چکیده

در این پایان نامه مفهوم توابع تقریباً متناوب ضعیف برای توابع کراندار برداری مقدار تعریف شده روی یک نیم گروه با مقادیر در یک فضای موضعاً محدب بررسی می شود و قضایای ارگودیک میانگین برای توابع تقریباً متناوب ضعیف برداری به مفهوم ابرلین را بیان و اثبات می‌کنیم. همچنین با انگیزه گرفتن از کار فرشه، رابطه بین تقریباً متناوب بودن نیم گروه‌هایی از نگاشت‌ها و هم پیوستگی‌شان بررسی می شود و براین اساس قضیه ارگودیک میانگین برای نیم گروه‌های هم پیوسته از نگاشت‌ها را بررسی می‌کنیم. همچنین قضیه ارگودیک میانگین را برای چنین نیم گروه‌هایی در فضاهای باناخ در حالت‌های خاص مطالعه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: میانگین‌پذیری، توابع تقریباً متناوب، توابع تقریباً متناوب ضعیف، نیم‌گروه‌های تقریباً متناوب، قضایای ارگودیک میانگین.

فهرست مطالب

پیشگفتار

ابرلین[1] مفهوم توابع تقریباً متناوب را به توابع تقریباً متناوب ضعیف روی یک نیم گروه با مقادیر در یک فضای برداری توسعه داد و مفهوم نیم گروه‌های تقریباً متناوب ضعیف به وجود آمد و به دنبال این تعاریف قضایای ارگودیک برای این نوع توابع و نیم گروه ها بررسی شدند.

در این پایان نامه مفهوم توابع تقریباً متناوب ضعیف برای توابع کراندار برداری مقدار تعریف شده روی یک نیم گروه با مقادیر در یک فضای موضعاً محدب را بررسی می‌کنیم و قضایای ارگودیک میانگین برای توابع تقریباً متناوب ضعیف برداری به مفهوم ابرلین را بیان و اثبات می‌کنیم.

همچنین با انگیزه گرفتن از کار فرشه[2]، رابطه بین تقریباً متناوب بودن نیم گروه‌هایی از نگاشت‌ها و هم پیوستگی‌شان را در قضیه ارگودیک میانگین برای نیم گروه‌های هم پیوسته از نگاشت‌ها بررسی می‌کنیم. همچنینی قضیه ارگودیک میانگین را برای چنین نیم گروه‌هایی در فضاهای باناخ در حالت‌های خاص مطالعه می‌کنیم.

این پایان نامه مشتمل بر سه فصل است و هر فصل به بخش‌هایی تقسیم شده است:

فصل اول: تعاریف و قضایایی از آنالیز تابعی که در فصل‌های دو و سه مورد استفاده قرار می‌گیرند بیان شده است. به خاطر دور نشدن از اصل مطالب از آوردن بعضی از اثبات قضیه‌های این فصل خودداری کرده‌ایم. خواننده می‌تواند برای کسب اطلاعات بیشتر در این مباحث و مشاهده اثبات قضایا به مراجع اشاره شده در هر قسمت مراجعه کند.

فصل دو: تعاریف و قضیه‌هایی که برای قضیه‌های اصلی فصل سه مورد نیازند، در این فصل آورده شده است. جهت آشنایی کامل با موضوع، قضیه‌ها اثبات گردیده‌اند و مثال‌هایی در مبحث گنجانیده شده است.

فصل سه: در این فصل که خواننده با مبحث آشنا شده است، تاریخچه‌ای از موضوع بیان شده است، در نهایت قضایای اصلی پایان نامه، یعنی قضایای ارگودیک میانگین برای توابع تقریباً متناوب ضعیف و قضایای ارگودیک میانگین برای نیم گروه‌های تقریباً متناوب مطالعه و بیان شده است.

در این پایان نامه، فضاهای برداری همگی حقیقی فرض می‌شوند.

---

[1] Eberliein
[2] Frechet

فصل ۱

تعاریف اولیه و پیش نیازها

در این فصل به بیان تعاریف و قضایای اساسی از آنالیز تابعی که در فصل‌های بعد از آن ها استفاده می‌کنیم، می‌پردازیم.

۱.۱ مفاهیم اولیه

با این فرض که خواننده با مفهوم فضاهای توپولوژک و متریک آشناست، تنها چند تعریف که در پایان نامه از آن ها استفاده شده است را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم (X, Z) یک فضای توپولوژیک باشد، گردایه‌ی $\mathcal{B} \subset Z$ را یک **پایه** برای Z گوییم هر گاه هر عضو Z اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ باشد.

واضح است که هر توپولوژی یک پایه دارد، در واقع می‌توان قرارداد $\mathcal{B} = Z$.

تعریف ۲.۱.۱. اگر X یک فضای توپولوژیک باشد و G یک مجموعه باز، آنگاه G یک **همسایگی** از نقطه $x_\circ \in X$ نامیده می‌شود، اگر $x_\circ \in G$.

تعریف ۳.۱.۱. اگر (X, Z) یک فضای توپولوژیک باشد آنگاه مجموعه U از همسایگی‌های $x_\circ \in X$ یک **پایه همسایگی** یا **پایه موضعی** در نقطه $x_\circ$ گفته می‌شود اگر هر همسایگی از $x_\circ$ شامل عضوی از U باشد.

تعریف ۴.۱.۱. مجموعه $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های X یک **پایه فیلتر** گفته می‌شود هر گاه:

[۱] $\mathcal{B} \neq \phi$ و $\phi \notin \mathcal{B}$؛

[۲] اگر $B_1 \in \mathcal{B}$ و $B_2 \in \mathcal{B}$، آنگاه $B_3 \in \mathcal{B}$ چنان وجود داشته باشد که $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای متریک است، زیرمجموعه C از X **تماماً کراندار** گفته می‌شود اگر برای هر $\epsilon > 0$، تعداد متناهی از اعضای $x_1, \dots, x_n$ در X چنان وجود داشته باشند که $C \subseteq \cup_{i=1}^{n} B_\epsilon(x_i)$. مجموعه $\{x_1, \dots, x_n\}$ یک ϵ-تور متناهی نامیده می‌شود.

قضیه ۶.۱.۱. *اگر C یک زیرمجموعه از فضای متریک X باشد، آنگاه گزاره‌های زیر برقرارند:*

[۱] *C فشرده است اگر و تنها اگر C بسته و تماماً کراندار باشد.*

[۲] *$\overline{C}$ فشرده است اگر و تنها اگر C تماماً کراندار باشد.*

اثبات. رجوع شود به مرجع [۱]. □

مثال ۷.۱.۱. $(0, 1)$ با متر معمولی تماماً کراندار است اما فشرده نیست.

$\mathbb{R}$ با متر معمولی کامل است اما تماماً کراندار نیست، بنابراین فشرده نیست.

۲.۱ فضاها

تعریف ۱.۲.۱. فضای برداری E را یک **فضای نرمدار** می‌نامیم هرگاه نگاشت $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد به طوری که

$$x = 0 \leftrightarrow \|x\| = 0, \quad \|x\| \geq 0 \quad \forall x \in E$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in E$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$$

و هرگاه E با متریک $d(x, y) = \|x - y\|$ کامل باشد، E را یک **فضای باناخ** می‌نامیم.

گزاره ۲.۲.۱. اگر X یک فضای نرمدار باشد، آنگاه توابع $X \times X \longrightarrow X$ که $(x, y) \mapsto x + y$ و $\mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ که $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ پیوسته هستند.

اثبات. رجوع شود به مرجع [۸]. □

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم E یک فضای باناخ باشد. نگاشت خطی $P : E \longrightarrow E$ را **تصویر** می‌نامیم هرگاه $P^۲ = P$، یعنی این که به ازای هر $x \in E$ داریم: $P(Px) = Px$.

مثال ۴.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای نرمدار باشد. تعریف می‌کنیم

$$C_b(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \text{کراندار و پیوسته است } f\}$$

جمع و ضرب اسکالر را در $C_b(X)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall f, g \in C_b(X)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in C_b(X)$$

که $C_b(X)$ را به یک فضای برداری تبدیل می‌کند و با نرم سوپریمم $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$، $C_b(X)$ یک فضای باناخ می‌شود. زیرا اگر دنباله کشی $\{f_n\}$ در $C_b(X)$ را در نظر بگیریم، برای $\epsilon > ۰$ وجود دارد $N \in \mathbb{N}$ که:

$$\forall n, m \geq N \qquad \|f_n - f_m\| < \frac{\epsilon}{۲}.$$

برای $x \in X$ داریم:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|$$

در نتیجه $\{f_n(x)\}$ یک دنباله کشی در $\mathbb{R}$ است. چون $\mathbb{R}$ کامل است، پس $f_n(x)$ به نقطه‌ی از $\mathbb{R}$ همگراست. یعنی برای هر $x \in X$ $\;\lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ داریم:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &\leq \|f_n - f_m\| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{۲} + |f_m(x) - f_n(x)| \end{aligned}$$

پس همگرایی به طور یکنواخت است و لذا f نیز پیوسته و کراندار است.

مثال ۵.۲.۱. فرض کنید I مجموعه‌ای دلخواه و ناتهی و $۱ \leq p < \infty$. تعریف می‌کنیم که

$$l^p = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R} : \sum_{i \in I} |f(i)|^p < \infty\}$$

همچنین تعریف می‌کنیم $\|f\|_p = (\sum_{i\in I} |f(i)|^p)^{\frac{1}{p}}$. آنگاه $l^p(I)$ یک فضای باناخ است. اگر $I = \mathbb{N}$ آنگاه $l^p(\mathbb{N}) = l^p$.

مجموعه تمام توابع $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ که f کراندار است را با $l^\infty(I)$ نشان می‌دهیم و نرم $\sup$ را روی آن تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_\infty = \sup_{i\in I} |f(i)|$$

آنگاه $l^\infty(I)$ نیز یک فضای باناخ است.

تعریف ۶.۲.۱. فضای برداری توپولوژیک (TVS) فضای برداری X همراه با یک توپولوژی است که نگاشت‌های:

۱) $X \times X \longrightarrow X$ که $(x, y) \mapsto x + y$؛

۲) $\mathbb{R} \times X$ که $(\alpha, x) \longrightarrow \alpha x$.

نسبت به توپولوژی روی X پیوسته باشند.

مثال ۷.۲.۱. بنابر گزاره ۲.۲.۱، هر فضای نرمدار یک TVS است.

تعریف ۸.۲.۱. توپولوژی فضای برداری توپولوژیکال X یک توپولوژی **موضعاً محدب** گفته می‌شود هرگاه هر همسایگی از صفر شامل یک همسایگی محدب (تعریف ۱.۷.۱) از صفر باشد. در این صورت X یک فضای موضعاً محدب $(\mathrm{L.C.S})$ گفته می‌شود.

گزاره ۹.۲.۱. هر فضای موضعاً محدب هاوسدورف است.

اثبات. رجوع شود به مرجع [۸]. □

تعریف ۱۰.۲.۱. فضای توپولوژیک X را **موضعاً فشرده** می‌نامیم هر گاه هر نقطه X حداقل یک همسایگی با بست فشرده داشته باشد.

مثال ۱۱.۲.۱. هر فضای توپولوژیک فشرده به وضوح موضعاً فشرده است. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ فشرده نیست اما موضعاً فشرده است.

قضیه ۱۲.۲.۱ (اصل کرانداری یکنواخت (PUB)). *اگر X فضای باناخ و Y فضایی نرمدار باشد و $\mathcal{A} \subseteq B(X,Y)$ آنگاه $\mathcal{A}$ کراندار است اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$ مجموعه $\{Ax : A \in \mathcal{A}\}$ کراندار باشد.*

اثبات. رجوع شود به مرجع [۸]. □

قضیه ۱۳.۲.۱ (قضیه نمودار بسته). *فرض کنیم E و F فضاهای باناخ باشند و T یک عملگر خطی (تعریف ۱.۳.۱) از E به F باشد. فرض کنیم نمودار T که با $G(T)$ نمایش می‌دهیم در $E \times F$ بسته باشد. در این صورت T پیوسته است.*

اثبات. رجوع شود به منبع [۳۶]. □

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنیم M زیر فضایی بسته از فضای برداری توپولوژیک X باشد، هر گاه زیرفضای بسته‌ای مانند N از X باشد که

$$X = M + N, \quad M \cap N = \{0\}$$

آنگاه گوییم M در X متمم می‌شود. در این حالت گوییم X **مجموع مستقیم** M و N است و از نماد $X = M \oplus N$ استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱۵.۲.۱. *هرگاه $X = A \oplus B$، آنگاه تصویر p با برد A و فضای پوچ B پیوسته است.*

اثبات. فرض کنیم p تصویر با برد A و فضای پوچ B مانند مفروضات قضیه باشد. فرض کنیم $x_n \longrightarrow x$ و $p_{x_n} \longrightarrow y$. چون $p_{x_n} \in A$ و A بسته است، داریم $y \in A$ و در نتیجه $y = py$ چون $x_n - p_{x_n} \in B$ و B بسته است، داریم $x - y \in B$ در نتیجه $py = px$ پس $y = px$ لذا طبق قضیه نمودار بسته، p پیوسته می‌باشد. □

تعریف ۱۶.۲.۱. اگر X یک فضای باناخ باشد و $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ ($C(X)$ مجموعه نگاشت‌های پیوسته از X به X است)، آنگاه $\mathcal{F}$ **هم پیوسته** است اگر برای هر $\epsilon > 0$ و برای هر $x_0 \in X$ همسایگی U از x_0 وجود داشته باشد به طوری که $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ برای تمام $x \in U$ها و تمام $f \in \mathcal{F}$ها.

۳.۱ فضاهای دوگان

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای برداری باشند، عملگر $T : X \longrightarrow Y$ را **خطی** می‌نامیم هر گاه به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$$

زیر فضاهای $N(T) = \{x \in X : T(x) = ۰\}$ و $R(T) = \{T(x) : x \in X\}$ از X و Y را به ترتیب **فضای پوچ** و **فضای برد** T می‌نامیم.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند و $T : X \longrightarrow Y$ عملگری خطی باشد، آنگاه **نرم عملگر** T را با $\|\mathbf{T}\|$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|T\| = \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq ۰\}$$

عملگر T را **کراندار** می‌نامیم هر گاه $\|T\| < \infty$ و آن را **بیکران** می‌نامیم هر گاه $\|T\| = \infty$.

فضای تمام عملگرهای خطی و کراندار از X به Y را با $L(X, Y)$ و اگر $X = Y$ با $L(X)$ نشان می‌دهیم.

همچنین در حالت خاص اگر C یا $Y = \mathbb{R}$، هر T را یک **تابعک خطی کراندار** می‌نامیم.

تعریف ۳.۳.۱. فضای تمام تابعی‌های خطی کراندار روی فضای برداری نرمدار E را با $\mathbf{E'}$ نشان می‌دهیم. $x' \in E'$ را در نظر می‌گیریم. اثر x' روی x از E را با $\mathbf{x'(x)}$ یا $< \mathbf{x}, \mathbf{x'} >$ نشان می‌دهیم. در این صورت با تعریف $\|x'\| = \sup_{\|x\| \leq ۱} | < x, x' > |$، فضای E' یک فضای باناخ است که آن را **فضای دوگان** E می‌نامیم.

فضای دوگان E' را با $\mathbf{E''}$ نشان می‌دهیم و آن را **دوگان دوم** E می‌نامیم. اعضای E'' را با x'' نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۳.۱. اگر $A \in L(X, Y)$، نگاشت $A' : Y' \longrightarrow X'$ را که برای هر $x \in X$ و $y' \in Y'$ در رابطه $< A(x), y' > = < x, A'(y') >$ صدق کند **نگاشت الحاقی** از A می‌نامیم.

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنیم μ یک اندازه بر فضای اندازه Q بوده و X یک فضای برداری توپولوژیک باشد و f یک تابع از Q به توی X باشد به طوری که توابع اسکالر X به ازای هر $x'f$ نسبت به μ انتگرال

پذیر باشند که $x'f$ به ازای هر $x' \in X'$ به وسیله $(x'f)(q) = x'(f(q))$ $(q \in Q)$ تعریف شده است. هر گاه برداری مانند $y \in X$ چنان موجود باشد که به ازای هر $x' \in X'$،

$$x'(y) = \int_Q (x'f) d\mu$$

آنگاه **انتگرال توابع برداری مقدار** را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_Q f d\mu = y.$$

قضیه ۶.۳.۱. *فرض کنیم* $۱ \leq p < \infty$ *و* f *یک تابعی خطی پیوسته بر* l^p *باشد. در این صورت دنباله یکتایی مانند* $y = (y_۱, y_۲, \ldots) \in l^q$ *(که در آن* $\frac{۱}{q} + \frac{۱}{p} = ۱$ *و نیز برای* $p = ۱, q = \infty$*) هست به طوری که به ازای هر* $x = (x_۱, x_۲, \ldots) \in l_p$

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} x_n y_n.$$

اثبات. به ازای هر n، فرض کنیم e_n دنباله‌ای باشد که مقدار آن در مختص nام برابر با یک و در جاهای دیگر برابر با صفر است. روشن است که اگر $x = (x_۱, x_۲, \ldots) \in l_p$، آنگاه

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|x - \sum_{i=۱}^{n} x_i e_i\|_P = ۰$$

بدین سان، $f(x) = \sum_{i=۱}^{\infty} x_n f(e_n)$. به ازای هر n، فرض کنیم $y_n = f(e_n)$ نشان می‌دهیم

$$y = (y_۱, y_۲, \ldots) \in l_q$$

اگر $p = ۱$، در این صورت $|y_n| = \|f(e_n)\| \leq \|f\|$ و از این رو $y \in l^\infty$. اگر $۱ < p < \infty$ قرار می‌دهیم

$$a_n = \begin{cases} y_n.|y_n|^{q-۲} & y_n \neq ۰ \\ ۰ & y_n = ۰ \end{cases}$$

در این صورت به ازای هر n داریم $|a_n|^p = |y_n|^q = a_n y_n$. علاوه بر این:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i &= \sum_{i=1}^{n} a_i f(e_i) \\ &= f(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i) \leq \|f\| \|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\|_p \\ &= \|f\| (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\| (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

پس به ازای هر n،

$$(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q)^{1-\frac{1}{p}} = (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\| < \infty$$

این نشان می‌دهد که $y = (y_1, y_2, \dots)$ به l_q تعلق دارد و $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. □

با توجه به این قضیه می‌توان فضای دوگان l_1 را با l^∞ یکی گرفت.

۴.۱ قضایای هان- باناخ

کلیه اثبات‌های این بخش را می‌توانید در منبع [۳۶] مطالعه کنید.

قضیه ۱.۴.۱ (هان- باناخ[1]، شکل تحلیلی). *فرض کنیم E یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد. اگر $P : E \longrightarrow \mathbb{R}$ یک نگاشت با خواص زیر باشد:*

$$a) P(\lambda x) = \lambda P(x), \qquad \forall x \in E,\ \forall \lambda \geq 0$$

$$b) P(x+y) \leq P(x) + P(y), \qquad \forall x, y \in E$$

و $G \subseteq E$ یک زیر فضای برداری و $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ یک نگاشت خطی باشد به طوری که:

$$g(x) \leq P(x) \quad \forall x \in G$$

در این صورت یک تابعک خطی f تعریف شده روی E موجود است که g را توسیع می‌دهد. یعنی:

$$g(x) = f(x) \qquad \forall x \in G$$

[1] Hann-Banach

به طوری که

$$f(x) \le P(x) \qquad x \in E.$$

نتیجه ۲.۴.۱. فرض کنیم E یک فضای نرمدار است و G یک زیر فضای برداری E و $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ یک نگاشت خطی و پیوسته با نرم $\|g\|_{G'} = \sup g(x)$ که $x \in G$ و $\|x\| \le ۱$ باشند. در این صورت $f \in E'$ موجود است به طوری که g را توسیع دهد و $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$.

نتیجه ۳.۴.۱. فرض کنیم E یک فضای نرمدار است. برای هر $x_۰ \in E$ می‌توان $f_۰ \in E'$ را پیدا کرد به طوری که $\|f_۰\| = \|x_۰\|$ و $< x_۰, f_۰ >= \|x_۰\|^۲$.

نتیجه ۴.۴.۱. برای هر $x \in E$ داریم:

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \le ۱}} \| < x, f > \| = \max_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \le ۱}} | < x, f > |$$

توضیح ۵.۴.۱. چنانچه در تعریف ۲.۳.۱ دیدیم، برای $f \in E'$:

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \le ۱}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \le ۱}} f(x) \qquad (a)$$

که با فرمول نتیجه قبل تفاوت دارد. به طور کلی در تعریف فوق سوپریمم یک ماکسیمم نیست یعنی اتخاذ نمی‌شود. اما اگر E یک فضای باناخ انعکاسی (تعریف ۱.۷.۱) باشد این سوپریمم اتخاذ می‌گردد و برعکس، اگر E یک فضای باناخ باشد به طوری که برای هر $f \in E'$، $\sup$ در (a) اتخاذ شود، در این صورت E انعکاسی است. (قضیه جیمز[۱])

تعریف ۶.۴.۱. مجموعه‌ای به شکل $H = \{x \in E, f(x) = \alpha\}$ که f یک نگاشت خطی غیر صفر روی فضای برداری E و $\alpha \in \mathbb{R}$ را **ابر صفحه** گوییم و با H یا $[f = \alpha]$ نشان می‌دهیم.

لم ۷.۴.۱. در فضای باناخ E ابرصفحه $[f = \alpha]$ بسته است اگر و تنها اگر f پیوسته باشد.

تعریف ۸.۴.۱. فرض کنیم $A, B \subset E$، ابر صفحه $[f = \alpha]$، A و B را از **یکدیگر جدا** می‌کند اگر $f(x) \le \alpha \ (\forall x \in A)$ و $f(x) \ge \alpha \ (\forall x \in B)$ و A و B را **اکیداً از یک دیگر جدا** می‌کند اگر عددی

[۱] James

مانند $\epsilon > 0$ موجود باشد که

$$f(x) \geq \alpha + \epsilon \ (\forall x \in B) \qquad f(x) \leq \alpha - \epsilon \ (\forall x \in A).$$

قضیه ۹.۴.۱ (هان-باناخ، شکل اول هندسی)**.** *فرض کنیم $A, B \subset E$ دو مجموعه محدب، ناتهی با اشتراک تهی باشند، فرض کنیم A باز باشد. در این صورت یک ابر صفحه موجود است که A و B را از یکدیگر جدا می‌کند.*

قضیه ۱۰.۴.۱ (هان-باناخ، شکل دوم هندسی)**.** *فرض کنیم E یک فضای باناخ است و $A, B \subset E$ دو مجموعه محدب، ناتهی و با اشتراک تهی باشند. فرض کنیم E یک فضای باناخ باشد و A بسته و B فشرده باشد، در این صورت یک ابر صفحه بسته موجود است که A و B را اکیداً از هم جدا می‌کند.*

نتیجه ۱۱.۴.۱. فرض کنیم $F \subset E$ یک زیر فضای برداری باشد به طوری که $\overline{F} \neq E$ در این صورت $f \in E'$ وجود دارد که $f \neq 0$ و $f(x) = 0 \ (\forall x \in F)$.

توضیح ۱۲.۴.۱. عموماً از نتیجه فوق برای اثبات چگال بودن یک زیرفضای برداری $F \subset E$ استفاده می‌کنیم. یک تابعک خطی و پیوسته f روی E در نظر می‌گیریم به طوری که روی F داشته باشیم $f = 0$ و ثابت می‌کنیم که f همه جا روی E برابر با صفر است.

۵.۱ مجموعه‌های محدب و قضیه دو قطبی

تعریف ۱.۵.۱. زیر مجموعه C از فضای برداری E **محدب** نامیده می‌شود هر گاه به ازای هر $0 < \alpha < 1$ و هر $x, y \in C$ داشته باشیم

$$\alpha x + (1 - \alpha) y \in C.$$

گزاره ۲.۵.۱. زیر مجموعه C از فضای برداری E محدب است اگر و تنها اگر تمام ترکیبات محدب از اعضای C داخل C باشد یعنی برای هر $x_1, \ldots, x_n \in A$ و $t_1, \ldots, t_n \in [0, 1]$ که $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ و $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $\sum_{i=1}^n t_i x_i \in A$.

اثبات. رجوع شود به مرجع [۸]. □

مثال ۳.۵.۱. هر گوی باز یا بسته در فضای نرمدار مجموعه‌ای محدب است.

تعریف ۴.۵.۱. اگر A زیرمجموعه‌ای از فضای برداری E باشد، کوچکترین زیرمجموعه محدب شامل A را **غلاف محدب A** گوییم و با CoA نشان می‌دهیم. $\mathrm{Co}\,A$ اشتراک تمام مجموعه‌های محدب شامل A است، یعنی $\mathrm{Co}\,A$ مجموعه تمام ترکیبیات محدب از نقاط A است.

اگر E یک TVS باشد، **بستار غلاف محدب A** را با $\overline{\mathrm{Co}}A$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۵.۵.۱. اگر A زیرمجموعه‌ای از فضای برداری توپولوژیک E باشد، آنگاه $\overline{\mathrm{Co}}A = \overline{\mathrm{Co}\,A}$.

اثبات. رجوع شود به مرجع [۸]. □

تعریف ۶.۵.۱. اگر A یک زیرمجموعه از E TVS باشد، نماد A° **قطب** A است که مجموعه‌ی زیر می‌باشد.

$$\mathrm{A}^\circ = \{x' \in E' : |< x, x' >| \leq ۱, \forall x \in A\}$$

و همچنین ${}^\circ\mathrm{A}^\circ$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$${}^\circ\mathrm{A}^\circ = \{x \in E : |< x, x' >| \leq ۱, \forall x' \in \mathrm{A}^\circ\}$$

تعریف ۷.۵.۱. اگر A یک زیرمجموعه محدب از E TVS باشد، A **متعادل** گفته می‌شود هر گاه برای هر $x \in A$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ که $|\alpha| \leq ۱$ داشته باشیم: $\alpha x \in A$.

قضیه ۸.۵.۱ (دو قطبی)**.** *اگر E یک فضای موضعاً محدب باشد و $A \subseteq E$، آنگاه ${}^\circ\mathrm{A}^\circ$ غلاف محدب متعادل بسته از A است.*

اثبات. رجوع کنید به [۸]. □

۶.۱ توپولوژی ضعیف و ضعیف ستاره

تعریف ۱.۶.۱. فرض کنیم E یک فضای باناخ و E' دوگان آن باشد. اگر $f \in E'$ در این صورت نگاشت $\varphi_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\varphi_f(x) : f(x) =< x, f >$$

توپولوژی ضعیف روی E که آن را با نماد $\sigma(E,E')$ نشان می‌دهیم کوچکترین توپولوژی روی E است که تمام نگاشت‌های $(\varphi_f)_{f\in E'}$ را پیوسته می‌سازد.

نماد گذاری ۲.۶.۱. اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در E باشد، همگرایی x_n به سمت x برای توپولوژی ضعیف $\sigma(E,E')$ را با $x_n \rightharpoonup x$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۳.۶.۱. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای نرمدار E باشد. آنگاه:

a) $x_n \rightharpoonup x$ اگر و تنها اگر $\forall f\in E'$؛ $< x_n, f > \longrightarrow < x, f >$.

b) اگر $x_n \longrightarrow x$ آنگاه $x_n \rightharpoonup x$.

c) اگر $x_n \rightharpoonup x$ آنگاه $\|x_n\|$ کراندار است و

$$\|x\| \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \|x_n\|.$$

d) اگر $x_n \rightharpoonup x$ و $f_n \longrightarrow f$ (همگرایی در E' با توپولوژی معمولی) آنگاه

$$< x_n, f_n > \longrightarrow < x, f > .$$

e) هر گاه بعد E متناهی باشد، توپولوژی ضعیف و توپولوژی معمولی بر هم منطبق‌اند. به ویژه یک دنباله ضعیف همگراست اگر و تنها اگر به طور قوی همگرا باشد.

اثبات. رجوع شود به مرجع [۳۶]. □

توضیح ۴.۶.۱. بازهای (بسته‌های) توپولوژی ضعیف برای توپولوژی معمولی باز (بسته) هستند، هر گاه بعد X نا متناهی باشد توپولوژی ضعیف اکیداً کوچکتر از توپولوژی معمولی است، یعنی بازهایی (بسته‌هایی) برای توپولوژی معمولی وجود دارد که برای توپولوژی ضعیف باز (بسته) نیستند همچنین دنباله‌های وجود دارند که به طور ضعیف همگرا هستند ولی به طور قوی همگرا نیستند.

مثال ۵.۶.۱. اگر بعد X نامتناهی باشد، مجموعه $S = \{x\in X : \|x\| = ۱\}$ هیچگاه برای توپولوژی ضعیف بسته نیست در حالیکه در توپولوژی معمولی بسته است.

نشان می‌دهیم به ازای هر $x_\circ \in E$ با شرایط

$$x_\circ \in \overline{S}^{\sigma(E,E')}, \quad \|x_\circ\| < ۱$$

(یعنی $\overline{S}^{\sigma(E,E')} = \{x \in E : \|x\| \leq ۱\}$) برای این منظور به ازای هر همسایگی V در توپولوژی ضعیف از $x_\circ$ نشان می‌دهیم $V \cap S \neq \emptyset$. فرض می‌کنیم:

$$V = \{x : | < f_i, x - x_\circ > | < \epsilon ; i = ۱, \ldots, n\}$$

می‌توان $E \ni y_\circ \neq \circ$ را طوری انتخاب کرد که $\circ = < f_i, y_\circ >$ $(\forall i = ۱, \ldots, n)$ چون اگر $y_\circ$ای وجود نداشته باشد. نگاشت $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ با ضابطه $z \longrightarrow (f_۱(z), \ldots, f_n(z))$ یکریختی دارای هسته صفر است در نتیجه $\dim E \leq n$ که تناقض است. تعریف می‌کنیم $g : [\circ, \infty) \longrightarrow [\circ, \infty)$ با ضابطه $t \longrightarrow \|x_\circ + t y_\circ\|$ که $\lim_{t \longrightarrow \infty} g(t) = +\infty$ و $g(\circ) = \|x_\circ\| < ۱$ چون g پیوسته است طبق قضیه مقدار میانی وجود دارد یک $t_\circ$ به طوری که $\|x_\circ + t y_\circ\| = ۱$. به وضوح $f_i((x_\circ + t y_\circ) - x_\circ) = \circ < \epsilon$ در نتیجه $x_\circ + t y_\circ \in V$ و $\|x_\circ + t y_\circ\| = ۱$ پس $x_\circ + t y_\circ \in V \cap S \neq \emptyset$.

مثال ۱.۶.۶. اگر بعد X نامتناهی باشد و مجموعه $U = \{x \in X : \|x\| < ۱\}$ هیچگاه برای توپولوژی ضعیف باز نیست در حالی که در توپولوژی معمولی باز است.

قضیه ۱.۶.۷. *فرض کنیم E یک فضای باناخ باشد و $C \subset E$ محدب، در این صورت C برای $\sigma(E, E')$ به طور ضعیف بسته است اگر و تنها اگر به طور قوی بسته باشد. در نتیجه اگر دنباله $\{x_n\}$ همگرای ضعیف به x باشد آنگاه یک دنباله از ترکیبات محدب x_nها وجود دارد که به طور قوی به x همگراست.*

اثبات. رجوع شود به مرجع [۳۶]. □

قضیه ۱.۶.۸. *فرض کنیم E و F دو فضای باناخ باشند و T یک عملگر خطی پیوسته از E به F باشد. در این صورت T از E با توپولوژی ضعیف $\sigma(E, E')$ به F با توپولوژی ضعیف $\sigma(F, F')$ پیوسته است و برعکس.*

اثبات. کافی است نشان دهیم برای هر $f \in E'$ نگاشت $x \mapsto < T_x, f >$ از E ضعیف $\sigma(E, E')$ به $\mathbb{R}$ پیوسته است. ولی نگاشت $x \longrightarrow < T_x, f >$ یک تابع خطی و پیوسته روی E است، بنابراین برای توپولوژی ضعیف $\sigma(E, E')$ نیز پیوسته است.

بر عکس فرض کنیم T از E ضعیف به F ضعیف خطی و پیوسته باشد. در این صورت $G(T)$ (۱۳.۲.۱) در $E \times F$ برای توپولوژی $\sigma(E \times F, E' \times F')$ بسته است و همچنین $G(T)$ در $E \times F$ برای توپولوژی قوی بسته است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که T از E (قوی) به F (قوی) پیوسته است.

با همان استدلال نشان داده می‌شود که اگر T از E (قوی) به F ضعیف خطی و پیوسته باشد، در این صورت T از E (قوی) به F (قوی) پیوسته است. □

تعریف ۹.۶.۱. فرض می‌کنیم E'' دوگان E' باشد. برای هر $x \in E$ نگاشت $\varphi_x : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ را به ضابطه‌ی $\varphi_x(f) =< x, f >$ را در نظر می‌گیریم. اگر x در E تغییر کند، یک خانواده‌ی نگاشت‌های $(\varphi_x)_{x\in X}$ از E' به $\mathbb{R}$ بدست می‌آید. توپولوژی **ضعیف ستاره** روی E' که آنرا با نماد $\sigma(E', E)$ نشان می‌دهیم کوچکترین توپولوژی روی E' است که تمام نگاشت‌های $(\varphi_x)_{x\in X}$ را پیوسته می‌سازد.

چون $E \subseteq E''$ واضح است که توپولوژی $\sigma(E', E)$ از توپولوژی $\sigma(E', E'')$ کوچکتر است. به عبارت دیگر توپولوژی $\sigma(E', E)$ دارای مجموعه‌های باز (بسته) کمتری از توپولوژی $\sigma(E', E'')$ است. توجه می‌کنیم که اگر یک توپولوژی دارای بازهای کمتری باشد، دارای فشرده‌های بیشتری است و این موضوع عامل تلاش برای ضعیف کردن توپولوژی‌هاست.

اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای در E' باشد، همگرایی دنباله f_n به سمت f برای توپولوژی ضعیف ستاره $\sigma(E', E)$ را با $f_n \overset{*}{\longrightarrow} f$ و یا $f_n \overset{w^*}{\longrightarrow} f$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۰.۶.۱. *فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای در E' باشد. داریم:*

a) *$f_n \overset{*}{\longrightarrow} f$ برای $\sigma(E', E)$ اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in E$*

$$< x, f_n > \longrightarrow < x, f > .$$

b) *اگر $f_n \longrightarrow f$ به طور قوی، در این صورت $f_n \longrightarrow f$ برای $\sigma(E', E'')$ اگر $f_n \longrightarrow f$ برای $\sigma(E', E'')$ در این صورت $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ برای $\sigma(E', E)$.*

c) *اگر $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ برای $\sigma(E', E)$ در این صورت $\|f_n\|$ کراندار است و $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.*

d) *اگر $f_n \overset{*}{\longrightarrow} f$ و اگر $x_n \longrightarrow x$ به طور قوی، در این صورت $< x_n, f_n > \longrightarrow < x, f >$.*

e) *هر گاه بعد E متناهی باشد، توپولوژی ضعیف ستاره و توپولوژی ضعیف برهم منطبق‌اند.*

قضیه ۱۱.۶.۱. *فضای توپولوژی‌های ضعیف و ضعیف ستاره* L. C. S *هستند.*

اثبات. رجوع شود به مرجع [۳۶]. □

قضیه ۱۲.۶.۱. *فرض کنیم E یک فضای باناخ باشد. در این صورت $n(B_E)$ (تعریف ۱.۷.۱) در $B_{E''}$ با توپولوژی $\sigma(E'', E')$ چگال است.*

اثبات. رجوع شود به مرجع [۳۶]. □

قضیه ۱۳.۶.۱ (باناخ-آلااقلو[۱])**.** مجموعه $B_{E'} = \{f \in E' : \|f\| \leq ۱\}$ *برای توپولوژی ضعیف ستاره $\sigma(E', E)$ فشرده است.*

اثبات. رجوع شود به مرجع [۳۶]. □

قضیه ۱۴.۶.۱. *اگر C زیرمجموعه‌ای فشرده ضعیف از فضای باناخ X باشد، آنگاه C کراندار است.*

اثبات. رجوع شود به مرجع [۳۶]. □

۷.۱ فضاهای انعکاسی، محدب اکید و به طور یکنواخت محدب

تعریف ۱.۷.۱. نگاشت $n : E \longrightarrow E''$ را با تعریف $< x', nx >=< x, x' >$ در نظر می‌گیریم و آن را **نگاشت طبیعی** می‌نامیم. در این صورت

$$| < x', nx > | = | < x, x' > | \leq \|x\|\|x'\| = \|nx\| \leq \|x\|$$

بنابر نتیجه ۴.۴.۱ به ازای $x \neq ۰$، $x' \in E'$ وجود دارد که $< x, x' >= \|x\|$، پس $\|nx\| = \|x\|$ یک ایزومتری است لذا E را می‌توان زیرمجموعه‌ای از E'' تلقی کرد. اگر n پوشا هم باشد فضای E را **انعکاسی** گوییم.

مثال ۲.۷.۱. برای $۱ < p < \infty$، l^p انعکاسی است.

---
[۱] Banach-Alaoğlu

قضیه ۳.۷.۱ (کاکوتانی[۲]). *فرض کنیم E یک فضای باناخ باشد. در این صورت E انعکاسی است اگر و تنها اگر*

$$B_E = \{x \in E : \|x\| \leq ۱\}$$

برای توپولوژی $\sigma(E, E')$ فشرده باشد.

اثبات. رجوع شود به مرجع [۳۶]. □

گزاره ۴.۷.۱. فرض کنیم E یک فضای باناخ انعکاسی و $M \subset E$ یک زیرفضای برداری بسته از آن باشد. در این صورت M با نرم القا شده توسط E انعکاسی است.

اثبات. رجوع شود به مرجع [۳۶]. □

گزاره ۵.۷.۱. فرض کنیم E یک فضای باناخ باشد. در این صورت E انعکاسی است اگر و تنها اگر E' انعکاسی باشد.

اثبات. رجوع شود به مرجع [۳۶]. □

تعریف ۶.۷.۱. فضای باناخ X **محدب اکید** گفته می‌شود هرگاه

$$x, y \in B_X, x \neq y \Rightarrow \|(۱ - \lambda)x + \lambda y\| < ۱ \quad \forall \lambda \in (۰, ۱)$$

و این یعنی این که نقطه وسط $\frac{(x+y)}{۲}$ از نقاط مجزای x و y از گوی واحد B_X از X در B_X قرار ندارند، به عبارت دیگر اگر

$$\|x\| = \|y\| = \|\frac{(x + y)}{۲}\|$$

آنگاه $x = y$.

مثال ۷.۷.۱. فرض کنیم $X = \mathbb{R}^n$ که $n \geq ۲$ با نرم $\|x\|_۲$ با تعریف زیر:

$$\|x\|_۲ = (\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲)^{\frac{۱}{۲}}, \qquad x = (x_۱, x_۲, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

آنگاه X محدب اکید است.

---

[۲] Kakutani