{C}$) داشته باشیم

$$K(\alpha x_۱ + \beta x_۲) = \alpha K(x_۱) + \beta K(x_۲)$$

تعریف ۱.۱.۱۴.

عملگر خطی K از فضای خطی X به فضای خطی Y **عملگر معکوس‌پذیر** نامیده می‌شود، هرگاه یك عملگر خطی $X \longrightarrow Y : U$ موجود باشد به طوریکه UK تابعی همانی روی X و KU تابعی همانی روی Y باشد. اگر K معکوس‌پذیر باشد، تابع U یکتا و با $K^{-۱}$ نشان داده می‌شود. به‌علاوه K معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر

۱) K یک به یک باشد؛ یعنی از $K\alpha = K\beta$ نتیجه شود $\alpha = \beta$، که در آن اسکالرهای β ، α از $\mathbb{R}$ (یا $\mathbb{C}$) می‌باشند.

۲) K پوشا باشد؛ یعنی برد K (تمام) Y باشد.

تعریف ۱.۱.۱۵.

فرض کنید X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. **عملگر خطی** $K : X \longrightarrow Y$ را **کراندار** هرگاه $M > ۰$ وجود داشته باشد به طوریکه به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$\|K\| = \sup\{\|Kx\|; x \in X,\ \|x\| \leq ۱\} \leq M$$

تعریف ۱.۱.۱۶.

عملگر خطی ϕ با دامنه فضای خطی X و با برد میدان اسکالر F را یك **تابعك خطی**[۵] گویند هرگاه

$$\forall x_۱, x_۲ \in X\ ,\quad \alpha, \beta \in F\ :\quad \phi(\alpha x_۱ + \beta x_۲) = \alpha\phi(x_۱) + \beta\phi(x_۲)$$

---

[۴] Linear Operator

[۵] Linear Functional

تعریف ۱.۱.۱۷.

فرض کنید X و Y دو فضای نرم‌دار باشند، $K : X \longrightarrow Y$ را **عملگر خطی فشرده**[۶] (یا عملگر خطی به‌طور کامل پیوسته) می‌نامیم اگر K خطی باشد و برای هر زیرمجموعه کراندار M از X، تصویر $K(M)$

$$\{K(M) \mid \quad ||M||_X \leq ۱\}$$

در Yدارای بستار فشرده باشد.

تعریف ۱.۱.۱۸.

فرض می‌کنیم X فضای خطی نرم‌دار و $U \neq \varnothing$ زیرفضای X باشد. عملگر خطی $P : X \longrightarrow U$ با خاصیت

$$\forall u \in U \ , \quad Pu = u$$

را **عملگر تصویر**[۷] از X به‌روی U می‌نامند.

تعریف ۱.۱.۱۹.

فرض کنید V یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ باشد. منظور از یک **ضرب داخلی** روی V نگاشتی مانند $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ می باشد که به ازای هر $z \in V$، y ، x و $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

۱) هرگاه $x \neq ۰$ ، $\quad (x,x) > ۰$

۲) $(x,x) = ۰$ اگر وفقط اگر $x = ۰$

۳) $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$

۴) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$

۵) $(x,y) = \overline{(y,x)}$

تعریف ۱.۱.۲۰.

فرض کنید $g \in \mathbb{C}[a,b]$ ، f در این صورت **ضرب داخلی دو تابع** (f,g) به شکل زیر تعریف می‌گردد

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

نرم p از f به شکل زیر تعریف می شود

$$\|f\|_p = \left\{ \int_a^b |f(x)|^p dx \right\}^{۱/p}$$

---

[۶] Compact Linear Operator

[۷] Projection Operator

حالات خاص:

$$
\begin{aligned}
p &= ۱ \qquad \|f\|_۱ = \left\{ \int_a^b |f(x)|dx \right\} \\
p &= ۲ \qquad \|f\|_۲ = \left\{ \int_a^b |f(x)|^۲ dx \right\}^{۱/۲} \\
p &= \infty \qquad \|f\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x)|
\end{aligned}
$$

تعریف ۱.۱.۲۱.

اگر H یک فضای ضرب داخلی باشد به طوریکه با نرم تعریف شده به صورت

$$||f|| = (f\ ,\ f)^{\frac{۱}{۲}}$$

کامل باشد، آنگاه H یک **فضای هیلبرت**[۸] نامیده می شود.

۱-۲ تاریخچه معادلات انتگرال

معادله انتگرال برای اولین بار توسط بویس ریماند [۹] در سال ۱۸۸۸ تعریف و به معادلاتی اطلاق شد که تابع $\phi(x)$ تحت علامت انتگرال در آن مجهول باشد. هرچند، لاپلاس [۱۰] بدون استفاده از این اسم در سال ۱۷۸۲ تبدیل انتگرالی

$$f(x) = \int_۰^\infty e^{-xs}\phi(s)ds \tag{۱.۱}$$

را برای حل معادلات تفاضلات خطی و معادلات دیفرانسیل به‌کار گرفت.
در خصوص بکارگیری سری مثلثاتی برای حل مسائل انتقال گرما، فوریه [۱۱] در سال ۱۸۲۲ فرمول‌های معکوس

$$f(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_۰^\infty \sin(xs)\phi(s)ds\ , \tag{۲.۱}$$

$$\phi(s) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_۰^\infty \sin(xs)f(x)dx \tag{۳.۱}$$

و

$$f(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_۰^\infty \cos(xs)\phi(s)ds\ , \tag{۴.۱}$$

---

[۸] Hilbert Space

[۹] Bois.Reymond

[۱۰] Laplace

[۱۱] Fourier

$$\phi(s)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{\infty}\cos(xs)f(x)dx \tag{۵.۱}$$

را یافت که در آن تبدیل فوریه سینوسی(۳.۱) و کسینوسی (۵.۱) به‌ترتیب جواب‌های $\phi(s)$ از معادلات انتگرال (۲.۱) و (۴.۱) را برحسب تابع مجهول $f(x)$ فراهم می‌کنند.
در سال ۱۸۲۶ آبل [۱۲] ضمن مطالعه‌ی مسائل فیزیکی مانند انتقال گرما به معادله‌ای نظیر

$$f(x)=\int_{a}^{\infty}(x-s)^{-\alpha}\phi(s)ds \tag{۶.۱}$$

دست یافت که در آن $f(x)$ یك تابع پیوسته صادق در $f(a)=۰$ ، $۰<\alpha<۱$، می‌باشد.
در سال ۱۸۲۶ پواسن [۱۳] ضمن مطالعه نظریه‌ی مغناطیس به معادله‌ای مانند

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\int_{۰}^{x}k(x-s)\phi(s)ds \tag{۷.۱}$$

برخورد نمود که در آن $\phi(s)$ تابعی مجهول می‌باشد. در سال ۱۸۹۶ پوآنکاره [۱۴] معادله انتگرالی را در رابطه با یك معادله دیفرانسیل جزئی مطرح نمود. در همان سال دانشمند ایتالیایی به‌نام ولترا [۱۵] برای اولین بار نظریه‌ی عمومی معادله انتگرال را مطرح نمود. شکل کلی معادله ولترا به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\int_{a}^{x}k(x,t)\phi(t)dt\ . \tag{۸.۱}$$

در سال‌های ۱۹۰۳-۱۹۰۰ ریاضیدان سوئدی به‌نام فردهلم [۱۶] دسته دیگری از معادلات انتگرال خطی به‌صورت

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\int_{a}^{b}k(x,t)\phi(t)dt \tag{۹.۱}$$

را به همراه قضایای جالب و مشهور خود مطرح نمود.
تلاش فراوانی در استخراج روش‌های کلاسیك و عددی برای حل معادلات انتگرال شد و مقالاتی در این زمینه بین سال‌های ۱۹۸۷-۱۹۶۳ ارائه شد که از آن بین می‌توان به مقالات مشهور فیلیپس، تیخانوف و دیگران اشاره کرد. کاربرد معادلات انتگرالی را می‌توان در علوم مختلفی نظیر فیزیك، مکانیك، ارتباطات، ... و نیز نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی مشاهده کرد. نظریه و کاربرد معادلات انتگرال، موضوعی مهم در ریاضیات کاربردی می‌باشد. معادلات انتگرال، به‌عنوان مدل‌های ریاضی برای بسیاری از پدیده های فیزیکی و هم‌چنین برای فرمول‌بندی مسائل ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای مطالعه بیشتر تاریخچه معادلات انتگرال می توانید به [۲۸، ۱۳، ۲] مراجعه کنید.

[۱۲] Abel

[۱۳] Poisson

[۱۴] Poincare

[۱۵] Volterra

[۱۶] Fredholm

۱-۳ تعریف و دسته بندی معادلات انتگرال

تعریف ۱.۳.۱.

یک **معادله انتگرال**، معادله ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ تحت علامت انتگرال باشد. نمونه ای از یک معادله انتگرا ل که در آن $u(x)$ تابع مجهولی است، بصورت زیر می باشد:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int k(x,t)\, u(t)\mathrm{d}t \qquad (۱۰.۱)$$

که در آن $f(x)$ تابع معلوم، $k(x,t)$ که تابعی از دو متغیر x و t می باشد را هسته معادله و $\lambda \neq ۰$ عدد حقیقی یا مختلط می باشد.

تعریف ۲.۳.۱.

معادلات انتگرال خطی به معادلاتی اطلاق می شوند که تابع مجهول تحت علامت انتگرال به صورت خطی ظاهر می شود. شکل کلی این نوع از معادلات به صورت زیر می باشد:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int k(x,t)\, u(t)\mathrm{d}t.$$

مثال ۳.۳.۱.

معادلات انتگرال زیر مثالی از معادله خطی می باشند:

$$u(x) = x^{۳} + \lambda \int_{۰}^{۱} xtu(x)\mathrm{d}t$$
$$u(x) = e^{x} + \lambda \int_{a}^{x} \sin(xt)u(t)\mathrm{d}t$$

تعریف ۴.۳.۱.

معادلات انتگرال غیر خطی به معادلاتی اطلاق می شوند که تابع مجهول تحت علامت انتگرال به صورت غیر خطی ظاهر می شود. شکل کلی این نوع از معادلات به صورت زیر می باشد:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int k(x,t,u(t))\mathrm{d}t.$$

مثال ۵.۳.۱.

معادلات زیر مثالی از معادله انتگرال غیر خطی می باشند

$$u(x) = \sin(x) + \lambda \int_{۰}^{۱} xte^{u(t)}\mathrm{d}t$$
$$u(x) = lnx + \lambda \int_{a}^{x} xtu^{۲}(t)\mathrm{d}t$$

گاهی اوقات معادله (۱۰.۱) را بصورت زیر در نظر می گیرند

$$u = f + \lambda \mathbf{K} u,$$

که $\mathbf{K}$ را **عملگر انتگرال** می نامند و بصورت زیر نمایش می دهند

$$\mathbf{K} = \int_a^b k(x,t)(.)\mathrm{d}t,$$

$$\mathbf{K}f(t) = \int_a^b k(x,t)f(t)\mathrm{d}t.$$

برای هر فضای باناخ X، عملگر همانی I، از X به X، بصورت زیر تعریف می شود

$$x \in X,$$

$$Ix = x.$$

در صورت خطی بودن معادله، عملگر انتگرال خاصیت خطی بودن را به شکل زیر برقرار می نماید

$$\mathbf{K}[\lambda_۱\phi_۱(t) + \lambda_۲\phi_۲(t)] = \lambda_۱\mathbf{K}[\phi_۱(t)] + \lambda_۲\mathbf{K}[\phi_۲(t)],$$

که در آن

$$\mathbf{K}[\phi(t)] = \int_a^b \quad k(x,t)\phi(t)\mathrm{d}t.$$

معادلات انتگرال را به دو گروه **معادلات انتگرال فردهلم** و **معادلات انتگرال ولترا** دسته بندی می نمایند. اکنون تعاریف وخواص عمده هر نوع را بررسی می کنیم.

۱-۳-۱ معادلات انتگرال فردهلم

شکل کلی معادله انتگرال که در آن حدود انتگرال مقادیر ثابت a ، b هستند در حالت خطی به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)u(t)\mathrm{d}t, \quad a \leq x, t \leq b,$$

که در آن تابع $f(x)$ و هسته $k(x,t)$ از قبل مشخص و λ یک پارامتر معلوم می باشد.

۱) اگر $\phi(x) = ۰$، معادله بالا به معادله زیر تبدیل

$$f(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)u(t)\mathrm{d}t = ۰,$$

و آن را معادله انتگرال **فردهلم نوع اول** می نامند.