إنه من سليمان وإنه

بسم الله الرحمن الرحيم

١٣١٢٦٦

# دانشگاه پیام نور

## مرکز مشهد

## گروه:ریاضی

## عنوان پایان نامه

زیر فضاهای نیم متعدی از ماتریس ها

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی گرایش آنالیز


## مولف

آمنه ندافیان

## استاد راهنما

دکتر علی جلیلیان عطار

## استاد مشاور

دکتر مرتضی آقایی



۱۳۸۸ /۱۱/ ۱۲

مرکز اطلاعات مدارک علمی ایران
ثبت مدارک


بهمن ماه ۱۳۸۷


۱۳۱۲۶۶

۰۸۱۰۱۷۵۳۵

۱۳۸۸/۴/۳۰

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوري

دانشگاه پیام نور

*بسمه تعالی*

# تصویب نامه پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان : زیرفضاهاي متعدي و نیم متعدي از ماتریس ها

که توسط خانم آمنه ندافیان بجستاني تهیه و به هیئت داوران ارائه گردیده است مورد تائید می باشد.

تاریخ دفاع نمره: ۱۸/۵ هجده و نیم درجه ارزشیابی: عالی

اعضای هیئت داوران:

| نام و نام خانوادگی | هیئت داوران | مرتبه علمی | امضاء |
|---|---|---|---|
| دکتر علی جلیلیان عطار | استاد راهنما | استادیار | |
| دکتر مرتضي آقایي | استاد مشاور | استادیار | |
| دکتر تقي کریمي | استاد داور | استادیار | |
| دکتر صدیقه شادکام | نماینده گروه ریاضي | استادیار | |

رونوشت:

۱. امتحانات ۲. تحصیلات تکمیلي ۳. پرونده دانشجو ۴. دانشجو

۲۶

بسمه تعالی

| | |
|---|---|
| نام خانوادگی :ندافیان بجستانی | نام :آمنه |
| عنوان پایان نامه: زیر فضاهای نیم متعدی از ماتریس ها | |
| استاد راهنما :دکتر علی جلیلیان عطار | استاد مشاور :دکتر مرتضی آقایی |
| نماینده گروه آموزشی : دکتر صدیقه شادکام | استاد داور :دکتر تقی کریمی |

| | | |
|---|---|---|
| درجه تحصیلی : ارشد | رشته : ریاضی محض | گرایش :آنالیز |
| دانشگاه : پیام نور | مرکز : مشهد | تاریخ دفاع : ۸۷/۱۱/۲۷ |

تعداد صفحه : ۶۵

کلید واژه ها : زیر فضاهای نیم متعدی و متعدی از ماتریس ها.مثلثی شونده..مینیمال بودن


چکیده:

در این پایان نامه زیر فضاهای متعدی و نیم متعدی از ماتریس ها را مورد بررسی قرار می دهیم

یک زیرمجموعه از ماتریس های $S \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ نیم متعدی گفته می شود اگر برای هر دو بردار مخالف صفر $x$ و $y$ عضو $\mathbb{F}^n$ یک ماتریس $A$ عضو $S$ وجود داشته باشد طوری که $y = Ax$ یا $x = Ay$.در این پایان نامه چندین حالت خاص از زیر فضاهای خطی نیم متعدی از $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ بررسی می شود.در حالت خاص نشان داده می شود که هر زیر فضای نیم متعدی از ماتریس ها یک بردار دوری دارد.علاوه بر این اگر $|\mathbb{F}| \geq n$ همیشه د ارای یک ماتریس معکوس پذیر است.

ثابت شده است که فضاهای ماتریسی نیم متعدی مینیمالی وجود دارند که هیچ زیر فضای پایای غیر بدیهی ندارند.

ساختار فضاهای نیم متعدی مینیمال و فضاهای نیم متعدی مثلثی شونده نیز بررسی شده است .از بین دیگر نتایج نشان داده می شود که هر زیر فضای نیم متعدی مثلثی شونده شامل یک پوچ توان غیر صفر است.

تقدیم به :

پدر و مادرم ، آنان که راستی قامتم در
شکستگی قامتشان تجلی یافت.

تقدیم به :

همسرم ، به پاس همه خوبی هایش .

معبود من
دقایقی در زندگیم بودکه هوس می کردم
سر سنگینم را که پر بود از دغدغه دیروز
و هراس فردا بر شانه های صبورت
بگذارم ،آرام برایت بگویم و بگریم .
در آن دقایق شانه هایت کجا بود؟
گفتی ای عزیزترین تو نه تنها در آن
لحظات دلتنگی که در تمامی لحظات
بودنت بر من تکیه کرده بودی ومن آنی
خود را از تو دریغ نکردم. من همچون
عاشقی که به معشوق خود می نگرد با
شوق ، تمام لحظات بودنت را به نظاره
نشسته ام .

# تشکر و قدر دانی

هر کس به من ذره ای علم بیاموزد مرا بنده خویش ساخته است. ( حضرت علی (ع))

اکنون که به یاری خداوند متعال رساله تحصیلی خود را به اتمام رسانیده ام بر خود لازم می دانم از تمامی عزیزانی که در مراحل مختلف انجام این تحقیق یار و یاور اینجانب بوده و با صبر و حوصله همفکری و حمایت خود را دریغ نداشته اند سپاس گذاری نموده و از درگاه ایزد منان صحت، سلامتی و توفیق روز افزون آن ها را مسئلت نمایم .

از استاد بسیار گرانقدرم **جناب آقای دکتر علی جلیلیان عطار** که با وجود مشغله فراوان زحمت راهنمایی بنده را بر عهده داشتند کمال تشکر را می نمایم .

همچنین از **جناب آقای دکتر آقایی** که مشاوره اینجانب را بر عهده داشته اند کمال تشکر را می نمایم .

دیروز به این گمانم افکندند که ذره ای هستم
در دایره هستی بی هیچ نظمی ،و لرزان
موج می زنم .
اما امروز به خوبی می دانم دایره منم و
زندگی همچون ذره هایی همساز در من
سیر می کند .

# چکیده

**چکیده:**

در این پایان نامه زیر فضاهای متعدی و نیم متعدی از ماتریس ها را مورد بررسی قرار می دهیم.

یک زیرمجموعه از ماتریس های $S \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ نیم متعدی گفته می شود اگر برای هر دو بردار مخالف صفر $x$ و $y$ عضو $\mathbb{F}^n$ یک ماتریس $A$ عضو $S$ وجود داشته باشد طوری که $Ax = y$ یا $Ay = x$.

در این پایان نامه چندین حالت خاص از زیر فضاهای خطی نیم متعدی از $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ بررسی می شود.

در حالت خاص نشان داده می شود که هر زیر فضای نیم متعدی از ماتریس ها یک بردار دوری دارد.

علاوه بر این اگر $|\mathbb{F}| \geq n$ ، همیشه د ارای یک ماتریس معکوس پذیر است.

ثابت شده است که فضاهای ماتریسی نیم متعدی مینیمالی وجود دارند که هیچ زیر فضای پایای غیر بدیهی ندارند.

ساختار فضاهای نیم متعدی مینیمال و فضاهای نیم متعدی مثلثی شونده نیز بررسی شده است .

از بین دیگر نتایج نشان داده می شود که هر زیر فضای نیم متعدی مثلثی شونده شامل یک پوچ توان غیر صفر است.

کلمات کلیدی: **زیر فضاهای نیم متعدی و متعدی از ماتریس ها.مثلثی شونده..مینیمال بودن**

# فهرست مطالب و عنوان ها

| عنوان | صفحه |
|---|---|

## مقدمه:

فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان دلخواه باشد و $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ یک جبر از ماتریس های $n \times n$ روی $\mathbb{F}$، طوری که آن را با جبر همه عملگرهای خطی روی فضای $\mathcal{V} = \mathbb{F}^n$ وقتی که یک پایه ثابت برای $\mathcal{V}$ در نظر گرفته شود یکی در نظر می گیریم.
با استفاده از خوش تعریفی، یک مجموعه $\mathcal{S}$ از عملگرها روی $\mathcal{V}$ متعدی است اگر برای هر جفت عنصر $x$ و $y$ غیر صفر داده شده از $\mathcal{V}$ یک $A$ در $\mathcal{S}$ وجود داشته باشد طوری که $Ax = y$.
خاصیت متعدی $\mathcal{S}$ به طوروسیعی برای مجموعه هایی با ساختار های گوناگون از جمله گروه ها،نیم گروه ها،فضاهای خطی و جبری مورد مطالعه قرار گرفته است.
برای مثال: قضیه ی غالباً ذکر شده از برنساید[۱] بیان می کند که وقتی $\mathbb{F}$ یک میدان جبری بسته است، $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ هیچ زیر جبر متعدی معینی ندارد.اگر مجموعه متعدی $\mathcal{S}$ یک فضای خطی فرض شده باشد آنگاه حالت های زیادی وجود دارد.
معلوم شده است که یک چنین $\mathcal{S}$ ای دارای بعد حداقل $2n-1$ است [۱].
اگر $\mathbb{F}$ یک میدان مختلط یا حقیقی باشد در این صورت یک گونه ی توپولوژیکی از خاصیت متعدی وجود دارد که بوسیله آن فقط لازم است که در مجموعه $\mathcal{S}$، $x$ را به طور تقریبی با $y$ یکی بگیریم یعنی :
برای $x$ و $y$ داده شده در $\mathcal{V}$ و $\varepsilon$ مثبت یک $A$ در $\mathcal{S}$ وجود دارد طوری که $\|Ax - y\| < \varepsilon$.
(همه نرم ها در ابعاد متناهی مساوی هستند و می توانیم هر یک از آن ها را برای منظوری که داریم ثابت فرض کنیم).البته برای فضای خطی $\mathcal{S}$ از $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$، دو خاصیت متعدی توپولوژیکی ومتعدی اکید بر هم منطبق هستند.

---

۱-Burnside

به تعریف معادل از خاصیت متعدی توجه کنید:

یک مجموعه $S$ متعدی است اگر و فقط اگر برای $x$ و $y$ غیر صفر داده شده در فضای اصلی $Sx$ شامل $y$ باشد . برای بردار $x$ عضو $V$ داریم :

$$Sx = \{Ax \mid A \in S\}. \tag{۱}$$

یک خاصیت ضعیف تر از متعدی بودن اولین بار توسط روزنتال[1] وترویتسکای[2] در مرجع [٦] مطرح شده است که در آن زیرجبرهای $S$ را از عملگرهای کراندار روی یک فضای باناخ[3] $V$ در نظر گرفتند و توپولوژی و خاصیت نیم متعدی $S$ را که موضوع اصلی بحث را در بر دارد تعریف کردند.

خاصیت نیم متعدی توپولوژی $S$ به معنی آن است که برای هر $x$ و $y$ داده شده در $V$ و $\varepsilon$ مثبت، نرم $Ax-y$ یا $Ay-x$ کمتر از $\varepsilon$ است .

در میان سایر مطالب جبر های نیم متعدی مینیمال همانند جبر عملگر های توپلایتز[4]بالا مثلثی(یعنی جبر تولید شده بوسیله عنصر همانی و یک ماتریس پوچ توان از اندیس$n$ )مشخصه سازی شده اند

توجه کنید که خاصیت نیم متعدی از یک مجموعه $S$ می تواند معادلا" اینگونه تعریف شود که برای هر $x$ و $y$ مخالف صفر در $V$، $Sx$ باید شامل $y$ یا $Sy$ باید شامل $x$ باشد .

خاصیت نیم متعدی از فضاهای خطی در مرجع [٥] بررسی شده است که در آن خاصیت نیم متعدی $k$ تایی نیز مورد بحث قرار گرفته و قضیه چگالی ژاکوبسون[5] برای حلقه ها تعمیم داده شده است.

---

۱-H.Rosenthal
۲- Troitsky
۳- Banach space
٤- Toeplitz algebra
٥- Jacobson's density theorem

در این پایان نامه چند نتیجه در مورد خاصیت نیم متعدی فضاهای خطی $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ را ثابت می کنیم و مثال هایی را برای رد کردن حدس های مطرح شده می سازیم.

همانطور که انتظار می رود ، وضعیت های متعددی وجود دارند که در آن ها فضاهای متعدی و نیم متعدی با یکدیگر متفاوت اند .

برای مثال واضح است که یک فضای متعدی نمی تواند هیچ زیر فضای غیر بدیهی ثابت داشته باشد اما یک فضای نیم متعدی می تواند (به طور همزمان) مثلثی شونده باشد و در عین حال جبر توپلایتز ذکر شده در قبل را توصیف کند.

ایا یک فضای نیم متعدی مینیمال لزوما" همانند جبر ها مثلثی شونده است؟

یکی از مثال های نقض ما نشان خواهد داد که به طریقی قرینه جواب منفی است: فضاهای نیم متعدی مینیمال وجود دارند که هیچ زیر فضای ثابت غیر بدیهی ندارند.

بسیاری از پرسش ها ی طبیعی ، به نظر نمی رسد که ساده پاسخ داده شوند و در بررسی ما از حالت هایی با بعد خیلی کوچک ، به نظر می آید قابل ساخت نباشند .در انتها بعضی از مسائل حل نشده را ذکر خواهیم کرد.

# فصل اول:

# پیش نیاز ها و مقدمات

در این فصل تعاریف و قضایای پیش نیاز و مقدماتی را می آوریم:

## ۱-۱- تعاریف

$\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ :

فضای ماتریس های $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ را با $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ نشان می دهند.

### ۱-۱-۱- خاصیت نیم متعدی:

یک مجموعه از ماتریس های $S \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ نیم متعدی گفته می شود اگر برای هر دو بردار مخالف صفر $x$ و $y$ عضو $\mathbb{F}^n$ یک ماتریس $A$ عضو $S$ وجود داشته باشد طوری که $Ax = y$ یا $Ay = x$.

### ۲-۱-۱- خاصیت متعدی :

یک مجموعه $S$ از عملگرها روی $V = \mathbb{F}^n$ متعدی گفته می شود اگر برای هر جفت عنصر $x$ و $y$ مخالف صفر داده شده از $V$ یک $A$ در $S$ وجود داشته باشد طوری که $y = Ax$.

### ۳-۱-۱- تعریف معادل از خاصیت متعدی:

یک مجموعه $S$ متعدی است اگر و فقط اگر برای $x$ و $y$ مخالف صفر داده شده در فضای اصلی $Sx$ شامل $y$ باشد . در اینجا برای بردار $x$عضو $V$ می توانیم بنویسیم :

$$Sx = \{Ax \mid A \in S\}. \tag{۱}$$

### ۴-۱-۱- خاصیت نیم متعدی توپولوژیکی $S$:

خاصیت نیم متعدی توپولوژیکی به معنی آن است که برای هر $x$ و $y$ داده شده در $V$ و $\varepsilon$ مثبت، یک ماتریس $A$ عضو $S$ وجود داشته باشد طوری که نرم $y - Ax$ یا $x - Ay$ کمتر از $\varepsilon$ است .

### ۵-۱-۱- جبر عملگرهای توپلایتز بالا مثلثی:

جبر تولید شده به وسیله عنصر همانی و یک ماتریس پوچ توان از اندیس $n$ را جبر عملگرهای توپلایتز بالا مثلثی می گویند .

ترانهاده ماتریس $A$ عضو $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ را با $A^{tr}$ نمایش می دهند .

برای یک زیر مجموعه از ماتریس های $S \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ تعریف می کنیم:

$$S^{\mathrm{tr}} = \{\ A^{\mathrm{tr}} \mid A \in S\ \}. \qquad (٢)$$

برای $x$ و $y$ عضو $\mathbb{F}^n$ تعریف می کنیم:

$$x \perp y \Longleftrightarrow x^{\mathrm{tr}} y = 0. \qquad (٣)$$

همچنین مجموعه $\widetilde{\mathcal{L}}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

فرض کنید $\varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ یک خود ریختی میدانی باشد که ما آن را به $\mathbb{F}^n$ و $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ گسترش می دهیم و این گسترش را با $\widetilde{\varphi}$ نشان می دهیم اگر $\mathcal{L}$ یک زیر مجموعه از $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ باشد آنگاه:

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \{\ \widetilde{\varphi}(A) \mid A \in \mathcal{L}\ \}. \qquad (٤)$$

**٦-١-١- بردار دوری :**

در یک فضای $\mathcal{L}$ داده شده یک بردار $x$ عضو $\mathbb{F}^n$ دوری است اگر $\mathcal{L}x$ مساوی با $\mathbb{F}^n$ باشد.

**٧-١-١- زیر فضای نیم متعدی مینیمال:**

یک زیر فضای نیم متعدی $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ زیر فضای نیم متعدی مینیمال است اگر شامل هیچ زیر فضای نیم متعدی محض نباشد.

$\mathbb{F}_q$ :

یک میدان متناهی از مرتبه $q$ را با $\mathbb{F}_q$ نشان می دهند.

**٨-١-١- خاصیت $k$ نیم متعدی :**

فرض کنید $X$ فضای باناخ حقیقی یا مختلط باشد و به وسیله $L(X)$ فضای همه عملگر های خطی پیوسته روی $X$ را نشان دهیم . فرض کنید $S$ زیر مجموعه $L(X)$ باشد.

$S$ دارای خاصیت $k$ نیم متعدی است اگر برای هر دو $k$ تایی مستقل خطی $x_1, \ldots, x_k$ و $y_1, \ldots, y_k$ در $X$ یک $A \in S$ وجود داشته باشد طوری که برای همه $i = 1, \ldots, k$ داشته باشیم $Ax_i = y_i$ $Ay_i = x_i$ .

**٩-١-١- پوچ توان:**

یک عنصر $T$ از یک حلقه $\mathrm{R}$ پوچ توان نامیده می شود اگر عدد صحیح مثبت $n$ وجود داشته باشد طوریکه $T^n = 0$ .

**۱-۱-۱۰- فضای باناخ :**

فضای باناخ یک فضای برداری نرم دار کامل است .

**۱-۱-۱۱- فضای هیلبرت[۱]:**

یک فضای ضرب داخلی که نسبت به نرم $\|x\| = \sqrt{< x, y >}$ کامل باشد یک فضای هیلبرت نامیده می شود.

**۱-۱-۱۲- زیر فضای پایا:**

فرض کنید $\mathcal{M}$ یک زیرفضا از فضای برداری $V$ باشد $\mathcal{M}$ یک زیر فضای پایا است تحت نگاشت $T(V): V \to V$ به طوری که $T(\mathcal{M})$ زیر مجموعه $\mathcal{M}$ است.

**۱-۱-۱۳- خود ریختی میدانی:**

یک یکریختی از یک میدان به روی خودش را خودریختی میدانی می گویند.

**۱-۱-۱۴- توپولوژی اقلیدسی [۲] :**

فرض کنیم :

$$s = \{(-\infty, a) | a \in R\} \cup \{(a, +\infty) | a \in R\} \qquad (۵)$$

در این صورت توپولوژی تولید شده به وسیله $s$ را توپولوژی استانده خط حقیقی یا توپولوژی اقلیدسی یا توپولوژی معمولی R می گوییم و آن را با خود R نشان می دهیم.

**۱-۱-۱۵- نیم گروه نیم متعدی:**

اگر $S$ یک نیم گروه کراندار یکنواخت از عملگرها روی یک فضای باناخ باشد یک نیم گروه ، نیم متعدی است اگر زیر نیم گروه های پایای آن مرتب کلی توسط رابطه شمول باشند.

**۱-۱-۱۶- یک جبر نیم متعدی:**

یک جبر یکدار از عملگرهای کراندار روی یک فضای باناخ ، نیم متعدی است اگر زیر فضاهای خطی پایای آن مرتب کلی توسط رابطه شمول باشند و نیم متعدی توپولوژیکی است اگر تمامی زیر فضاهای پایای بسته آن مرتب کلی توسط رابطه شمول باشند.

---

۱- (Hilbert) space

۲- Euclidean topology

**۱۷-۱-۱- اکیدا" متعدی :**

یک زیر مجموعه $S$ از $L(X)$ گفته می شودکه اکیدا" متعدی است اگر برای هر دو بردار غیر صفر $x$ و $y$ وجود داشته باشد $A \in S$ طوری که : $Ax = y$ .

**۱۸-۱-۱- مثلثی شونده :**

یک رده از تبدیلات خطی مثلثی شونده نامیده می شود اگریک پایه برای فضای برداری وجود داشته باشد طوری که تمامی تبدیلات در این رده دارای نمایش های ماتریسی بالا مثلثی در ارجاع نسبت به این پایه باشند

**۱۹-۱-۱ – R مدول چپ :**

یک Rمدول چپ روی حلقه R شامل یک گروه آبلی $(M, +)$ همراه یک عمل $R \times M \to M$ است به طوری که برای هر r,s در R و x,y در $M$ داریم :

$$(rs)x = r(sx)$$

$$(r+s)x = rx + sx$$

$$r(x+y) = rx + ry$$

$$۱_R x = x$$

*اگر $R$ دارای عنصر همانی $۱_R$ باشد*

یک R مدول راست نیز به همین ترتیب تعریف می شود .

**۲۰-۱-۱- $A$-$B$دو مدول :**

اگر $A$ و $B$ دو حلقه و $M$ یک $A$ مدول چپ و همچنین یک $B$ مدول راست باشد گوئیم که $M$ یک $A$-$B$ دو مدول است اگر اعمال $A$ و $B$ روی آن جا به جا شوند یعنی

$$(am)b = a(mb) \qquad \text{برای a عضو } A \text{ و b عضو } B \qquad (۱۲)$$

تذکر: برد یک ماتریس $A$ را به وسیله $\mathcal{R}(A)$ نشان می دهیم

**۲۱-۱-۱- اکیدا" نیم متعدی :**

یک مجموعه $S$ زیر مجموعه $L(X)$ ( که در آن $X$ یک فضای باناخ کامل است و توسط $L(X)$ فضای همه عملگر های خطی پیوسته روی $X$ رانشان می دهیم) گفته می شود اکیدا" نیم متعدی است اگر برای هر دو بردار غیر صفر $x$ و $y$ عضو $\mathbb{F}^n$ وجود داشته باشد $A \in S$ طوری که : $Ax = y$ یا $Ay = x$ .

**۲۲-۱-۱- جبر نیم ساده:**

یک جبر نیم ساده در نظریه حلقه ها یک جبر شرکت پذیر است که دارای رادیکال ژاکوبسون بدیهی باشد، یعنی تنها عنصر صفراز جبر در رادیکال ژاکوبسون باشد .

اگر جبر با بعد متناهی باشد نیم ساده بودن معادل این است که جبر را می توان به صورت حاصل ضرب دکارتی از زیر جبر های ساده بیان نمود .

**۲۳-۱-۱- رادیکال جبر :**

رادیکال یک جبر عبارت است از ایده آل پوچ توان یکتایی که شامل تمام ایده آل های پوچ توان در جبر باشد.

**۲۴-۱-۱- میدان به طور جبری بسته :**

یک میدان F به طور جبری بسته است اگرهر چند جمله ای حداقل از درجه یک با ضرایب در F دارای یک ریشه در F باشد .

**مثال:**

فرض کنیدF میدان اعداد حقیقی باشد دراین صورت F یک میدان به طور جبری بسته نیست زیرا چند جمله ای $x^2 + 1 = 0$ دارای هیچ ریشه ای درمیدان اعداد حقیقی نمی باشد .

**۲۵-۱-۱- مشخصه میدان :**

کوچکترین عدد مثبت n را مشخصه میدان گویند اگر که برای هر a عضو میدان داشته باشیم :

$$\underbrace{a + \cdots + a}_{\text{مرتبه} n} = 0$$

و در غیر این صورت مشخصه میدان صفر خواهد بود